

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

Script zur Vorlesung



Prof. Dr. Matthias Kohl

Link zum Kurs:

1. Youtube – Kanal „Physik – Experimente & Formeln“

https://www.youtube.com/channel/UCg56i-Dp-TYQWJkgX8Ia-hw?view_as=subscriber

2. Lehreserver OLAT: Vorlesung, Script, Übungen

<https://olat.vcrp.de/url/RepositoryEntry/2377352328?guest=true&lang=de>

unter Hochschule Koblenz, Mathematik und Technik

Inhaltsverzeichnis

[1. Einführung, Elektrostatik und Coulombgesetz](#)

[2. Das elektrische Feld und Ladung, elektrischer Dipol](#)

[3. Das elektrische Feld von Ladungsverteilungen](#)

[4. Das Gauß'sche Gesetz](#)

[5. Das elektrische Potential und Spannung](#)

[6. Der Kondensator, Dielektrika und Energie des E-Felds](#)

[7. Der elektrische Strom und Widerstand](#)

[8. Kirchhoff'sche Regeln, Schaltkreise mit Widerstand und Kondensatoren](#)

[9. Das Magnetfeld und Lorentz-Kraft](#)

[10. Bewegte Ladung im Magnetfeld](#)

[11. Vom magnetischen Dipolmoment zum Elektromotor](#)

[12. Erzeugung von Magnetfeldern - Biot-Savart-Gesetz](#)

[13. B-Feld von geradem Leiter, Leiterschleife und Spule](#)

[14. Kraft zwischen geraden, stromdurchflossenen Leitern](#)

[15. Der magnetische Fluss und das Ampere'sches Gesetz](#)

[16. Faraday'sches Induktionsgesetz](#)

[16a. Induktionsspannung: Wie groß ist sie?](#)

[17. Lenz'sche Regel Wirbelströme](#)

[18. Elektrischer Generator](#)

[19. Induktivität und Selbstinduktion](#)

[20. Wechselstromkreise mit R, C und L](#)

[21. Elektrische Schwingkreise aus R, C und L](#)

[22. Transformation von Spannungen, Energieübertragung](#)

[23. Transformator: Selbstbau, Nagelschweißen](#)

[24. Materie in Magnetfeldern, Experimente!](#)

[25. Materie in Magnetfeldern, Formen des Magnetismus](#)

[26. Die Maxwell-Gleichungen](#)

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

1. Einführung,
Elektrostatik
und Coulombgesetz

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

Schallplatte als Lichtquelle
Beispiel zur Elektrostatik



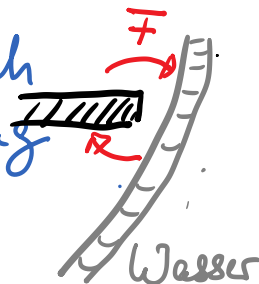
Elektromagnetismus

- Elektrostatik
 - Ladung e, p , Kraft / elektr. Feld

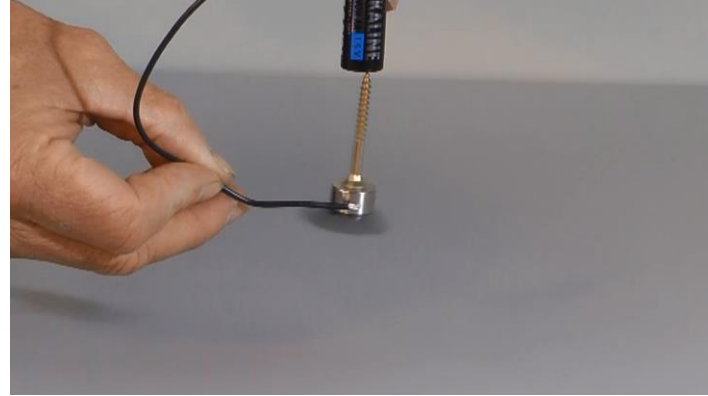
Beispiel: Elektrostatische Kraft



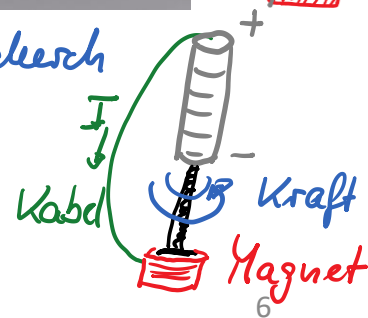
- Kraft / Ablenkung durch
 - elektrische Ladung
 - elektrisches Feld



- Elektrodynamik
 - bewegte Ladung
 - Magnetfeld
 - elektromagnetische Wellen
- Beispiel: Elektromagnetische Kraft



- Kraft / Drehmoment durch
 - elektrischen Strom / bewegte Ladung
 - Magnetfeld



Einordnung in die Physik:

1. Mechanik (Bewegung von Massen, Kräfte, Energie, Gravitation)
- ↓
2. Wärmelehre (Bewegung von vielen Teilchen, Gas,)

3. Elektromagnetismus

- Optik
- Atome & Moleküle
- Festkörper
- Quanten etc

- electron ≡
griechisch: Bernstein



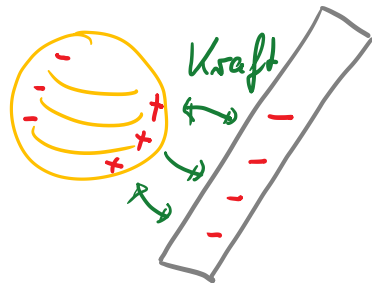
- Magnet - Stein aus
Magnesia ≡ Region
in Griechenland



- Grundkräfte der Physik:
 - Gravitation
 - **elektromagnetische Kraft**
 - schwache Wechselwirkung
 - starke Wechselwirkung

Elektrostatische Kräfte: Beispiele

a) Kunststoff & Leder & Reibung



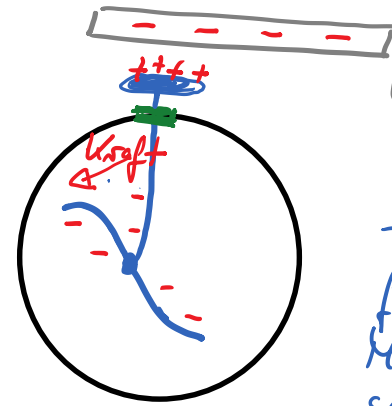
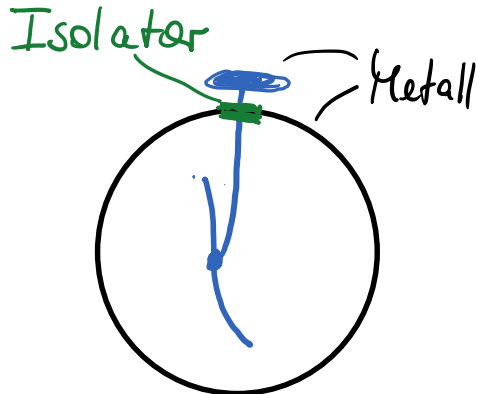
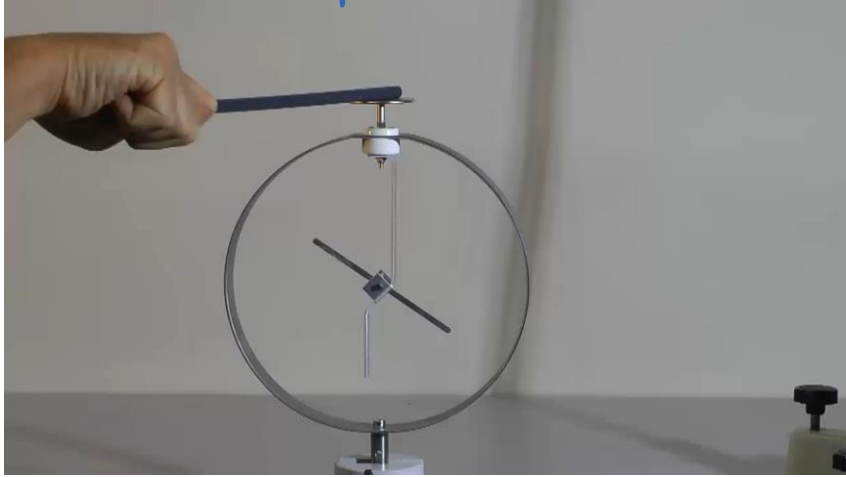
Ladung auf
Stab

b) Salz, Zucker, Reis



Beobachtung: Reiben von Kunststoff -
stab an Leder
→ Heben / Bewegen / Kraft

c) Elektroskop

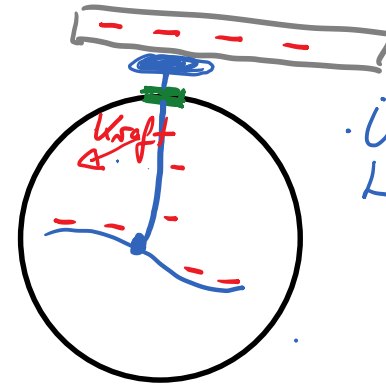


Stab
(ohne Berührung)

• geladener Stab

→ Induktion:
freie Ladungen im
Metall werden ver-
schoben

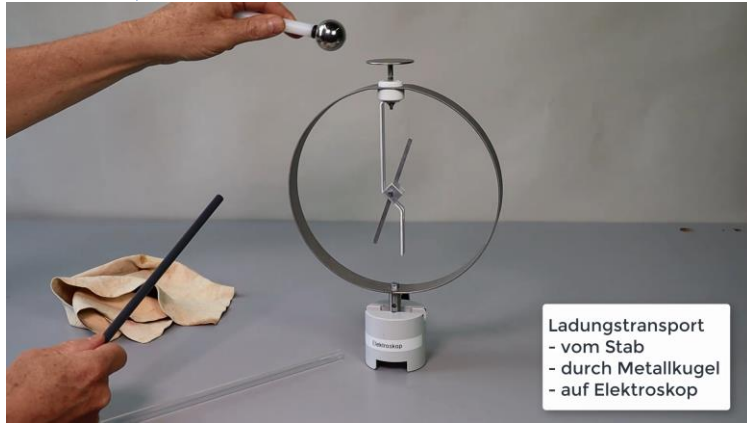
→ abstoßende Kraft zwischen Metall-
Rückstellung nach Entfernen teilen
des Stabs



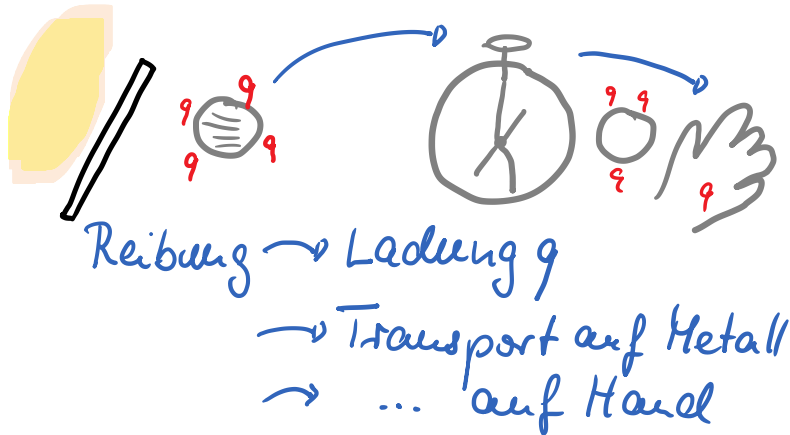
Stab, mit Berührung

• Übertragung von
Ladung

Transport von Ladung:



- Ladung q :
 - unabhängig von Materie / Stoff
 - kann transportiert werden

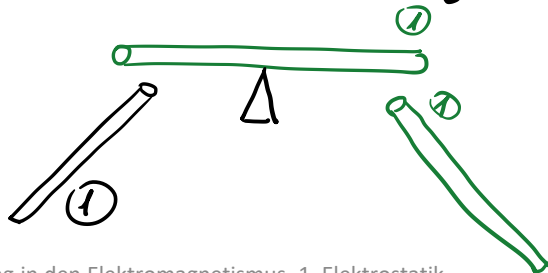


Elektrostatik: Reibung erzeugt zwei Typen von Ladungen



Glastab drehbar, - ohne Reibung
Kunststoffstab & Reibung - Anziehung

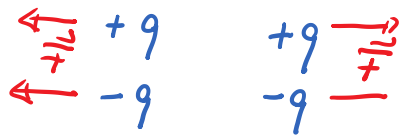
- ① Glastab & Reibung
- ② Plastikstab & Reibung



① & ② : anziehende Kraft

① & ①
oder
② & ② : abstoßende Kraft

→ Folgerung:
zwei Typen der Ladung + & -



Konvention: Reibung von Tuch
auf Glas: +
auf Plastik: -

Destillat aus Messungen:

- es gibt zwei Arten elektrischer Ladungen, positive + und negative -
- die Wirkungen der Ladungen können sich verstärken oder aufheben (Superposition)
- Ladung bleibt in einem abgeschlossenen System erhalten (Erhaltungssatz der Ladung)
- Ladung q ist gequantelt in Einheiten der Elementarladung $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $[q] = 1 \text{ C}$ (Coulomb)
Ladung des Elektrons $q_e = -e_0$
" " Protons $q_p = +e_0$

- Kräfte zwischen Ladungen sind
 - anziehend zwischen + & -
 - abstoßend zwischen + & + oder - & -

Kraft zwischen zwei Ladungen q_1, q_2 :

• Kraft \vec{F} entlang \vec{r} :
 $\vec{F} \parallel \vec{r}$

• $F \sim q_1$; $F \sim q_2$

$$\hookrightarrow F \sim q_1 \cdot q_2$$

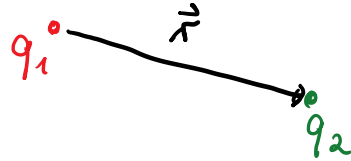
• aus genauen Messungen

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\hookrightarrow \vec{F} \sim \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Proportionalität ersetzen durch
"=" im Einheitensystem

Vektor der Länge 1



Coulomb-Gesetz:

zwei Punktladungen q_1 & q_2 im Abstand r
üben eine Coulomb-Kraft aufeinander aus

$$\vec{F}_C = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{Konstante}} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\text{Richtung}}$$

mit der Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

Anmerkungen:

• Faktor $\frac{1}{4\pi}$ wird im Kap. über
Gauß'sches Gesetz erklärt

• $\vec{F} \parallel \vec{r}$: $\vec{F} \sim \pm \vec{r}$, abhängig vom
Bezugspunkt

Vergleich:

Coulomb-Kraft

Gravitationskraft

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$q \longleftrightarrow m$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \longleftrightarrow G$$

Form der Kraft ist gleich

↳ Begriffe wie Feld, Potential etc.

können übernommen werden

aber: Massen ziehen sich immer an und stoßen sich nicht ab, nur positive Massen;

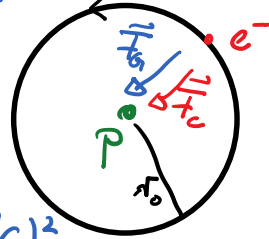
Ladungen: + & -

Beispiel: Wasserstoffatom mit e^- auf Kreisbahn ($r_0 = 0,053 \text{ nm} = 0,53 \text{ \AA} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) um Proton p

Coulomb-Kraft:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^+ \cdot e^-}{r_0^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}} \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} = -8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$



Gravitationskraft mit $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
 $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$F_G = G \cdot \frac{m_e \cdot m_p}{r_0^2} = 3,5 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

! Im Atom ist die elektrostatische Coulomb-Kraft ca. 10^{40} mal größer als die Gravitation. Gravitation kann in Atomen und Molekülen vernachlässigt werden. !

Unterscheidung:

- Leiter: freie Ladungsträger, die sich bewegen können
 - Strom
 - kleiner elektr. Widerstand
- ↳ Metalle

äußere
Ladung \ominus



im Leiter verschobene
Ladung

- Nicht-Leiter: keine freie Ladungen, hoher elektr. Widerstand
- ↳ Kunststoffe, Glas, Keramik

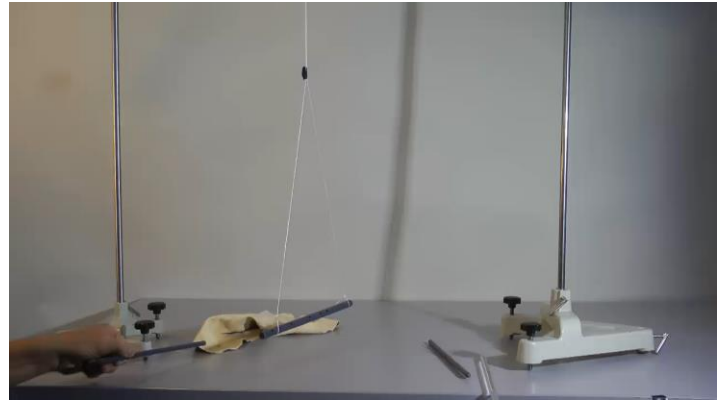
\ominus



im Isolator verschobene
Ladung

Wirkung von äußerer Ladung auf Stab

- auf Isolator (Plastik)
- auf Leiter (Metall)



Anmerkung:

- Kriterium: Leitfähigkeit σ bzw. Widerstand R
- weitere Zustände: Halbleiter
Supraleiter

Beispiel: Honigbiene

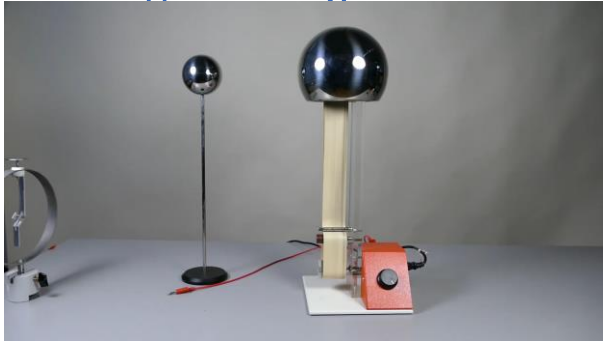
- durch Flugbewegung
→ elektrostatische Aufladung



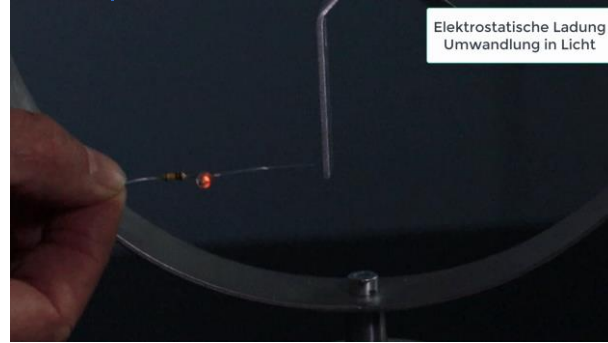
↳ Pollen „kleben“ an den Beinen

Beispiel: Van-der-Graaf-Generator

Ladungstrennung durch Reibung



Beispiel: Reibung → Ladung



- Strom
- Licht in Glimmlampe
- Ladung fließt vom Leiter



- auf Plastik (Nichtleiter)
- Ladung ist lokalisiert



Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

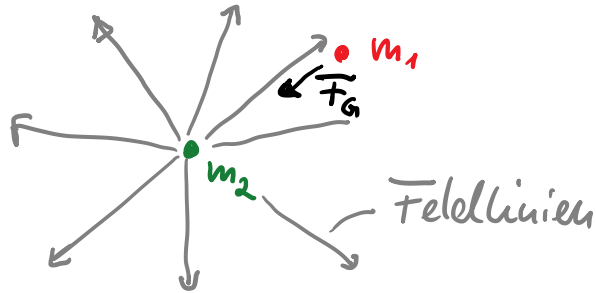
2. Das elektrische Feld
und Ladung,
elektrischer Dipol

Ziel: Beschreibung der Kräfte zwischen Ladungen und Ladungsverteilungen

Vergleich und Analogie: Gravitation

$$\text{Gravitationskraft } \vec{F}_G = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = m_1 \cdot \vec{g}$$

mit Gravitationsfeld $\vec{g} = -G \cdot \frac{m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$



↳ gesucht: äquivalente Beschreibung für Ladungen

Ladung q erzeugt Kraft auf Ladung q_0 :

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = q_0 \cdot \vec{E}$$

mit elektrischem Feld $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

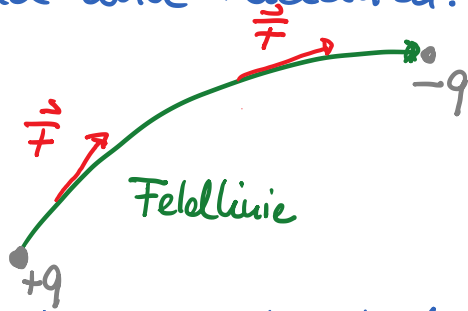
allgemein für eine Ladungsverteilung: ein elektrisches Feld \vec{E} wird erzeugt, das mit einer Kraft auf eine Probeladung q_0 wirkt:

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E} \quad \leftrightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\text{Einheit } [E] = 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m} = 1 \frac{Volt}{m}$$

Elektrisches Feld und Feldlinien:

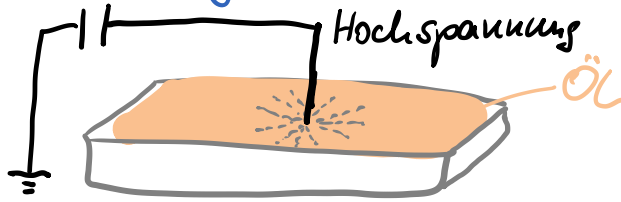
$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$



- Feldlinie beginnt auf positiver Ladung und endet auf negativer Ladung (oder im unendlichen)
- \vec{F} und \vec{E} steht tangential zur Feldlinie
- Anzahl der Feldlinien \sim Ladung
- Dichte der Feldlinien \sim Stärke von \vec{E}
- Feldlinien schneiden sich nicht

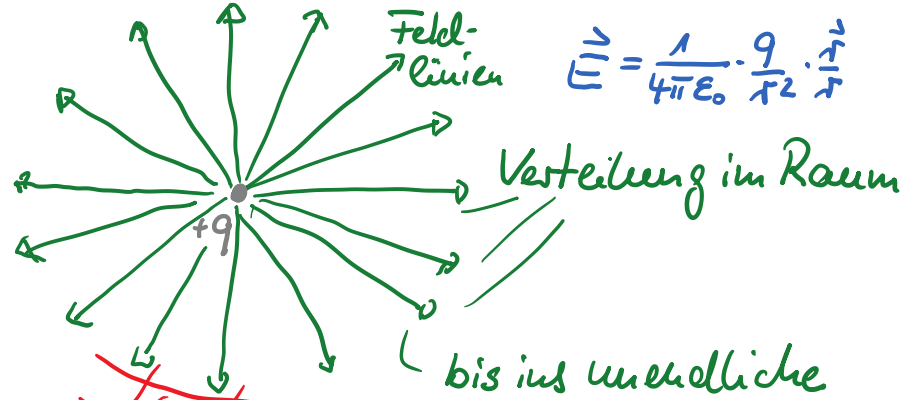
a) Einzelladung q

Darstellung von Feldlinien in 2D



• Spannung: Ausrichtung der Griesskörner durch Influenz

• im Raum: 3D



~~Fläche~~ Teil einer Kugeloberfläche
Linien verteilen sich auf Kugeloberfl. = $4\pi r^2$
↳ Dichte nimmt mit $\frac{1}{r^2}$ ab.

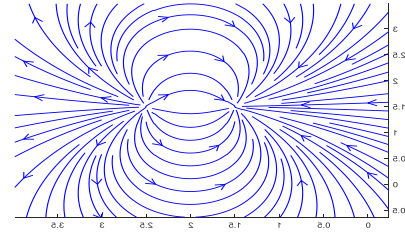
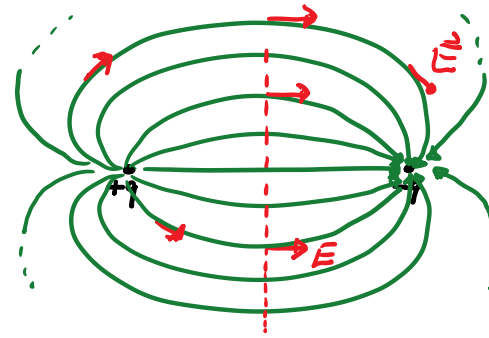
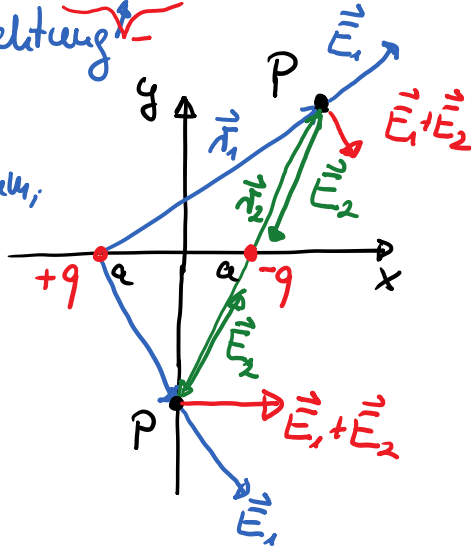
b) zwei Ladung $q_1 = q$ & $q_2 = -q_1$
 Abstand = $2a$

im Punkt $P(x, y)$

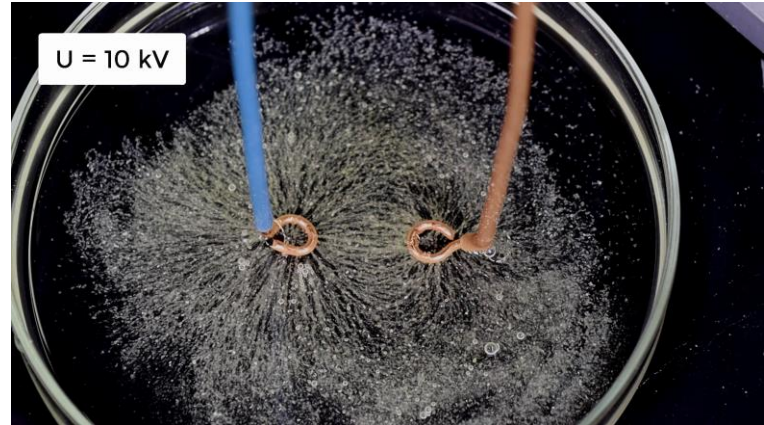
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\underbrace{\frac{1}{r_1^2}}_{+} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_1}{r_1}}_{\text{Richtung}} - \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2} \right)$$

Berechnung für
 jeden Punkt im Raum:

Symmetrie:
 $\vec{E} \perp$ Mittelebene



→ elektrischer Dipol mit $\pm q$
 Experiment: Gries in Öl, 2D



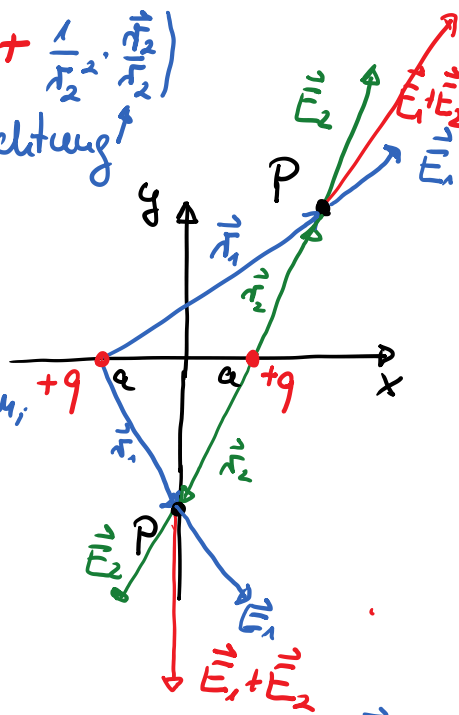
c) zwei Ladung $q_1 = q$ & $q_2 = +q_1$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_1^2} \cdot \overset{\substack{\text{Richtung} \\ \uparrow}}{\vec{r}_1} + \frac{1}{r_2^2} \cdot \overset{\substack{\text{Richtung} \\ \uparrow}}{\vec{r}_2} \right)$$

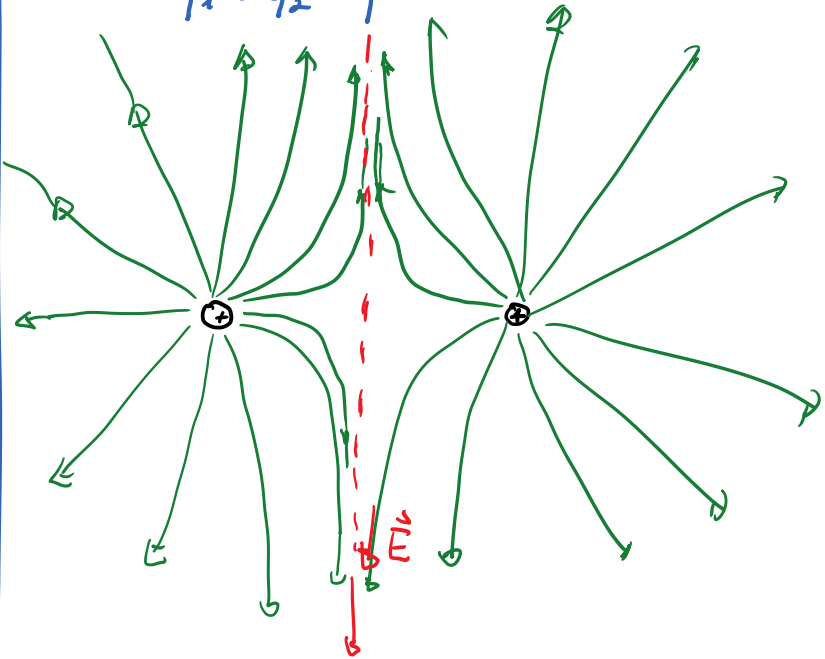
Berechnung für jeden Punkt im Raum;

Symmetrie:
 $\vec{E} \perp$ Mittelebene

aus Symmetriegründen: Feldlinien bzw \vec{E}
 \perp Mittelfläche /
 Mittellinie

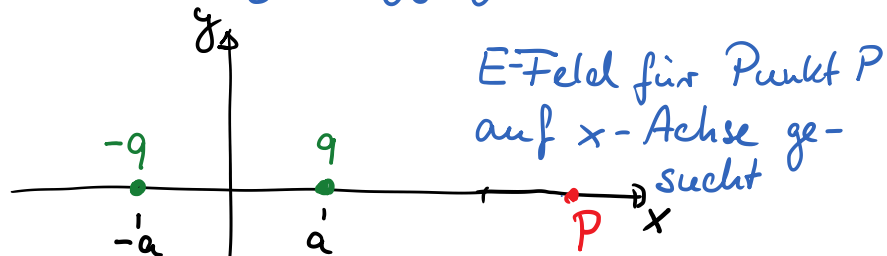


$q_1 = q_2 = q$



- aus Symmetriegründen: \vec{E} bzw. Feldlinien können nicht durch die Mittelfläche laufen
- für große Entfernung: Feldlinien so, als würden sie aus einem Zentrum entstehen

Beispiel: elektrischer Dipol \equiv zwei gleiche Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens

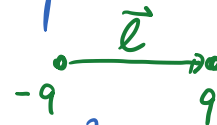


$$\begin{aligned}
 E(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x-a)^2} + \frac{-q}{(x+a)^2} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{(x-a)^2 \cdot (x+a)^2} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2}
 \end{aligned}$$

• Näherung für $x \gg a$: $x - a \approx x$

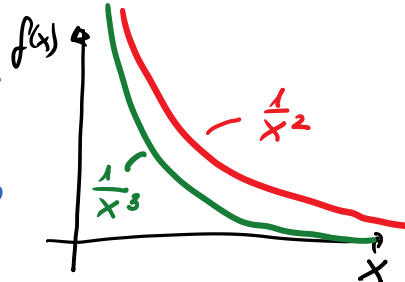
$$\hookrightarrow E(x) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4ax}{x^4} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4a}{x^3}$$

• mit dem Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{L} = q2a\vec{a}$



$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{x^3}$$

\rightarrow für große Entfernungen fällt das Feld mit $\frac{1}{x^3}$ ab und daher schneller als das Feld einer Punktladung



\rightarrow der Effekt beider Ladungen hebt sich auf, Dipol erscheint neutral.

$$\text{für } y \neq 0: \vec{E}(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{r^3} \cdot W$$

Winkelabhängigkeit 23

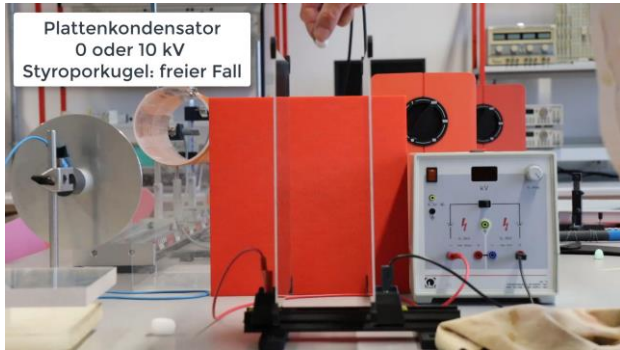
Bewegung von Ladung im \vec{E} -Feld:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

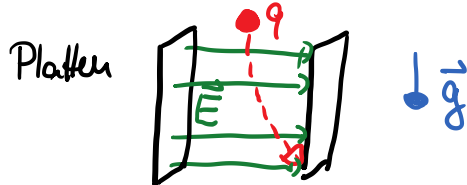
↳ Beschleunigung durch \vec{E} -Feld

a) Punktladung in homogenem Feld

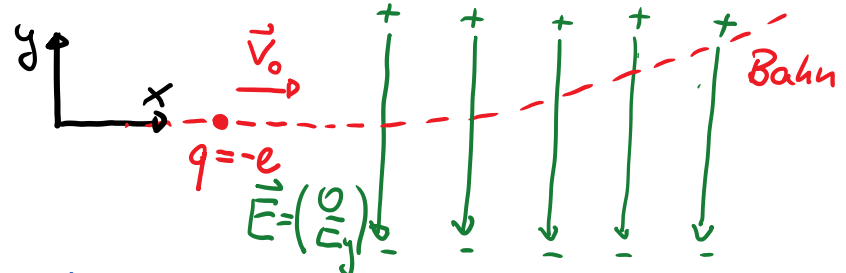
• homogenes Feld: Richtung und Stärke ortsunabhängig (→ Plattenkondensator)



Freier Fall
& $\vec{F} = q \vec{E}$



• einfacher Fall: Gravitation wird vernachlässigt
Ladung q hat Aufangsgeschw. $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\vec{F} = q \vec{E} = -e \vec{E} = -e \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \end{pmatrix}$$

• in x -Richtung: keine Kraft

$$\rightarrow x = v_{0x} \cdot t + x_0$$

$$= v_{0x} \cdot t \quad , \text{ wenn } x(t=0) = 0$$

• in y -Richtung: $\vec{F}_y = m \cdot a_y = -e E_y$
↑
Masse der Ladung

$$\hookrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-e}{m} E_y$$

$$\hookrightarrow y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{-e}{m} \right) E_y \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$$

Wahl der Koordinaten: $y_0 = 0, v_{0y} = 0$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{-e}{m} E_y \right) \cdot t^2 \quad \text{zeitabhängigkeit}$$

mit $x = v_{0x} \cdot t$:

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{-e}{m} E_y \cdot \frac{1}{v_{0x}^2} \right)}_{\text{Konstanten}} \cdot x^2$$

$$y(x) \sim x^2$$

Parabelbahn wie beim
Schrägen Wurf

↳ Ablenkung abhängig von $\frac{-e}{m}$
für Elektron $q = -e; m = m_e$

• im Jahr 1897: Messung der Bahn von
Elektronen → Bestimmung von $\frac{e}{m_e}$

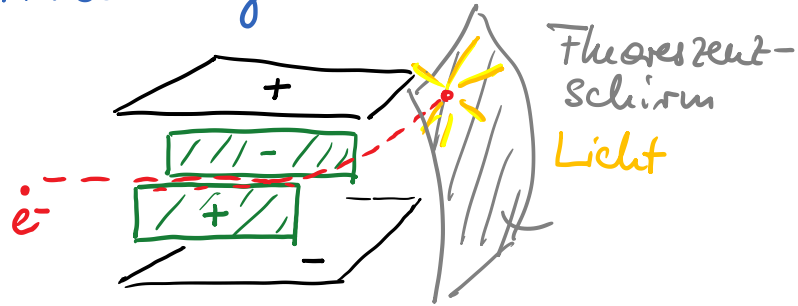
Beispiel: Elektronenröhre



• Ablenkung des e^- -Strahls durch
statisches E -Feld (nicht homogen)

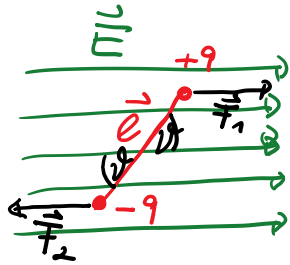


Anwendung: Fernsehöhre



- zwei Kondensatorplattenpaare
 - \vec{E} -Feldrichtung kann eingestellt werden durch Spannung
 - Ablenkung der e^- -Bahn ist variabel
 - Auftreffen von e^- auf Leuchtschirm
 - Lichtblitz

b) Elektrischer Dipol im homogenen E-Feld



↑
Feldlinien parallel

$$\text{Dipol } \vec{p} = q \cdot \vec{e}$$

homogenes Feld: $\vec{F}_2 = -q \cdot \vec{E} = -\vec{F}_1 = q \cdot \vec{E}$

↳ Gesamtkraft = $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0!$

daher keine Translationsbewegung des Dipols

Drehmoment entsteht: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

auf q : $\vec{F}_1 = q \cdot \vec{E}$

$$\vec{M}_1 = \frac{l}{2} \times (q \cdot \vec{E})$$

auf $-q$: $\vec{F}_2 = -q \cdot \vec{E}$

$$\vec{M}_2 = -\frac{l}{2} \times (-q \cdot \vec{E})$$

↑
Abstand vom Mittelpunkt
des Dipols

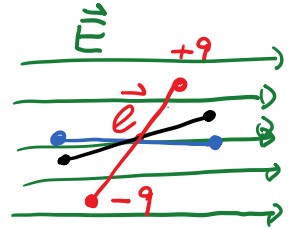
$$= \frac{l}{2} \times (q \cdot \vec{E})$$

(hier: \vec{M} in die Zeichenebene hinein)

$\vec{M}_1 = \vec{M}_2$: die Drehrichtung ist gleich

↳ Gesamtdrehmoment $\vec{M} = q \vec{e} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$

• im E-Feld erfährt ein elektrischer Dipol ein Drehmoment, das ihn in das Feld dreht → Ausrichtung



• wenn der Dipol sich frei drehen kann, so ist er entlang des elektrischen Feldes gerichtet

• beim Drehen wird Arbeit verrichtet:

$$dW = -M d\vartheta = -p \cdot E \cdot \sin\vartheta d\vartheta$$

(als Vektoren: $\vec{M} \parallel d\vec{\vartheta}$)

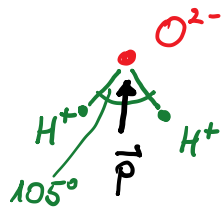
→ potentielle Energie $d\bar{E}_{\text{pot}} = -dW$

$$\begin{aligned} \rightarrow E_{\text{pot}} &= \int p \vec{E} \cdot \sin\vartheta d\vartheta \\ &= p \vec{E} \cdot (-\cos\vartheta) d\vartheta + E_{\text{pot},0} \end{aligned}$$

• mit Referenzpunkt $E_{\text{pot},0} = E_{\text{pot}}(\vartheta=0) = 0$
wird damit

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= -p \cdot E \cdot \cos\vartheta \\ &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Beispiel: Wassermolekül im \vec{E} -Feld



• elektrisches Dipolmoment/
Polarität

↳ im \vec{E} -Feld richten sich die
Wassermoleküle aus

Elektrische Feldstärke: Größenordnung

	$E \left[\frac{N}{C} \right] = \left[\frac{V}{m} \right]$
im Wasserstoffatom	$5 \cdot 10^{11}$
elektrischer Durchbruch in Luft	$\sim 3 \cdot 10^6$
Fotokopierer	$\sim 10^5$
Reibungsgelung	10^3
Atmosphäre	10^2

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

3. Das elektrische Feld von Ladungsverteilungen

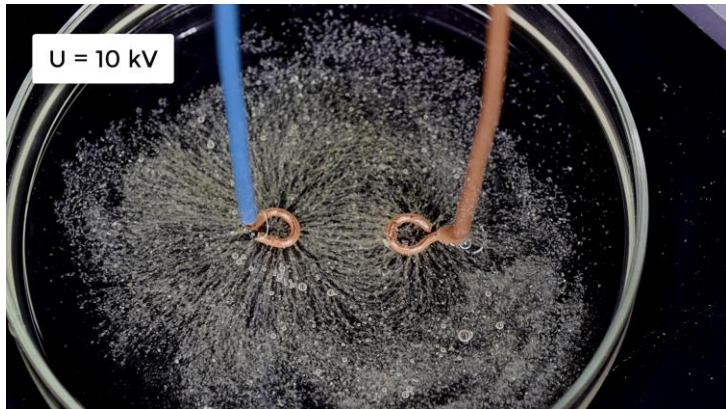
- bisher: \vec{E} -Feld einer Punktladung q

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Kraft auf q_0 : $\vec{F} = \vec{E} \cdot q_0$

- gesucht: E -Feld von Ladungsverteilung

- Ansatz:
- jede Ladung bildet ein E -Feld
 - Überlagerung (Superposition)



Griessinöl



- Ladung ist gequantelt in Einheiten von e
 $\rightarrow \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$

- für viele Elementarladungen (e):
 Kontinuum der Ladungsverteilung
 mit Gesamtladung $Q = \int dq$

$$\rightarrow \vec{E} = \int d\vec{E}$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Konstante

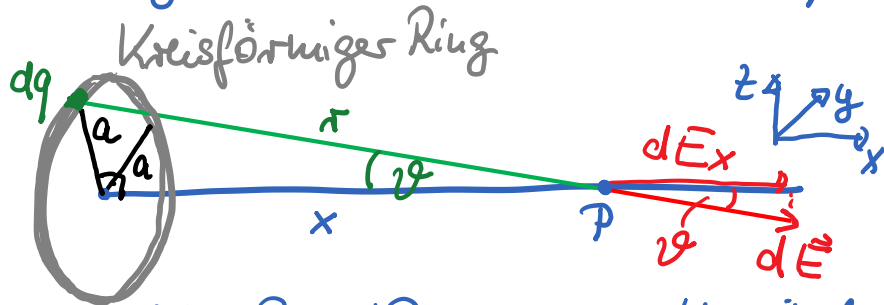
Richtung
Einheitsvektor
Stärke
 $\sim \frac{1}{r^2} \sim dq$

Berechnung von \vec{E}

- analytisch („Stift“);
 hier für einfache Geometrien
- Gauß'sches Gesetz („mit Kopf“) (Kap. 4)
- numerisch („Computer“)

a) \vec{E} -Feld einer Ringladung für Punkt auf der Achse

- homogene Ladungsverteilung auf Ring (Radius a) mit Gesamtladung Q



- \vec{E} -Feld in Punkt P : aus Symmetriegründen ist $\vec{E}_y = \vec{E}_z = 0$, nur $\vec{E}_x \neq 0$

- für Element dq

$$d\vec{E}_x = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2}}_{d\vec{E}} \cdot \underbrace{\cos\vartheta}_{\text{für } x\text{-Komponente}}$$

- mit $\cos\vartheta = \frac{x}{r}$ und $r^2 = x^2 + a^2$

$$\begin{aligned} d\vec{E}_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{(x^2+a^2)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x \, dq}{(x^2+a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

- für jedes dq auf dem Ring ist $d\vec{E}_x$ gleich

↳ Gesamtfeld $\vec{E}_x = \int_{\text{Ring}} d\vec{E}_x$

$$\vec{E}_x = \int_{\text{Ring}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \cdot dq$$

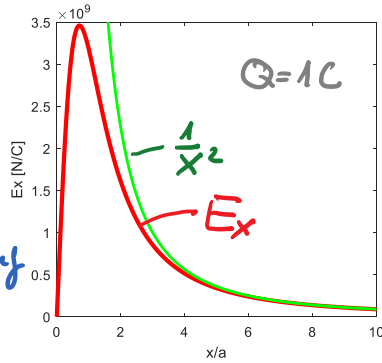
dq ist unabhängig von a und r

$$\begin{aligned} \text{↳ } \vec{E}_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \cdot \int_{\text{Ring}} dq \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \cdot Q \end{aligned}$$

Ⓘ

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot Q \quad \textcircled{I}$$

• Näherung: für $a \ll x$
Ring klein $\rightarrow \approx$ Punktladung



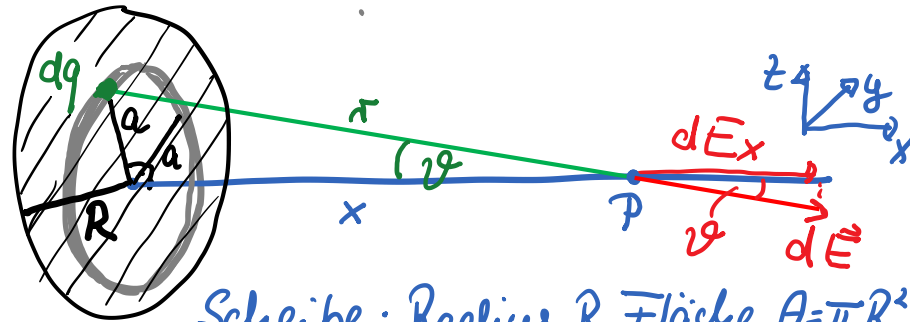
$$a \ll x \rightarrow \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \approx \frac{x}{(x^2)^{3/2}} = \frac{1}{x^2}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot Q \quad \text{Feld einer Punktladung}$$

• Näherung für $x \rightarrow 0$, also im Zentrum des Ringes: E -Felder aller dq heben sich aus Symmetriegründen auf

$$E_x = 0$$

b) E -Feld auf der Achse einer homogen geladenen Scheibe

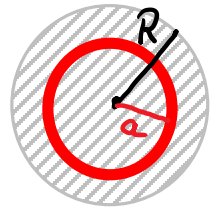


Scheibe: Radius R , Fläche $A = \pi R^2$

Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

Ansatz: Integration über Ringe der Breite da

Fläche Ring = $2\pi a \cdot da$
mit Ladung $dQ = 2\pi a \cdot da \cdot \sigma$
 E -Feld Ring mit \textcircled{I}



$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot 2\pi a \sigma da \quad \textcircled{II}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma}{(x^2+a^2)^{3/2}} \cdot 2\pi a \sigma da \quad \text{II}$$

integrierbar über da und nicht dq ↑
abhängig von Geometrie

• Feld der gesamten Scheibe:

$$E_x = \int_{\text{Scheibe}} dE_x = \int_0^R \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot a}{(x^2+a^2)^{3/2}} da$$

Konstante Geometrie

• für Punkt P auf Achse: x ist konstant

• Integration mit Substitution $g = x^2 + a^2$
 $\frac{dg}{da} = 2a \rightarrow dg = 2a \cdot da; da = \frac{dg}{2a}$

$$\int \frac{a}{(x^2+a^2)^{3/2}} da = \int \frac{a da}{g^{3/2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dg}{g^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g^{1/2}} \cdot (-2) = -\frac{1}{g^{1/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\hookrightarrow E_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}} \right) \Big|_0^R$$

$$E_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{1}{x} \right]$$

$$E_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right] \quad \text{III}$$

dies ist das \vec{E} -Feld einer homogen geladenen Scheibe

• Näherung für großen Abstand: $x \gg R$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} = \left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2}$$

(mit Taylorentwicklung $(1+x)^n \approx 1+n \cdot x + \dots$ für $x \ll 1$)

damit wird näherungsweise:

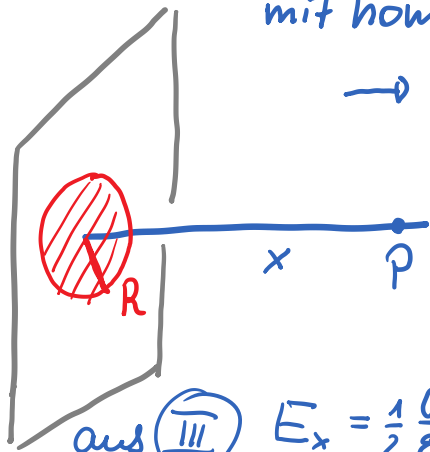
$$E_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{x^2} \quad \text{mit } Q = \pi R^2 \cdot \sigma$$

d.h. $E_x \sim \frac{1}{x^2}$ wie bei Einzelladung 33

c) \vec{E} -Feld einer unendlich großen Ebene mit homogener Ladungsdichte

→ entspricht Scheibe, sofern $R \rightarrow \infty$



aus (III)
$$E_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]$$

$$= 0 \text{ für } R \rightarrow \infty$$

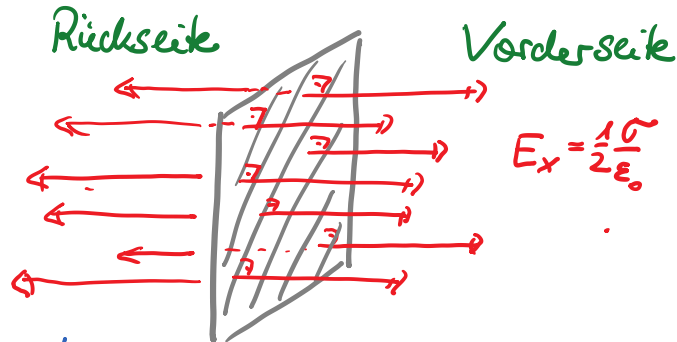
$$E_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{(IV)}$$

- einfaches Ergebnis!
- abhängig von Ladungsdichte σ
- unabhängig von x , also der Lage des Punktes P !

↳ \vec{E} -Feld ist im gesamten Raum gleich:

$$E_x = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- E_y & E_z müssen aus Symmetriegründen 0 sein (unabhängig von Drehung)
- also stellt $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ \perp Fläche



• aus Symmetriegründen:

- $\vec{E} \perp$ unabhängig von Abstand x
- $\vec{E} \parallel$ unabhängig von y & z
- $\vec{E} \parallel$ \perp Fläche
- $|\vec{E}|$ auf Vorder- und Rückseite gleich

Anmerkungen:

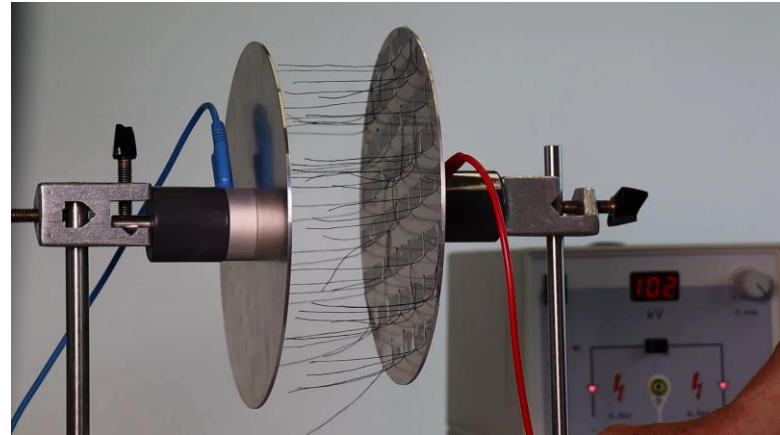
- Berechnung E -Feld ist analog zum Gravitationsfeld (Grav.-Kraft)

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{F}_E = q_2 \cdot \vec{E} \end{array} \right.$$

- auch der Begriff des Potentials kann von der Gravitation auf Elektrostatik übertragen werden.
- zwei Platten mit $+Q$ und $-Q$:
 - ↳ Kondensator mit E -Feld zwischen den Platten

Darstellung von E -Feldlinien:

- Platten, Spannung $U=10\text{ kV}$
- Wollfäden, nicht-leitend
 - Ausrichtung entlang Feldlinien



Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

4. Das Gauß'sche Gesetz

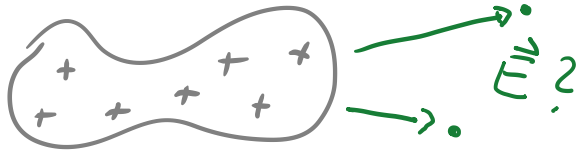
bisher: $\vec{F}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot q_0$

E-Feld der
Ladung q

Ladungsverteilung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

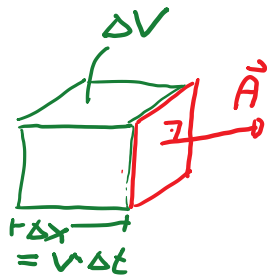
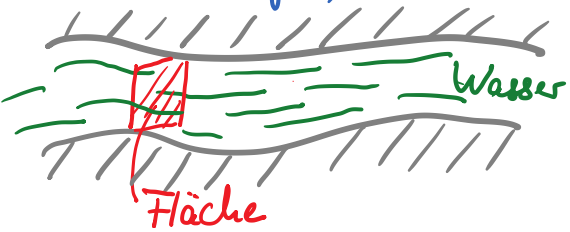
Integral über alle
Ladungselemente
oft schwer zu berechnen



Ziel: Einfache Berechnung von E-Feld
mit Gauß'schem Gesetz

Vorüberlegung aus Alltag

a) Wasser fließt im Bach

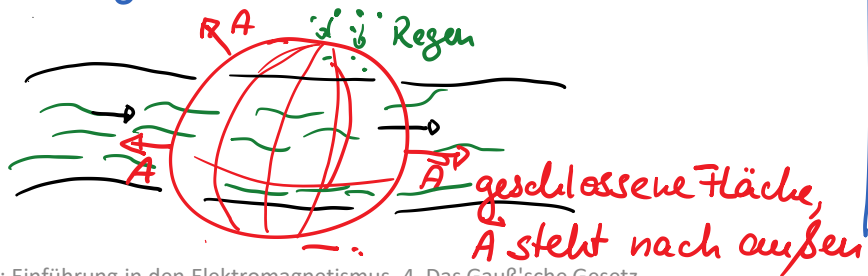


Volumenfluss = Volumen, das pro Zeiteinheit durch eine Fläche fließt

$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta t} = \frac{A \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = \vec{A} \cdot \vec{v}$$

\vec{A} Flächenvektor \vec{v} Geschwindigkeit

• für geschlossene Fläche um Volumen



→ Volumenfluss durch = 0 geschlossene Fläche

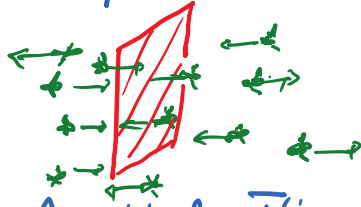
Erhaltungssatz für Volumen
„was herein fließt, fließt auch ab“

— geschlossene Fläche



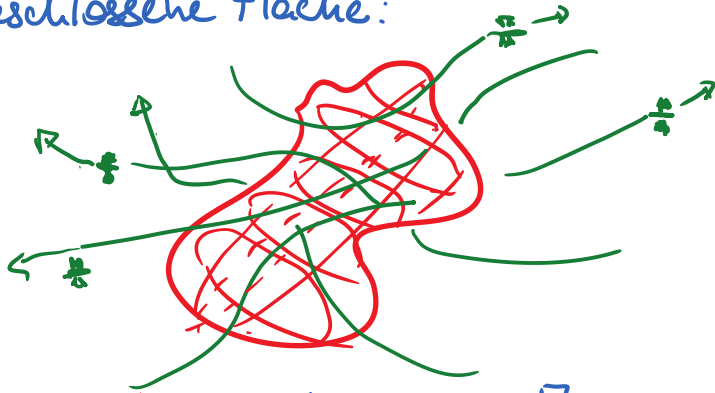
unabhängig von der Form der geschlossenen Fläche

b) Fliegen in der Luft



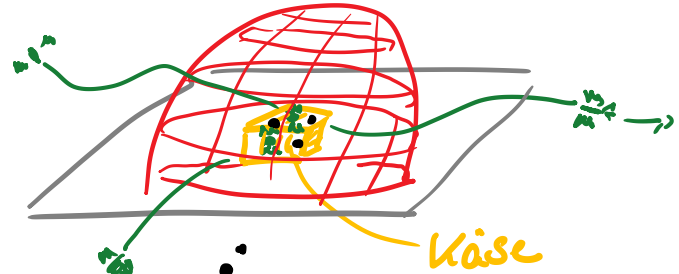
„Fliegenfluß“ = Anzahl der Fliegen, die pro Zeit durch Fläche fliegen“

- geschlossene Fläche:



$$\text{Fliegenfluß} / \text{geschlossene Fläche} = 0 \quad !$$

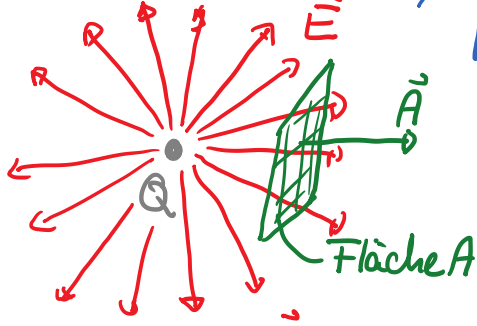
aber: Fliegen legen Eier \rightarrow Maden
 \rightarrow mehr Fliegen



\hookrightarrow Eier als Quelle neuer Fliegen

\hookrightarrow Fliegenfluß > 0 !
geschlossene Fläche

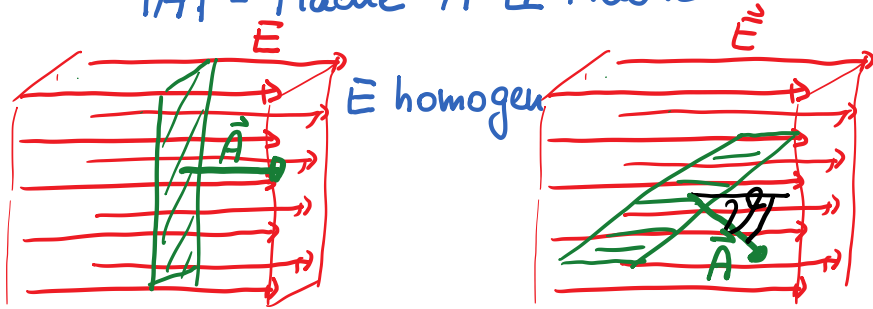
Übertragung auf das elektrische Feld:
Der elektrische Fluss



Ladung \rightarrow elek. Feld/
Feldlinien

\rightarrow Fluss der Feldlinien
durch Fläche \vec{A}

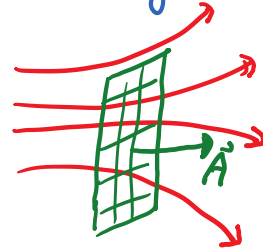
$$|\vec{A}| = \text{Fläche } \vec{A} \perp \text{Fläche}$$



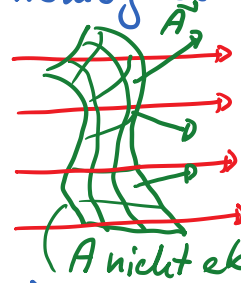
• elektrischer Fluss $\phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A \cdot \cos \vartheta$

• für beliebige Fläche $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

• inhomogenes E-Feld



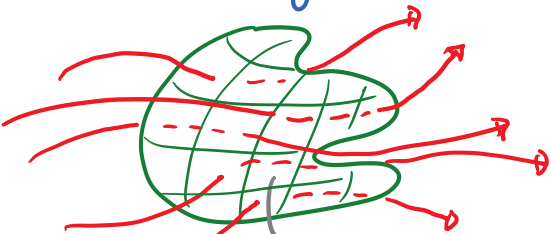
• homogenes Feld



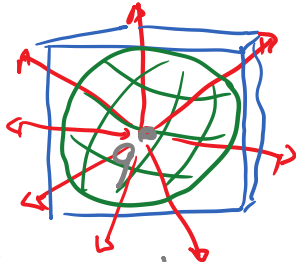
\rightarrow die Orientierung von \vec{A} und \vec{E} bestimmt
den Fluss

Allgemein: die Quellen von E-Feldern sind Ladungen,
 Feldlinien beginnen auf +q und enden auf -q

↳ die Anzahl der Feldlinien, die durch eine geschlossene Fläche laufen, ist proportional zur Ladung innerhalb der Fläche



innen keine Ladung:
 Anzahl E-Linien raus
 und rein sind gleich



+q innen
 Anzahl E-Feldl.
 unabhängig von
 Form

↳ Gauß'sches Gesetz: der elektrische Fluss durch eine beliebige, geschlossene Fläche ist

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

, mit der Ladung Q innerhalb der Fläche

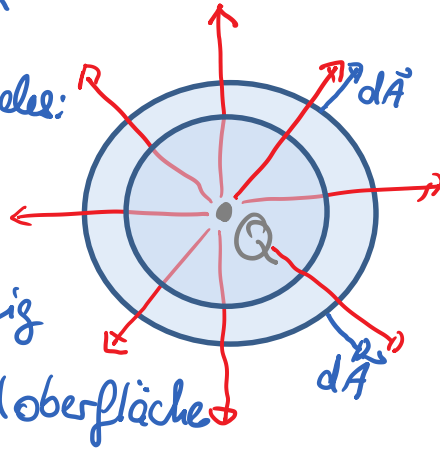
- Schreibweise: $\oint_{\text{geschlossene Fläche}} \dots d\vec{A}$ oder $\oint \dots d\vec{A}$
- dies gilt für jedes E-Feld und jede geschlossene Fläche
- Gauß'sches Gesetz: Teil der Maxwell-Gleichungen zur Beschreibung des Elektromagnetismus
- Begründung aus den Anwendungen
 ↳ Berechnung von E-Feldern mit Gauß'schem Gesetz

Gauß'sches Gesetz: Berechnung von E -Feld

a) Punktladung Q

Symmetrie des E -Feldes:

- radial
- in alle Richtungen gleich
- nur von r abhängig



↳ Wahl einer Kugeloberfläche

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \oint E \cdot dA && \text{da } \vec{E} \parallel d\vec{A} \\ &= E(r) \oint dA && \text{da } E(r) \text{ auf} \\ &= E(r) \cdot 4\pi r^2 && \text{Kugeloberfläche} \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} && \text{da Kugeloberfläche} \\ &&& \text{Gauß'sches Gesetz}\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

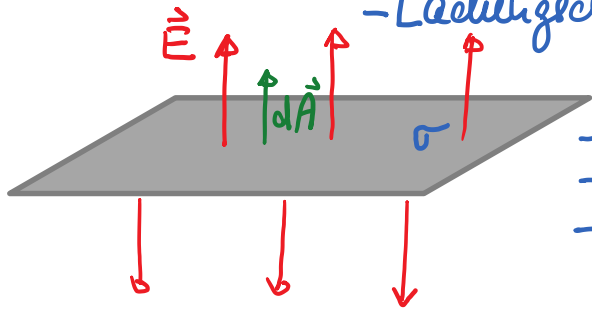
• Übereinstimmung mit Coulomb-Gesetz

Anmerkung: $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2}$

Faktor erscheint willkürlich!

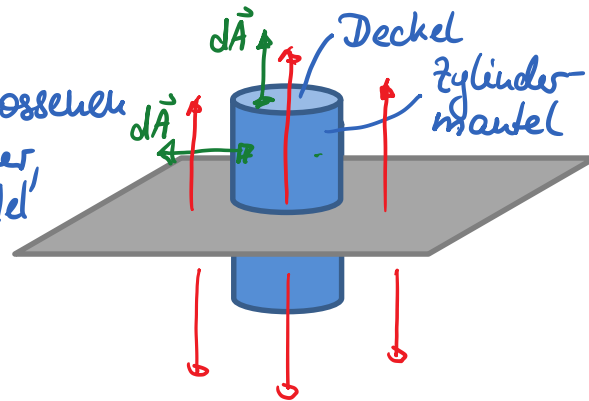
↳ dafür ist Gauß'sches Gesetz ohne 4π
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

b) E-Feld einer unendlichen, homogen geladenen Fläche
 -Ladungsdichte $\sigma = \frac{Q}{A}$



Symmetrie:
 $\rightarrow \vec{E} \perp \text{Ebene}$
 $\rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{A}$
 $\rightarrow E$ überall gleich

Wahl der geschlossenen Fläche: Zylinder, mit Deckel parallel zur Ebene



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\text{Zylinder}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\int_{\text{Deckel oben}} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{gleich}} + \underbrace{\int_{\text{Deckel unten}} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{gleich}} + \underbrace{\int_{\text{Mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{=0}$$

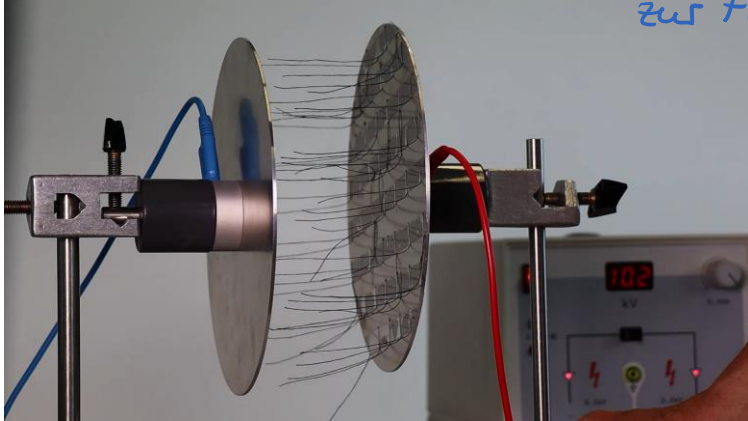
$$= 2E \cdot A_{\text{Deckel}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

für oben + unten

$$\hookrightarrow E = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A_{\text{Deckel}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

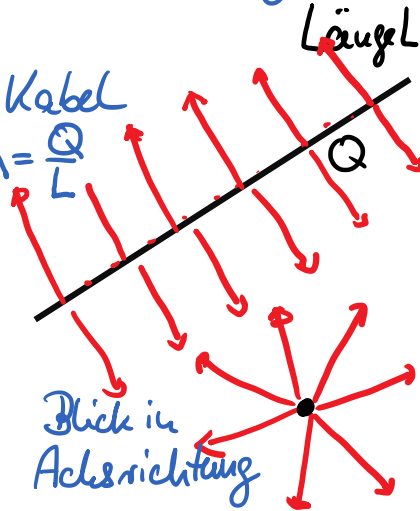
- gleiches Resultat wie durch Integration des E-Feldes über alle Ladungen
- hier: Berechnung setzt nur Gauß'sches Gesetz und Symmetrie voraus.

Darstellung von Feldlinien durch Fäden
◦ Ebene Fläche: E-Feld homogen & \perp
zur Fläche

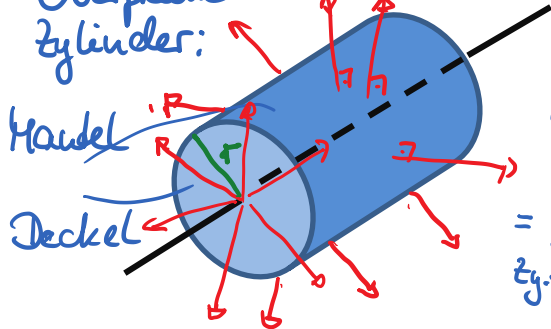


c) E-Feld einer unendlich langen Linienladung

- entspricht geladenem Kabel
- Linienladungsdichte $\lambda = \frac{Q}{L}$
- Zylindersymmetrie:
E-Feld muß radial
verlaufen, $\vec{E} \perp \text{Leiter}$



Oberfläche als
Zylinder:



$$\begin{aligned} \hookrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ &= \int_{\text{zy-Deckel}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{zy-Mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Deckel: } \vec{E} \perp d\vec{A} &\rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \\ \text{Mantel } \vec{E} \parallel d\vec{A} \end{aligned}$$

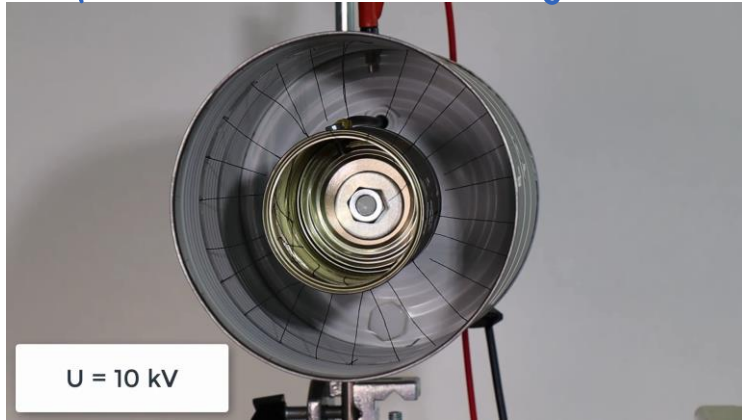
$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{Q}{\epsilon_0} &= \int_{\text{zy-Mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{zy-Mantel}} E \cdot dA = E(r) \int_{\text{zy-Mantel}} dA \\ &= E(r) \cdot 2\pi r \cdot L \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{Q}{L}$$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \lambda$$

- das E-Feld nimmt in dieser Geometrie mit $E \sim \frac{1}{r}$ ab und nicht mit $\frac{1}{r^2}$
→ Zylinderkondensator

- Zylindergeometrie: radial symmetrisch
experimentelle Darstellung durch Fäden



↳
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

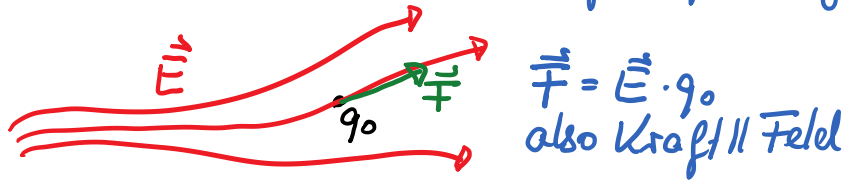
- Gauß'sche Gesetz ermöglicht die Berechnung von E -Feldern für einfache Symmetrien

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

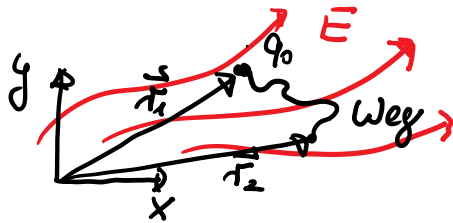
5. Das elektrische Potential
und Spannung

- Elektrisches Feld \vec{E} \rightarrow Kraft auf Ladung



\hookrightarrow Änderung der Lage von q_0 : Arbeit wird verrichtet als Änderung der potentiellen Energie

$$\Delta E_{\text{pot}} = - \int_{r_1}^{r_2} q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



Arbeit „gegen“ \vec{E} \rightarrow E_{pot} wird größer

oder

$$dE_{\text{pot}} = - q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Die Änderung der potentiellen Energie pro Ladungseinheit q_0 heißt

Potentialdifferenz $\Delta\varphi = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{q_0} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$
 $\Delta\varphi$ wird als Spannung U bezeichnet.

$$U = \Delta\varphi = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{q_0}$$

$$\text{Einheit } [\Delta\varphi] = [U] = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \text{V (Volt)}$$

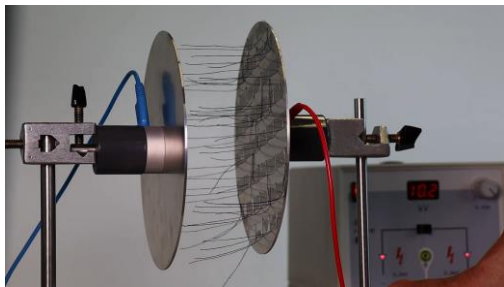
- nur Differenzen $\Delta\varphi$ sind von Bedeutung
 \hookrightarrow Spannungsmessung benötigt Referenz.
- Einheit des elektrischen Feldes ist

$$[E] = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

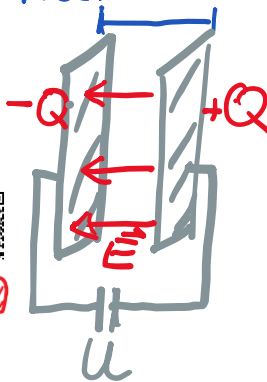
(Schreibweise: Potential oder Potential)

Beispiel: parallele Platten

• homogenes \vec{E} -Feld



Abstand d



Ladung Q :

$$\hookrightarrow U = \Delta\varphi = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot d$$

homogen: $E = \text{const.}$

$$\text{also: } E = \frac{U}{d}$$

Hier: $U = 10 \text{ kV}$: für $d = 10 \text{ cm}$

$$\hookrightarrow E = \frac{U}{d} = \frac{10^4 \text{ V}}{10^{-1} \text{ m}} = 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

• Bewegung von einem Elektron $q = -e$

$$\hookrightarrow \Delta E_{\text{pot}} = -e \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -e \cdot U$$

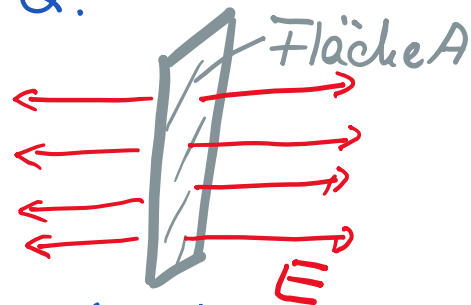
in Volt
Ladung Elektron

$$\hookrightarrow \text{Einheit der Energie } [\Delta E_{\text{pot}}] = 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

• einzelne Platte mit Q :

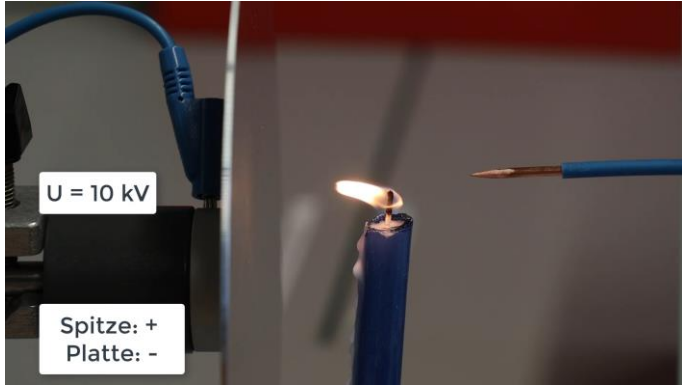
$$E = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A}$$

(siehe Kap. 3 & 4)



\hookrightarrow keine Aussage über $U = \Delta\varphi$ möglich, wenn keine Referenz gegeben!

Beispiel: Ionenwind in Kerze
 $U = 10 \text{ kV}$



$U \rightarrow$ Ionen werden beschleunigt \rightarrow Stoß mit Luft \rightarrow Wind
 q^+ & q^- werden in unterschiedliche Richtungen bewegt

Beispiel: Ein Proton p bewegt sich von der positiv geladenen Platte zur negativen: welche Geschwindigkeit hat es am Ende?
 es sei $v_0 = 0$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$q_p = +e$$

$$\hookrightarrow E_{\text{kin, Ende}} = |eU|$$

$$\frac{1}{2} m_p v^2 = |eU|$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_p}}$$

für $U = 12 \text{ V}$:

$$v_{12\text{V}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 12 \text{ V}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}}$$

$$= 4,8 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

für $U = 10 \text{ kV}$

$$v_{10\text{kV}} = 1,38 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1380 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

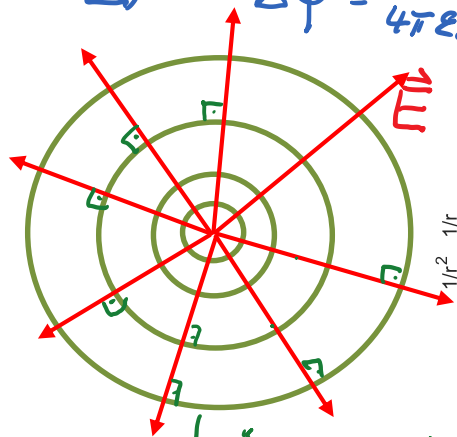
aber: Stöße im Gas \rightarrow Bewegungsenergie wird übertragen

Beispiel: Punktladung q

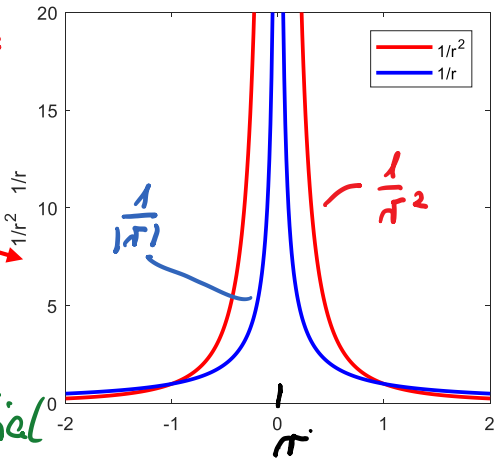
E-Feld: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Potential: $\Delta\varphi = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ ← Bezugspunkt in ∞
 \vec{r} ← im Punkt P
 $= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_0^{\infty}$

$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$

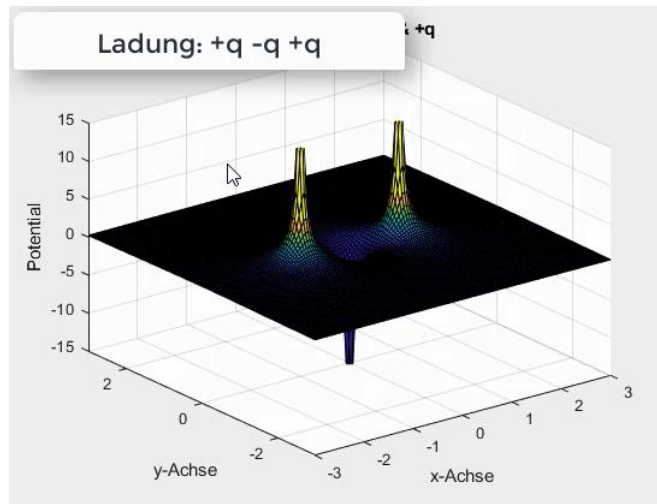


Äquipotential
-linien



- E-Feld: in Richtung abnehmenden Potentials
- Äquipotentiallinien: Punkte mit $\Delta\varphi = 0$
 $\square \vec{E}$

Darstellung von φ für 1, 2 oder 3 Ladungen



Beispiel: H-Atom

Proton p

Elektron e^-

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

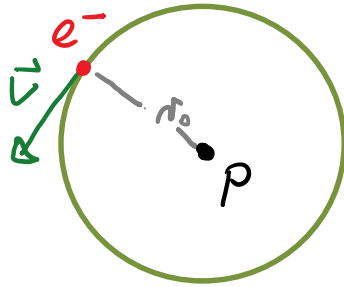
mittlere Abstand: $r_0 \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$$\text{Potential: } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_0}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \\ &= 27,2 \text{ V} \quad = \text{"Spannung" im H-Atom} \end{aligned}$$

Potenzielle Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= -e \varphi = -e \cdot 27,2 \text{ V} = -27,2 \text{ eV} \\ &= -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 27,2 \text{ V} = -4,35 \cdot 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$



atomare Einheit der Energie:

$$\text{Elektronenvolt: } 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

• auf der Kreisbahn: e^- besitzt auch kinetische Energie ($E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} E_{\text{pot}}$; Virial-Theorem)

↳ Bindungsenergie des H-Atoms

$$\begin{aligned} E_G &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} - \frac{1}{2} E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} E_{\text{pot}} \\ &= -13,6 \text{ eV} \end{aligned}$$

Darstellung von \vec{E} und φ :

• Ladungen $\pm q$

• $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$ $\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

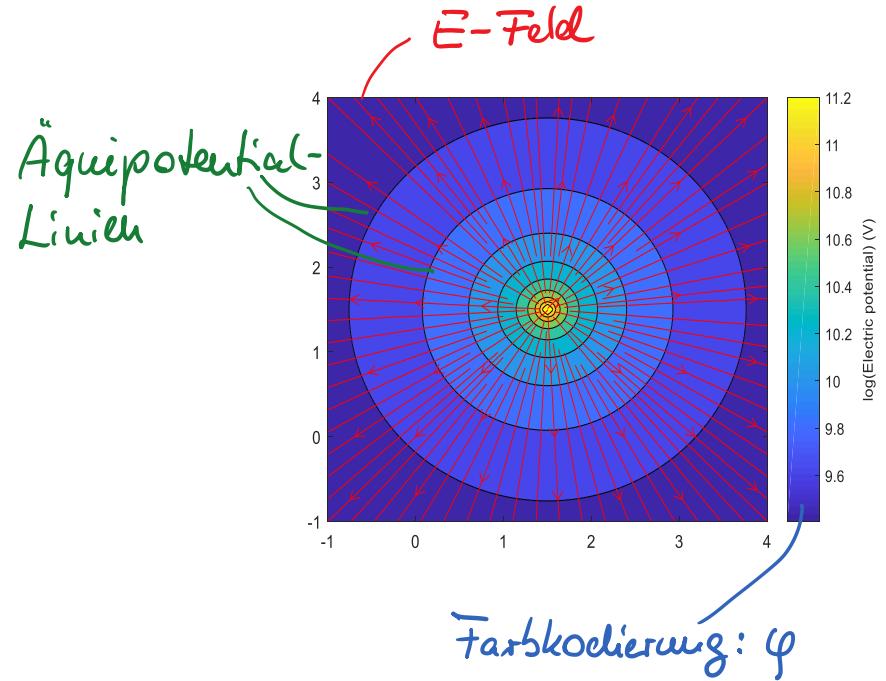
• $\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi, \frac{\partial}{\partial y} \varphi, \frac{\partial}{\partial z} \varphi \right)$

Ableitung in x, y oder z -Richtung
(partielle Ableitung)

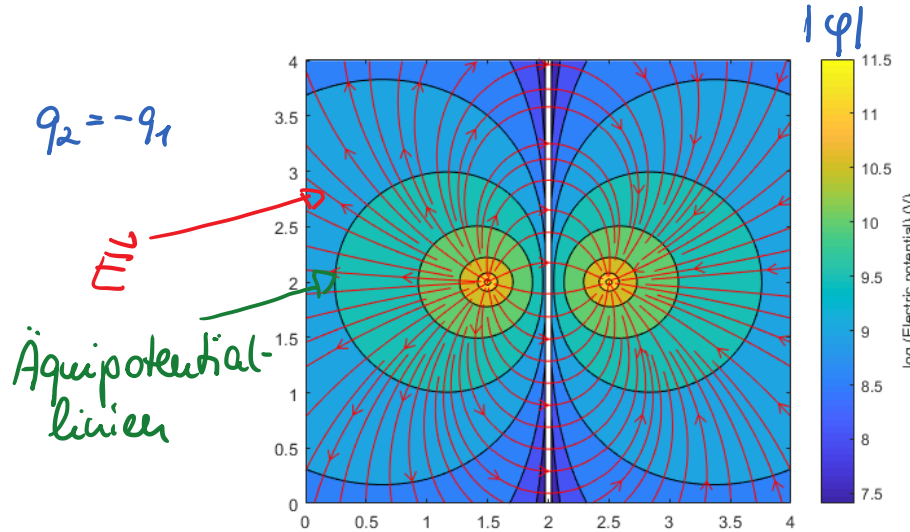
(\rightarrow Mathematik: Vektoranalysis;
 \rightarrow Ergänzung)

• hier numerische Lösung (in Matlab)

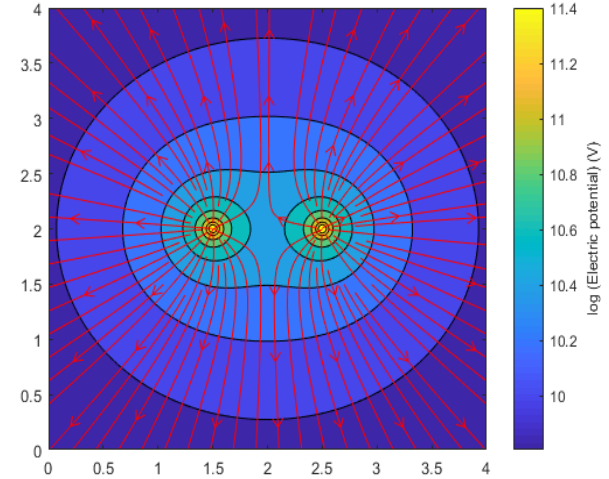
a) Ladung q in Position $(x,y)=(1,5;1,5)$



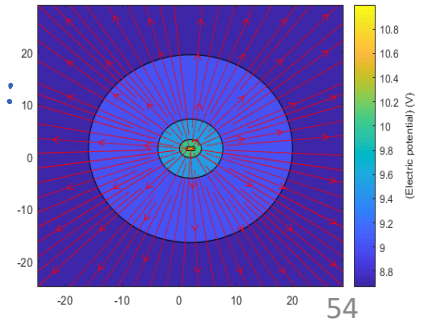
b) Ladung $+q$ & $-q$



c) Ladung $+q$ & $+q$



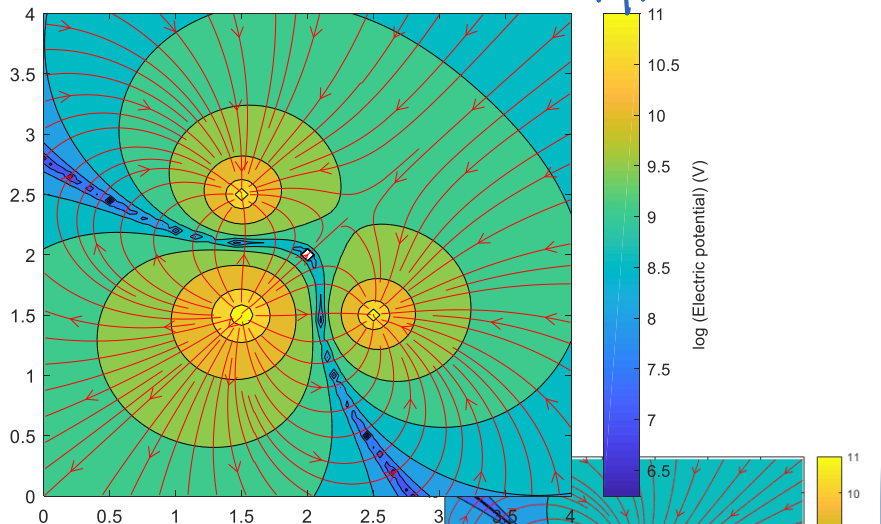
Darstellung für
große Entfernung:
näherungsweise
zentralsymmetrisch



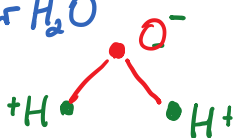
d) drei Ladungen:

$$q_3 = -\frac{1}{2}q_1$$

$$q_1 \quad q_2 = -\frac{1}{2}q_1$$



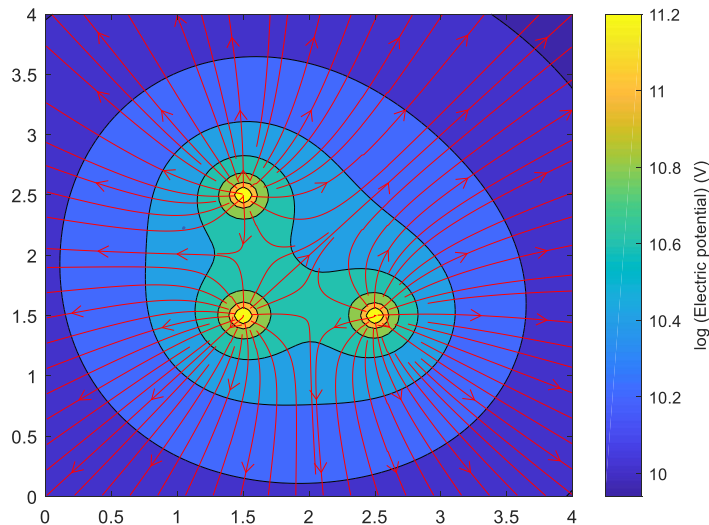
für große Entfernung:
Modell für H_2O



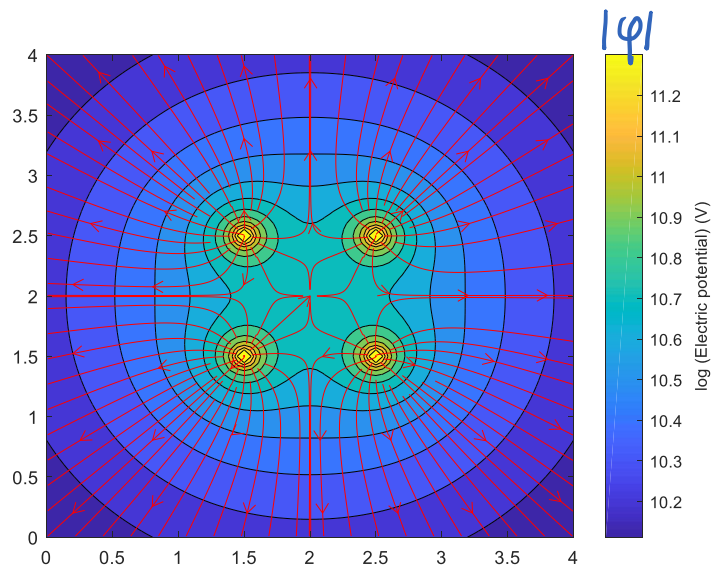
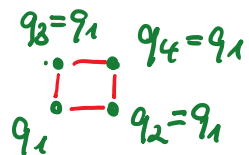
e) drei Ladungen:

$$q_3 = q_1$$

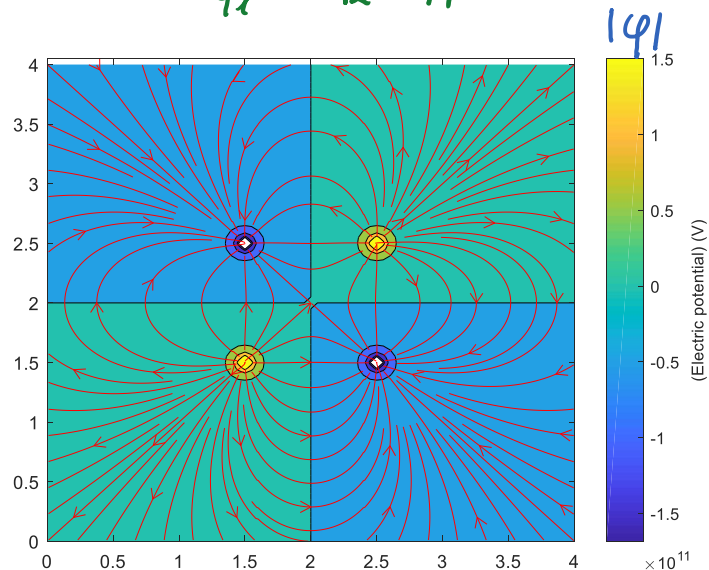
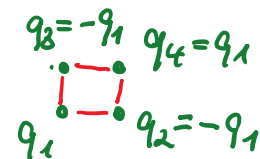
$$q_1 \quad q_2 = q_1$$



f) für 4 Ladungen

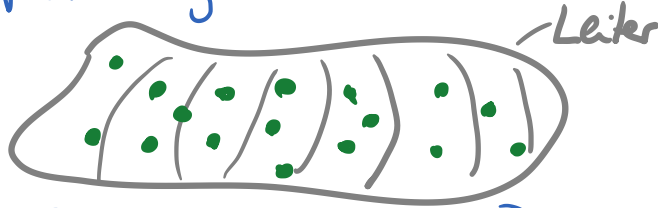


g) für vier Ladungen



• von einzelnen Ladungen zur Ladungsverteilung eines Leiters:

allgemein: Leiter/Metall mit frei beweglichen Ladungen \rightarrow Gleichgewicht \equiv keine Kraft auf Ladung \equiv kein \vec{E} -Feld



\hookrightarrow gleiches Potential auf Leiter!

$$\vec{E} = 0 \rightarrow U = \Delta\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

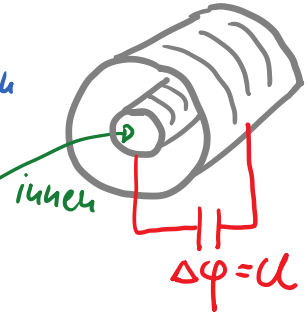
Leiter ist Äquipotentialfläche!

\rightarrow Faraday-Käfig:



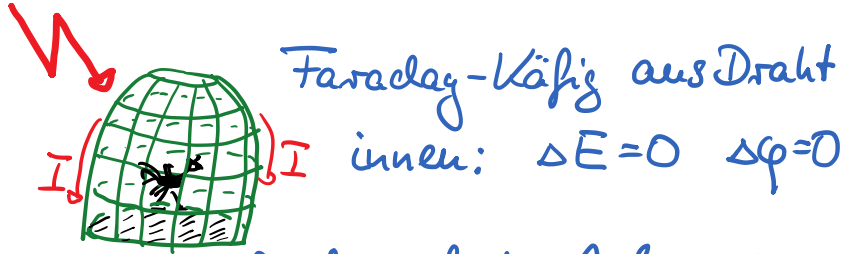
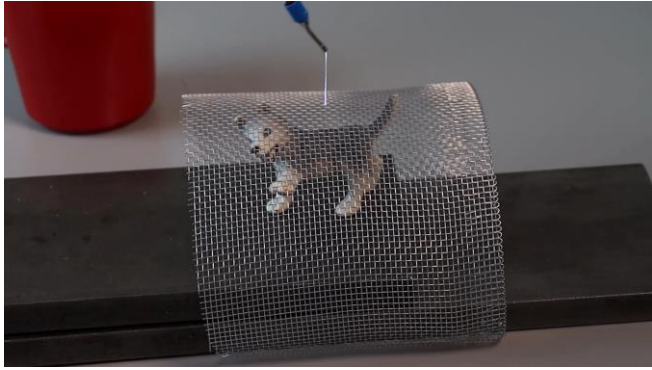
Leiter umschließt einen Ladungsfreien Raum

\hookrightarrow im inneren $\Delta\varphi = 0$
 $\vec{E} = 0$



\hookrightarrow das Innere eines Faraday-Käfigs ist feldfrei!

Blitz: hohe Potentialdifferenz
→ E-Feld → Ladung fließt in Luft



↳ Strom fließt auf der Außenseite
↳ kein Blitz dringt in den Faraday-Käfig ein

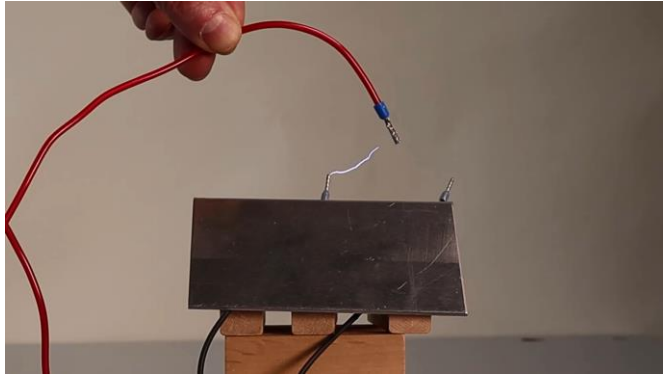
Blitz ≡ Entladung
.... schlägt eher in Spitzen ein



.... und kann geführt werden

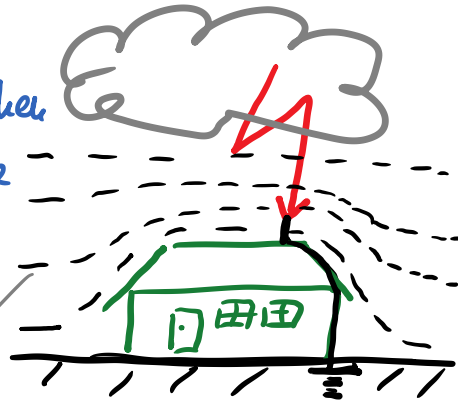


Blitz und Blitzableiter:



Potentialdifferenz zwischen Wolke und Haus/Erde

Blitzableiter: Spitze mit Erdung



Äquipotentiallinien

• Erdung: gesamter Blitzableiter hat gleiches Potential

→ Äquipotentiallinien liegen am Blitzableiter dicht zusammen

→ hohes E -Feld: $\Delta\varphi = \int \vec{E} d\vec{r}$

→ Blitz: Entladung über Blitzableiter

• im Blitz typisch: $E = 200000 \frac{V}{m}$

• elektrischer Überschlag (Funke) in Luft für $E \gtrsim 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$ abh. von Feuchtigkeit

• im H-Atom: $E \approx 5 \cdot 10^{11} \frac{V}{m}$

• in Fluoreszenzlampe $E \approx 10 \frac{V}{m}$

Blitzschlag in Spitzen:

Betrachtung von zwei leitenden Kugeln auf gleichem Potential:

$$U_1 = U_2$$

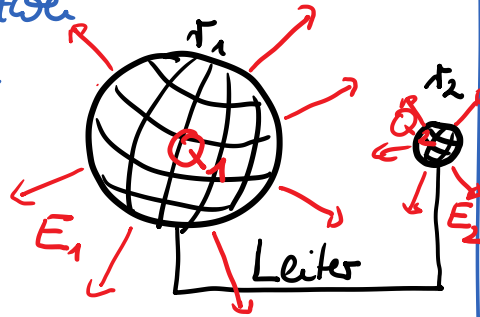
Kugelsymmetrie:

$$\hookrightarrow U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1} = U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r_2}$$

$$\hookrightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

mit den Ladungen Q_1 & Q_2 auf der Kugeloberfläche $4\pi r^2$

$$\text{Flächenladungsdichte } \sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}$$



$$\hookrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{r_1^2} / \frac{Q_2}{r_2^2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

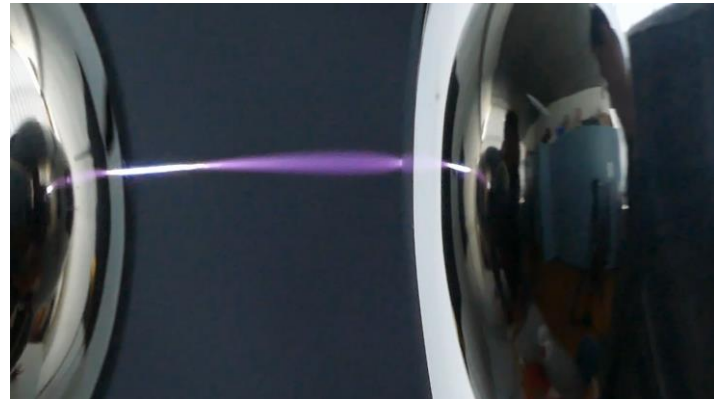
\hookrightarrow Kugel mit kleinem Radius = großes σ
= große Feldstärke E

\rightarrow an Spitzen eines Leiters bilden sich große Feldstärken aus \equiv Blitzableiter

van der Graaf-Generator:

Reibung \rightarrow Ladungstrennung $\rightarrow \vec{E}$ & $U = \Delta\varphi$

\hookrightarrow Blitz



Matlab-Script zur Darstellung von φ & \vec{E}

```
% Programm zur Darstellung von E-Feld und Äquipotentiallinien
clear all
clc
epsilon0= 8.854e-12 % in C^2/(Nm^2)
k = 1/(4*pi*epsilon0) ; % =8.987E9; % Coulomb's constant

p = [1.5,1.5; 2.5,1.5] % für zwei Ladungen ; 1.5, 2.5; 2.5, 2.5]; % Positionen der Ladungen
%p = [1.5,1.5; 2.5,1.5; 1.5, 2.5; 2.5, 2.5]; % für vier Ladungen
Q = [1; -1; ]; % Ladungen (+ oder - & Stärke)
% Q = [1; -1; -1 ; 1 ]; % für vier Ladungen
[X,Y] = meshgrid(-1:0.05:4); % Ändern der Werte für den Darstellungsbereich
%Create a grid of coordinates where V is to be calculated

V = zeros(size(X)); % Start with zero electric potential
for ii = 1:numel(Q) % Superpose the electric potential field of each charge
    V = V + k * Q(ii) ./ hypot(p(ii,1)-X, p(ii,2)-Y);
end
figure(1)
hContour = contourf(X,Y,V) % oder statt V real(log10(V)); für log-Darstellung
hColorbar = colorbar;
ylabel(hColorbar,'log (Electric potential) (V)')
[Ex,Ey] = gradient(V);
Ex = - Ex;
Ey = - Ey;
validColumns = all(isfinite(Ex) & isfinite(Ey)); % Ignore columns where E contains infinite values due to the point
charges since streamslice can't handle them
hold on
hLines = streamslice(X(:,validColumns),Y(:,validColumns),Ex(:,validColumns),Ey(:,validColumns));
set(hLines,'Color','r');
hold off
```

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

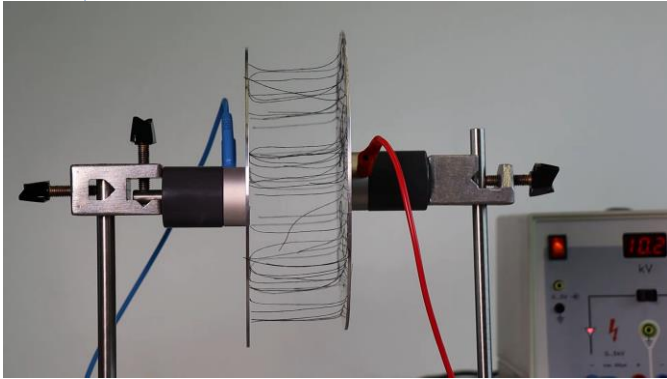
Prof. Dr. Matthias Kohl

6. Der Kondensator,
Dielektrika und
Energie des E -Feldes

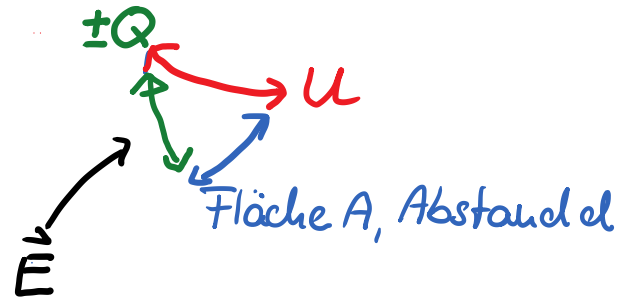
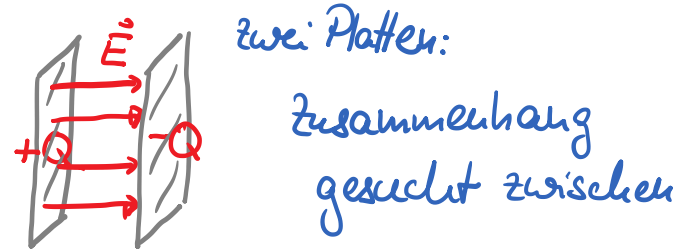
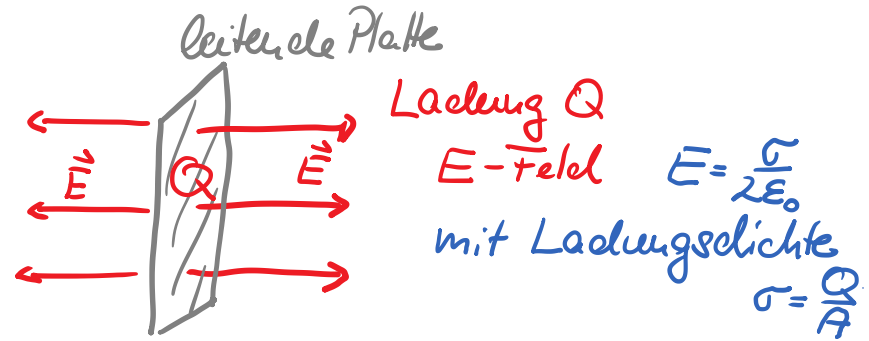
Kondensator: elektronisches Bauteil
zum Speichern von Ladung / Energie

Grundprinzip: Plattenkondensator

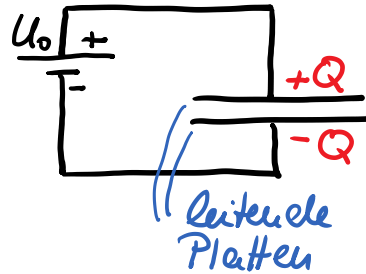
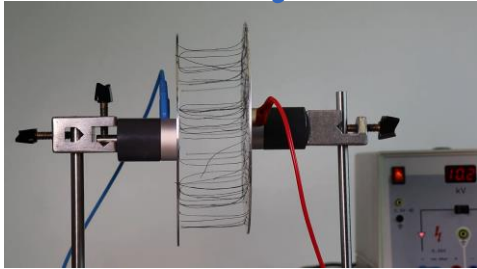
Experiment: zwei Metallplatten $U = 10 \text{ kV}$



- Flächen: Ausrichtung entlang \vec{E} -Feld
- Materie \rightarrow Einfluss auf E
- Metall zwischen Platten $\rightarrow E$ unverändert



Zwei leitende Platten werden an Spannungsquelle U_0 angeschlossen



Beobachtung:

- Ladung $\pm Q$ fließt auf Platten, abhängig von Polarität
 - Zwischen Platten besteht Spannung $U = U_0$
 - je höher die Spannung U_0 , um so mehr Ladung fließt auf Platten
- $$Q \sim U$$

$$\rightarrow Q = C \cdot U$$

mit der Kapazität C

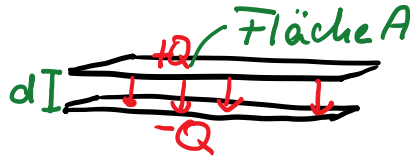
$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = 1 \frac{C}{V} \leftarrow \text{Coulomb}$$
$$= 1 \text{ F (Farad)}$$

$$\text{oder: } C = \frac{Q}{U}$$

- **Achtung:** „C“ für Kapazität und Einheit der Ladung
- die Kapazität C kann aus Messung der Ladung Q bei angelegter Spannung U bestimmt werden
- C ist abhängig vom Aufbau des Kondensators

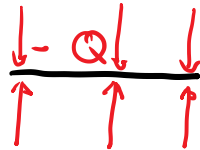
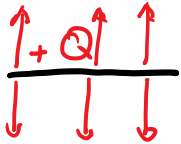
Idealisierter Plattenkondensator

- Platten parallel
- Abstand d klein



↳ E -Feld näherungsweise homogen zwischen den Platten und 0 außerhalb

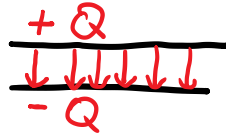
- E -Feld einer Platte: $E = \frac{|Q|}{A} \cdot \frac{1}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (siehe Kap. 3 & 4)



- zwei Platten

$$E = \sigma \cdot \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot 2$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



mit $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

- homogenes Feld $\rightarrow U = E \cdot d$

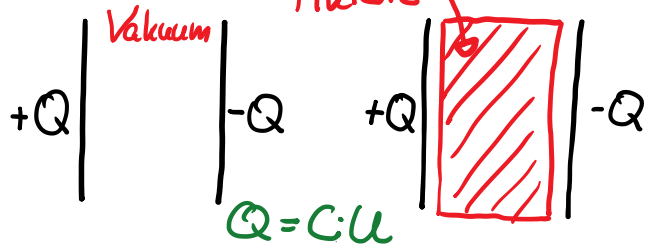
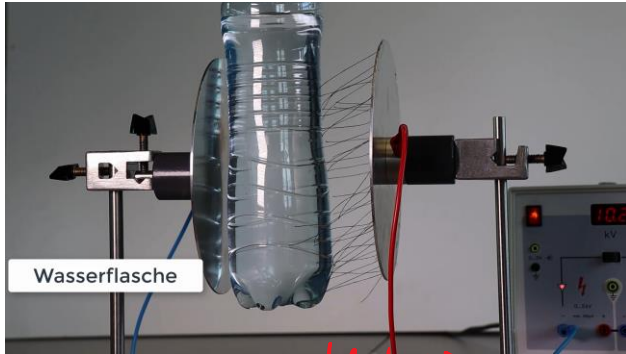
$$\text{↳ } U = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0}$$

damit wird die Kapazität eines Plattenkondensators

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$$

- $C \sim A$: je größer die Platten, um so mehr Ladung kann gespeichert werden
- $C \sim \frac{1}{d}$: für kleines d wirkt größere Anziehung zwischen $+Q$ und $-Q$ und daher kann mehr Ladung gehalten werden.

Kondensator und Dielektrika:



Plattenkondensator: mit Ladung $Q \rightarrow U = \frac{Q}{C}$

Beobachtung: das Einbringen eines Isolators (Dielektrikums) zwischen die Platten \rightarrow Spannung nimmt ab

Erklärung: da Q gleich bleibt, wenn keine äußere Stromquelle angeschlossen ist, und

$$C = \frac{Q}{U}$$

\rightarrow Kapazität C muß größer sein.

$$C = \epsilon \cdot C_{\text{Vakuum}} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Dielektrizitätskonstante ϵ
(auch Permittivität)

für Plattenkondensator

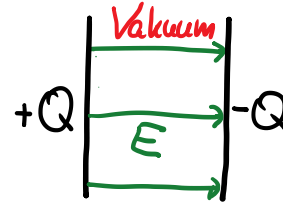
ϵ : Dimensionslos (Zahl)
Stoffkonstante

Dielektrizitätskonstante:

Stoff	ϵ	
Vakuum	1	Stoffkonstante
Luft	1,0006	
Glas	5-10	
Gummi	2-3	
Petroleum	2	
Wasser	81	

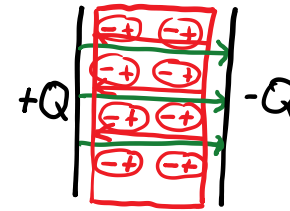
hoch!
 Wasser ist polar \equiv großes Dipolmoment

Erklärung der Wirkung von Dielektrika:



$$Q \rightarrow U = \frac{Q}{C}$$

$$\rightarrow E\text{-Feld } E = \frac{U}{d}$$



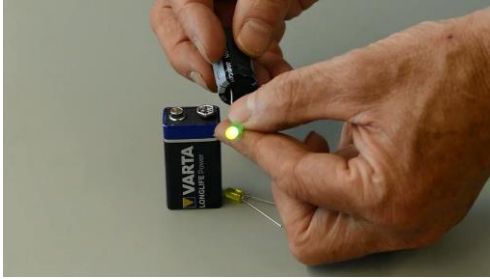
Dielektrikum: äußeres Feld
 \rightarrow Orientierungspolarisation
 Dipol in Materie
 \rightarrow E-Feld durch Dipole

— äußeres Feld des Kondensators
 — inneres Feld des Dielektrikums
 \rightarrow kleines Restfeld und daher
 kleine Spannung $U = \int \vec{E} d\vec{r}$

- wenn äußere Spannungsquelle angeschlossen:
 Ladung fließt nach, wenn Dielektrikum
 im Kondensator

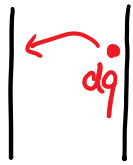
Energie eines Kondensators:

Beispiel: Batterie → Laden eines Kondensators

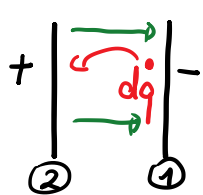


→ Entladen über LED → Licht Energie!

• Aufladen eines Kondensators durch Verschiebung von Ladung



ungeladener Kondensator,
keine Spannung
dq wird verschoben + | -



→ Spannung, E-Feld entsteht
→ weitere Ladung dq muß beim Verschieben Arbeit aufbringen

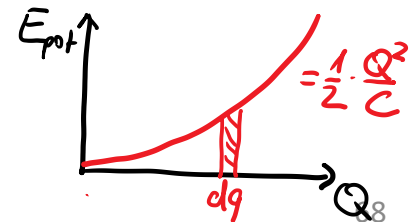
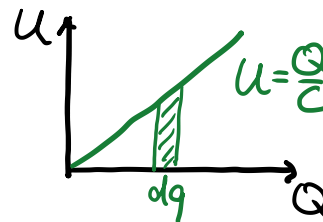
Arbeit: $dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E} \cdot dq \cdot d\vec{r}$
für Verschiebung von dq
 $= \left(\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \right) \cdot dq$
Ladung auf Kond.
 $= U \cdot dq = \frac{q}{C} \cdot dq$
Kapazität

Aufladen von 0 auf Q:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

diese Arbeit ist als potentielle Energie in der Ladung gespeichert. mit $C = \frac{Q}{U}$

$$E_{\text{pot}} = W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$



Zusammenhang zwischen potentieller Energie und E -Feld:

- Aufladen des Kondensators
 \rightarrow Aufbau von E -Feld

$$|E_{pot}| = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C U^2$$

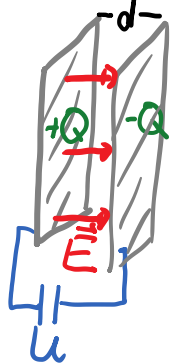
mit $U = E \cdot d$ (homogenes Feld)
 und $C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d}$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d} \cdot d^2 \cdot E^2 \quad \text{und } C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 A \cdot d \cdot E^2$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \cdot V \cdot E^2 \quad \text{mit Volumen } V = A \cdot d$$

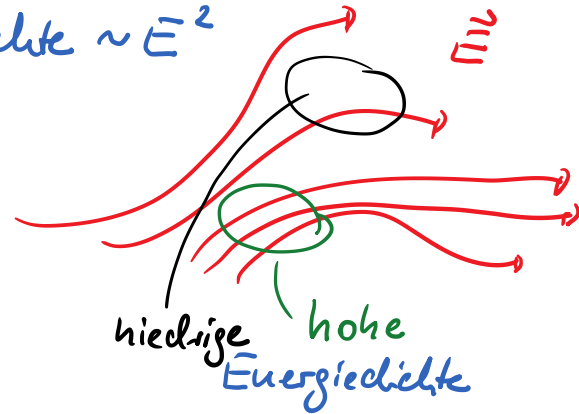
Energie $\sim E^2$!
 \sim Volumen, in dem das E -Feld ist



$$\hookrightarrow \text{Energiedichte} = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}}$$

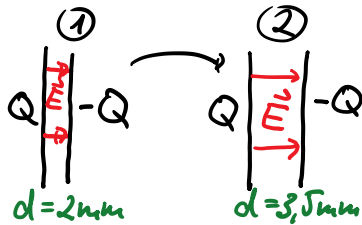
$$= \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2$$

- Energie ist im E -Feld gespeichert
- dieser Zusammenhang gilt allgemein für jedes E -Feld
- Energiedichte $\sim E^2$



Beispiel: Plattenkondensator ($C = 60 \mu\text{F}$) mit Spannung $U = 12\text{V}$.

- Plattenabstand wird von 2 auf 3,5 mm geändert.



a) Ladung auf Kondensator:

$$Q = C \cdot U = 60 \mu\text{F} \cdot 12\text{V} = 720 \mu\text{C}$$

... unabh. von Plattenabstand

b) gespeicherte Energie für $d = 2\text{mm}$:

$$E_{\text{pot},1} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} 60 \mu\text{F} \cdot (12\text{V})^2 = 4320 \mu\text{J}$$

$$= \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \cdot 720 \mu\text{C} \cdot 12\text{V} = 4320 \mu\text{J}$$

c) Änderung der Energie

• E-Feld bleibt gleich!

... für unendlich große Platten: E-Feld im gesamten Raum

$$E = \frac{U}{d} \rightarrow \frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2}$$

$$\rightarrow U_2 = \frac{d_2}{d_1} \cdot U_1$$

$$= \frac{3,5\text{mm}}{2\text{mm}} \cdot 12\text{V} = 21\text{V}$$

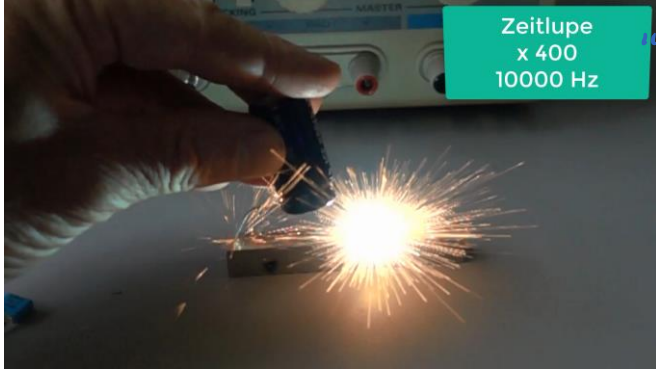
$$\text{Energie } E_{\text{pot},2} = \frac{1}{2} Q U_2 = \frac{1}{2} 720 \mu\text{C} \cdot 21 = 7560 \mu\text{J}$$

$$\hookrightarrow \Delta E_{\text{pot}} = 7560 \mu\text{J} - 4320 \mu\text{J} = 3240 \mu\text{J}$$

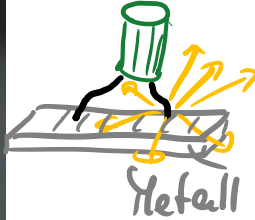
$$= \frac{1}{2} Q (U_2 - U_1) = \frac{1}{2} 720 \mu\text{C} \cdot (21\text{V} - 12\text{V})$$

Erklärung: die Ladungen ziehen sich an und beim Vergrößern des Abstandes muß gegen diese Kraft gearbeitet werden.

Beispiel: Entladung eines Kondensators
 $U = 30 \text{ V}$ $C = 4700 \mu\text{F}$



"Kurzschluss"



Energie $E_{\text{st}} = \frac{1}{2} C U^2$
 $= \frac{1}{2} 4700 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot (30 \text{ V})^2 = 2,1 \text{ J}$

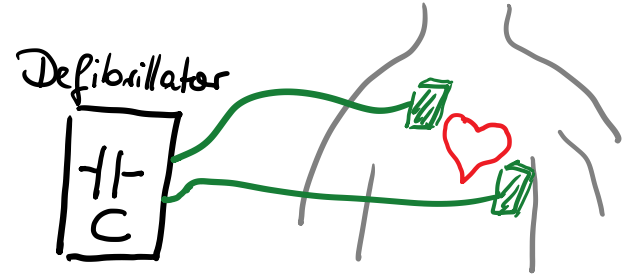
Vergleich: 1 kg Öl enthält die Energie
 $12 \text{ kWh} = 12 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot 3600 \text{ s} = 4,2 \cdot 10^6 \text{ J}$

↳ Energie dieses Kondensators entspricht
 $\sim \frac{2,1}{4,2 \cdot 10^6} \text{ kg Öl} = 0,5 \text{ mg Öl}$

↳ Kondensator eignet sich nicht als

Energiespeicher

Anwendung: Herz-Lungen-Wiederbelebung
 • kardiopulmonale Reanimation

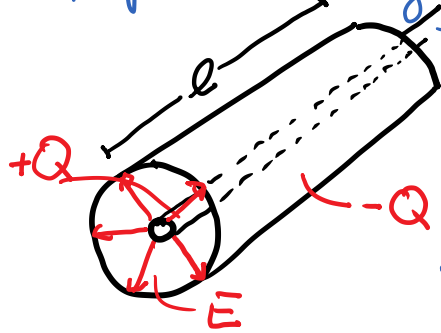


Kondensator:

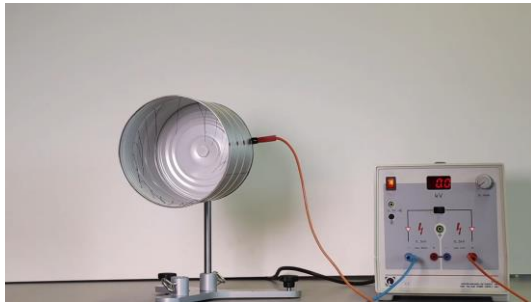
Energie: 200 - 300 J
 $U \approx 4 \text{ kV}$, Dauer: 2 - 4 ms
 $C = 50 - 500 \mu\text{F}$
 $R = 50 - 100 \Omega$
 $I \sim 50 \text{ A}$

Idealisierte Zylinderkondensator:

- Aufbau: langer Draht („Seele“): +Q
- Abschirmung: -Q



- Zylindersymmetrie
... $\vec{E} \perp \text{Draht}$



E-Feld: $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}$ Linienladungsdichte $\lambda = Q/l$

$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{l} \cdot \frac{1}{r}$ (siehe Gauß'sches Gesetz)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow U = \Delta\varphi &= -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} && a - \text{Radius Seele} \\ & && b - \text{Radius Abschirm.} \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{l} \int_a^b \frac{1}{r} dr && \vec{E} \parallel \vec{r} \\ &= +\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{l} \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

→ Kapazität $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$

Beispiel und Anwendung:

Draht mit Abschirmung (Koaxialkabel)
→ Kapazität C, abh. von Länge

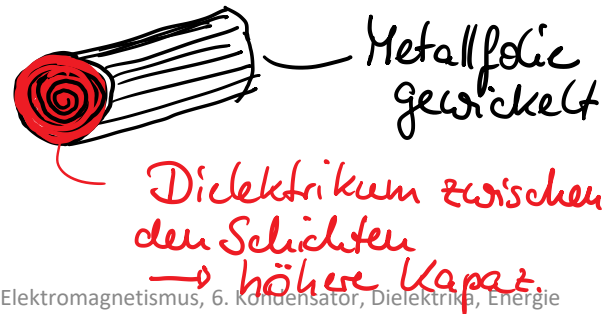
für $l = 1\text{m}$, $a = 0,5\text{mm}$, $b = 1,5\text{mm}$

$$C = \frac{2\pi \cdot 1\text{m} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2 \text{N}}{\text{m}^2}}{\left| \ln\left(\frac{1}{3}\right) \right|} = 5 \cdot 10^{-11} \text{F} = 50 \text{pF}$$

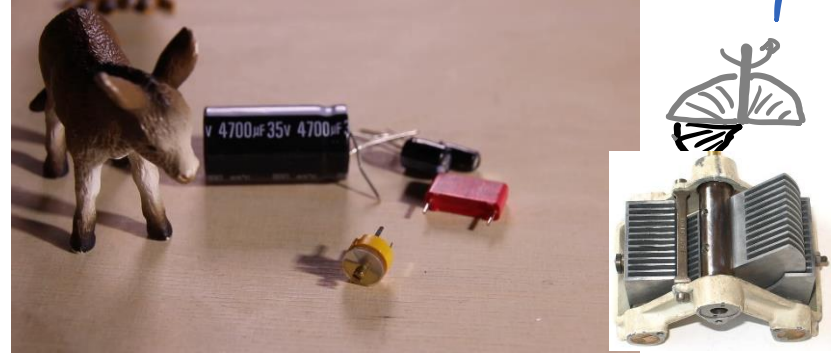
Elektronische Schaltungen: 
- Elektrolytkondensatoren



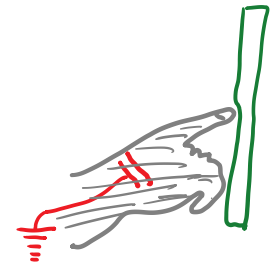
<https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrolytkondensator>



- Drehkondensator
Prinzip: Änderung der relativen Lage von Kondensatorplatten



Anwendung: kapazitiver Touchscreen



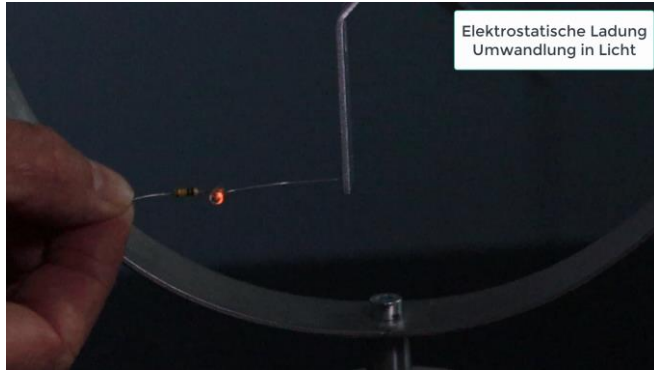
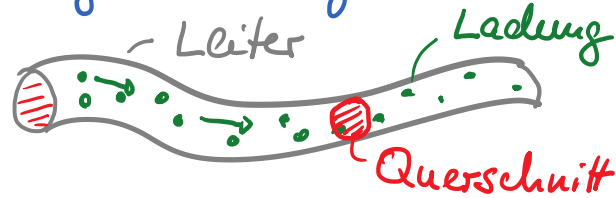
Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

7. Der elektrische Strom
und Widerstand

bisher: Elektrostatik, d.h. Ladung
in Ruhe

jetzt: bewegte Ladung



- Ladung durch Reibung
- ... Glimmlampe
- ↳ bewegte Ladung → Licht

Definition: die Stromstärke I ist die Ladung, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche tritt.

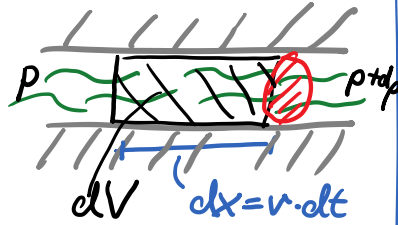
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Einheit $[I] = 1 \frac{C}{s} = 1A$ (Ampere)

• Konvention: positive Ladung = positiver Strom

Vergleich mit Flüssigkeit

- Volumenstrom $= \frac{dV}{dt}$
- Massenstrom $= \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt}$



Geschwindigkeit

Fluß, wenn Druck p unterschiedlich

Volumen- bzw. Massenstrom abhängig von

- Druck
- Querschnitt
- Zähigkeit, Fließwiderstand

Elektrischer Strom:

- wie viel Ladung fließt?
- welche Ladung?
- mit welcher Geschwindigkeit?
- Einfluß des Leiters?

Elektrischer Strom in einem Kabel: Geschwindigkeit der Ladung

- Leiter mit Querschnitt A
- einzelne Ladung q
- Dichte der Ladungsträger n

$$n = \frac{\text{Anzahl}}{\text{Volumen}}$$

- Driftgeschwindigkeit v_d

- in Zeit Δt fließt die Ladung ΔQ , die im Volumen $\Delta V = v_d \cdot \Delta t \cdot A$ ist:

$$\Delta Q = q \cdot n \cdot A \cdot v_d \cdot \Delta t$$

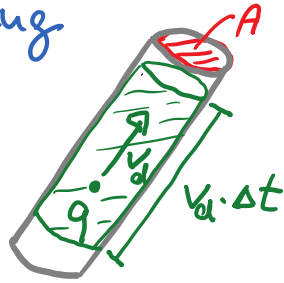
$$\hookrightarrow \text{Strom } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q \cdot n \cdot A \cdot v_d$$

Ladungseinheit

Dichte der Ladungsträger

Fläche

Driftgeschwindigkeit



- für Kupferkabel mit Radius $= 0,815 \text{ mm}$
- ein Leitungselektron pro Atom: $q = -e$
- Dichte Kupfer $\rho = 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
- molare Masse $= 63,5 \text{ g/mol}$

$$\hookrightarrow \text{Ladungsdichte } n = \frac{\text{Anzahl der Ladungen}}{\text{Volumen}}$$

$$n = \rho \cdot \frac{\text{Anzahl d. Ladungen}}{M} \quad \text{mit } \rho = \frac{M}{V} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$$

$$= \rho \cdot \frac{\text{Anzahl d. Ladungen/mol}}{\text{Masse/mol}}$$

$$= 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot \frac{6,023 \cdot 10^{23} / \text{mol}}{63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}$$

$$= 8,47 \cdot 10^{28} \frac{\text{Atome}}{\text{m}^3}$$

$$\hookrightarrow v_d = \frac{I}{A \cdot n \cdot q} \quad \text{für } I = 1 \text{ A}$$

$$= \frac{1 \text{ C/s}}{\pi (0,815 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot 8,47 \cdot 10^{28} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

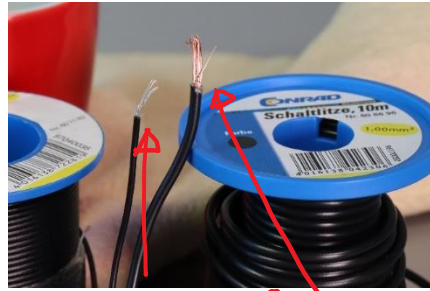
$$= 3,54 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,0354 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$



$$v_d = \frac{I}{A \cdot n \cdot e}$$

$$\rightarrow v_d \sim \frac{I}{A}$$

$$\text{Kupfer, } v_d \sim \frac{1}{A}$$



$A=0,14\text{mm}^2$ $A=1\text{mm}^2$

A / mm^2	I / A	$v_d / \text{mm/s}$
$0,815$	1	$0,035$
	10	$0,35$
$0,14\text{mm}^2$	1	$0,20$
	10	$2,0$

Driftgeschwindigkeit der Elektronen ist sehr klein ☹

- für übliche Ströme im Haushalt
 - $v_d \approx 1\text{mm/s}$

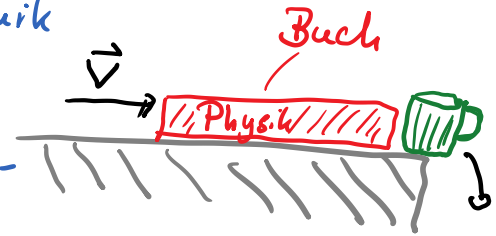
- Wirkung ist schnell, da sich die Ladungen beeinflussen



- ↳ Lichtschalter anschalten
 - Lampe brennt „sofort“

Analogie: Mechanik

Wirkung hat hohe Ausbreitungsgeschwindigkeit



Elektrostatik: auf einem Leiter besteht keine Potentialdifferenz / Spannung

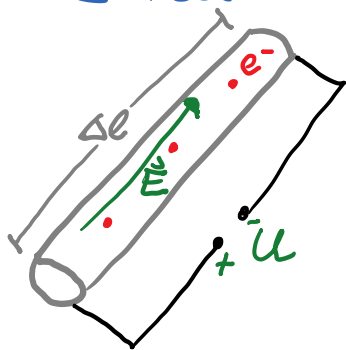
Elektr. Strom: Ladungen (e^-) bewegen sich \leftrightarrow Kraft auf $e^- \leftrightarrow \vec{E}$ -Feld

$$\leftrightarrow \Delta\varphi = U$$

$$\Delta\varphi = - \int_{\text{Leiter}} \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

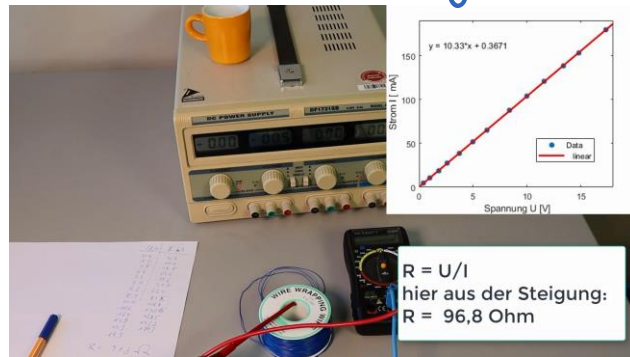
wenn E unabh. vom Ort

$$\Delta\varphi = U = - E \cdot \Delta l$$



Beobachtung: je größer die angelegte Spannung ist, um so größer ist der Strom

Experiment: Kabel mit Querschnitt $A = 0,14 \text{ mm}^2$
 • angelegte Spannung U
 \hookrightarrow Messung des Stroms I



$R = U/I$
 hier aus der Steigung:
 $R = 96,8 \text{ Ohm}$

Messung ergibt:

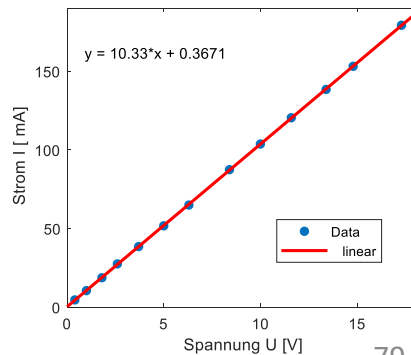
$$U \sim I$$

↑
 Proportionalität

$$U = R \cdot I$$

mit Widerstand R

Kennlinie



↳ Ohm'sches Gesetz:

in einem elektrischen Leiter gilt

$$U = R \cdot I \text{ mit dem}$$

Widerstand R , $[R] = 1 \frac{V}{A} = 1 \Omega = 1 \text{ Ohm}$

oder $I = G \cdot U$ mit dem Leitwert $G = \frac{1}{R}$

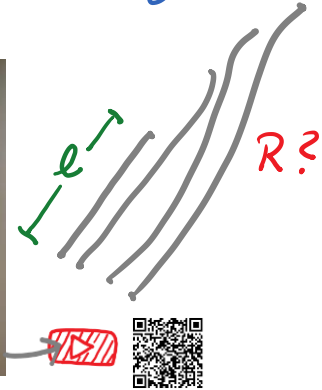
$$\text{oder } R = \frac{U}{I}$$

Ohm'sches Gesetz ist

- empirisch
- kein "Naturgesetz"
- abhängig von Material, Temp.,
Form des Leiters etc.

Experiment: Messung von R als Funktion
der Länge

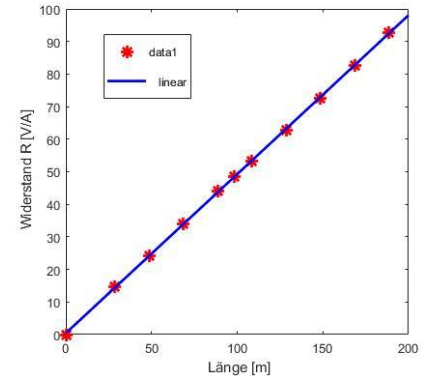
Kabel: $A = 0,14 \text{ mm}^2$



Beobachtung: $R \sim l$

hier für dieses Kabel
aus der Steigung

$$\rightarrow \frac{R}{l} = 0,49 \Omega/m$$



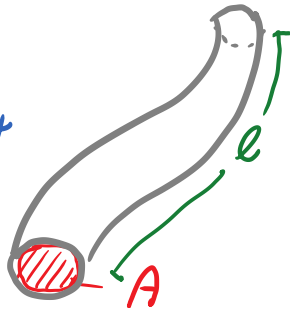
↳ aus ähnlichen Messungen kann für alle Leiter gefunden werden, daß

- $R \sim l$ Länge
- $R \sim \frac{1}{A}$ Querschnitt

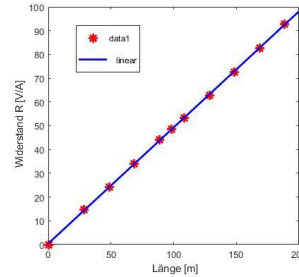
$$\hookrightarrow R = \rho \frac{l}{A}$$

↑ spezifischer Widerstand ρ

ρ : Stoffkonstante, abhängig vom Material aber auch von Temperatur T



aus Messung von R in Abh. von l :



$$\frac{R}{l} = 0,49 \Omega/\text{m} \quad \text{für } A = 0,14 \text{ mm}^2$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow R_{\text{Kabel}} &= \frac{R}{l} \cdot A \\ &= 0,49 \Omega/\text{m} \cdot 0,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \\ &= 6,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \end{aligned}$$

• wenn in diesem Kabel der Länge $l = 100 \text{ m}$ ein Strom $I = 1 \text{ A}$ fließt, wie groß ist die Spannung und das elektr. Feld?

$$\begin{aligned} \rightarrow R &= \frac{U}{I} \quad \rightarrow U = R \cdot I \\ &= 0,49 \Omega/\text{m} \cdot 100 \text{ m} \cdot 1 \text{ A} \\ &= 49 \text{ V} \end{aligned}$$

→ E sei homogen

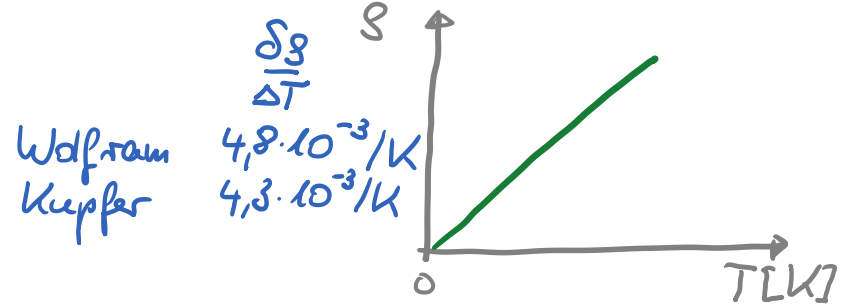
$$\hookrightarrow E = \frac{U}{l} = 0,49 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Literaturwerte von ρ :

Stoff	ρ [$\Omega \cdot m$] $T=20^\circ C$	
Silber	$1,6 \cdot 10^{-8}$	}
Kupfer	$1,7 \cdot 10^{-8}$	
Kohlenstoff	$3500 \cdot 10^{-8}$	} Isolatoren
Glas	$10^{10} - 10^{14}$	
Gummi	$10^{13} - 10^{16}$	

- ρ klein für Metalle mit freien Elektronen
- ρ groß für Nichtleiter / Isolatoren

• ρ und damit R sind Temperaturabhängig



↳ elektr. Schaltungen mit Widerständen werden durch Temp. beeinflusst
 → „Rauschen“ in Verstärkern, Radio

Energie und Leistung des elektrischen Stromes:

- E-Feld im Leiter
 - Beschleunigung der Ladung
 - Stöße mit Atomen des Leiters

- Ladung Δq wird bewegt:
pot. Energie = Arbeit ΔW

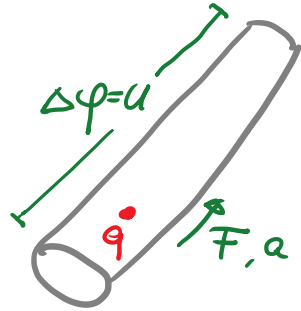
$$E_{\text{pot}} = |\Delta W| \\ = \Delta q \cdot U$$

- elektrische Leistung

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta q \cdot U}{\Delta t} = I \cdot U$$

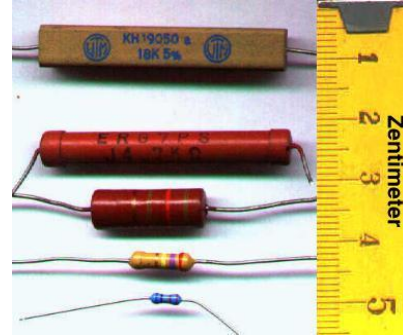
$$\text{mit } R = \frac{U}{I}$$

$$P = I \cdot U = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2$$



Bauformen von Widerständen:

Beispiele



Beispiel: Wasserkocher

Messung des Widerstands: $29,8 \Omega$
nach dem Kochen

↳ Leistung

$$P = \frac{U^2}{R} \\ = \frac{(230V)^2}{29,8 \Omega} \\ = 1775 W$$



Angabe des Herstellers: $P = 1800 W$

im kalten Zustand ($T = 20^\circ C$):

$$R = 31,8 \Omega$$

T-Abhängigkeit

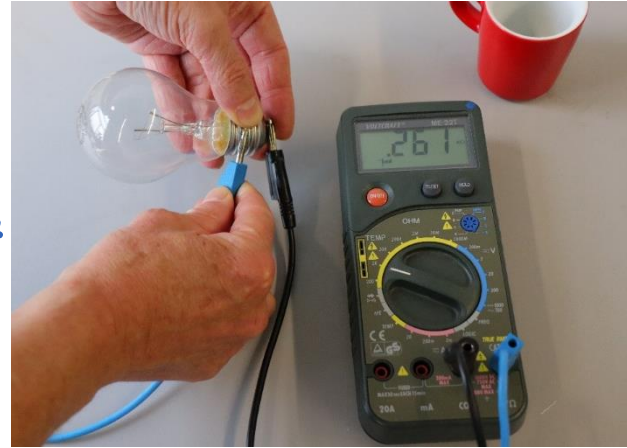


Beispiel: Glühbirne $P = 15 W$

allgemein: $P = U \cdot I = U^2 / R$ $R = \frac{U}{I}$

für $U = 220 V$
und $P = 15 W$

$$\begin{aligned} \text{↳ } R &= \frac{U^2}{P} \\ &= \frac{(230V)^2}{15W} \\ &\approx 3500 \Omega \end{aligned}$$

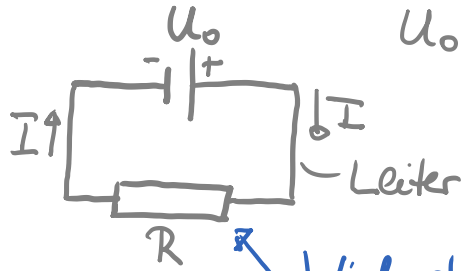


gemessen wird aber $R = 261 \Omega$ (ohne Strom)

Erklärung: ohne Strom \rightarrow Temperatur $T \approx 20^\circ C$
 \rightarrow mit Strom steigt T auf ca. $1500 - 2000^\circ C$

und damit $R \approx 4,5 \cdot 10^{-3} / K$

Schaltskizze:

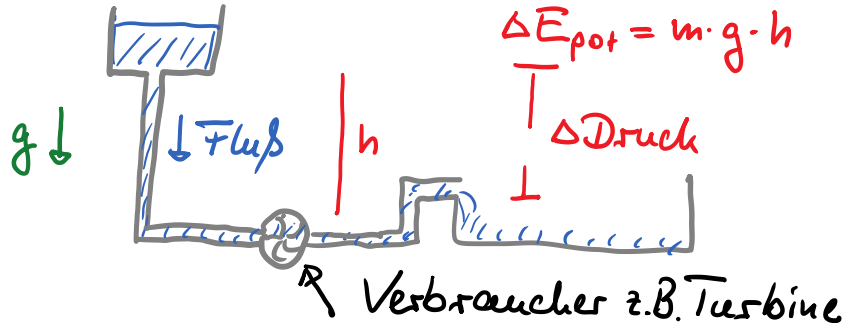


U_0 : Versorgungsspannung

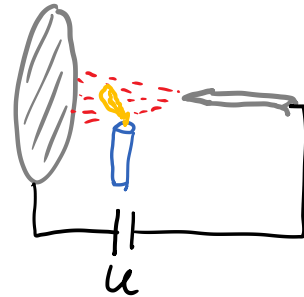
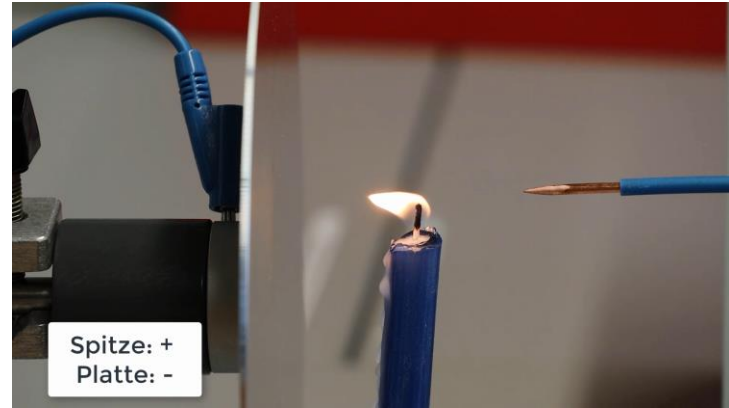
Widerstand ist „Verbraucher“

$$P = I \cdot U = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2$$

Vergleich mit Wasser



Beispiel: Elektrischer Strom in Luft



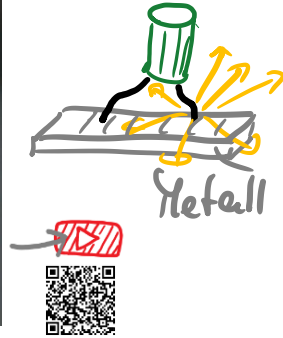
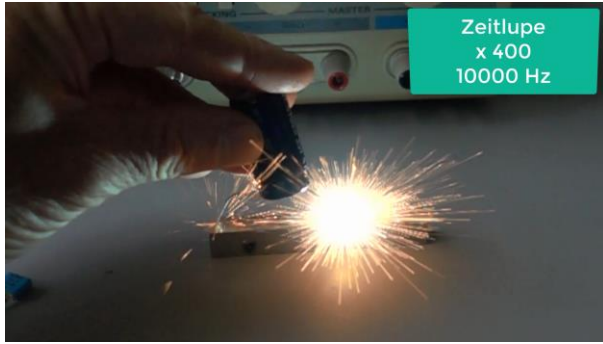
Ladung (e^- , Ionen des Gases) strömen zwischen Platte und Spitze
→ Stöße
→ Gasbewegung

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

8. Kirchhoff'sche Regeln,
Schaltkreise mit Widerstand
und Kondensator

Entladung eines Kondensators: „Kurzschluss“



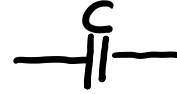
Wovon hängt der Entlade- und Auflade-Prozess eines Kondensators ab?

- Zeitverhalten?
- Energie?

Schaltkreise mit



Widerstand $R = \frac{U}{I}$



Kondensator / Kapazität
 $C = \frac{Q}{U}$

- Parallel- und Reihenschaltung
- nur R, nur C
- Kombination von R & C
- Kirchhoff'sche Regeln

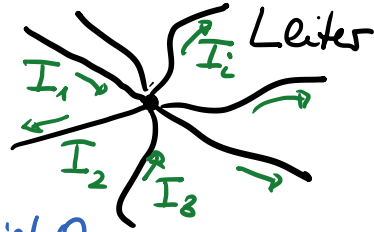
gesucht: Spannung U
und Strom $I = \frac{dQ}{dt}$

↳ Elektrotechnik

Kirchhoff'sche Regeln für elektronische Schaltungen

1. Kirchhoff'sche Regel: Knotenregel

die Summe aller
Ströme, die zu einem
Leiterknoten hin und
von ihm weg fließen,
ist 0.



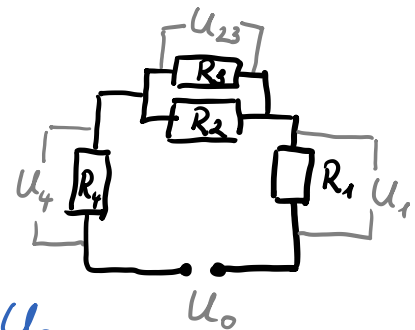
$$\sum_i I_i = 0$$

• Ausdruck der Ladungserhaltung

2. Kirchhoff'sche Regel: Maschenregel

beim Umlauf einer geschlossenen
Leiterschleife ist die Gesamtspannung
= Null

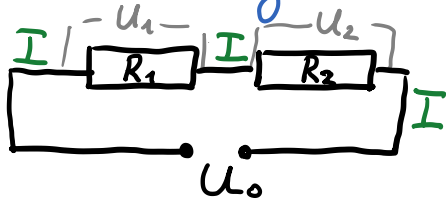
$$\sum_i U_i = 0$$



• Quellspannung U_0
= Summe aller Spannungsabfälle
(Betrag)

Zusammenschalten von Widerständen:

a) Reihenschaltungen



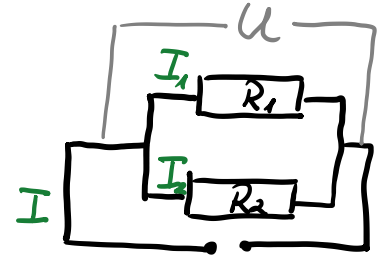
- angelegte äußere Spannung U_0
- Strom in R_1 & R_2 gleich (Erhaltung der Ladung)
- Spannung U_0 teilt sich

$$\begin{aligned}U_0 &= U_1 + U_2 \\ &= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I \\ &= (R_1 + R_2) \cdot I \\ &= R_G \cdot I\end{aligned}$$

mit Gesamtwiderstand $R_G = R_1 + R_2$

↳ allgemein für Reihenschaltung
 $R_G = \sum_i R_i$

b) Parallelschaltung



- Strom teilt sich
 $I = I_1 + I_2$
- Spannung über R_1 und R_2 gleich U_0

$$\begin{aligned}R_G &= \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{1}{\frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}\end{aligned}$$

↳ allgemein für Parallelschaltung

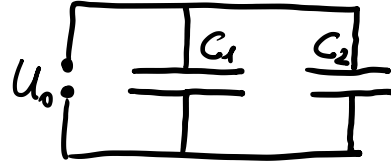
$$R_G = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}}$$

Zusammenschalten von Kondensatoren:

$$\text{mit } C = \frac{Q}{U}$$

a) Parallelschaltung

- Flächen der Kondensatoren addieren sich



- Ladungen addieren sich

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U \\ &= (C_1 + C_2) \cdot U = C_G \cdot U \end{aligned}$$

↳ Gesamtkapazität

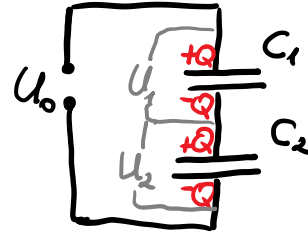
$$C_G = \sum_i C_i$$

b) Reihenschaltung

Ladung auf beiden Kondensatoren gleich

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2}$$



$$\begin{aligned} |U_0| &= U_1 + U_2 && \text{Maschenregel} \\ &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \\ &= Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \\ &= \frac{Q}{C_G} \end{aligned}$$

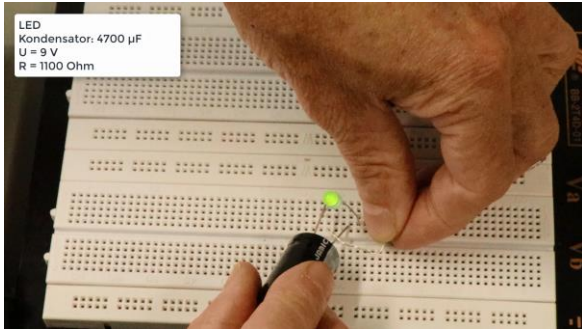
↳ Gesamtkapazität

$$C_G = \left(\sum_i \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$$

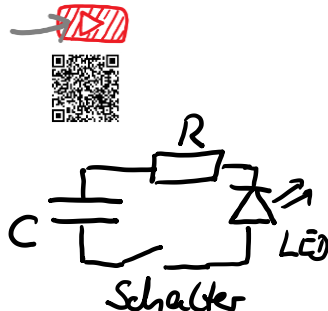
RC-Kreise: Zusammenschalten von Widerstand und Kondensator

Beispiel: LED und R & C

- $C = 4700 \mu\text{F}$ wird mit $U = 9\text{V}$ aufgeladen
- Entladung über LED \rightarrow Licht

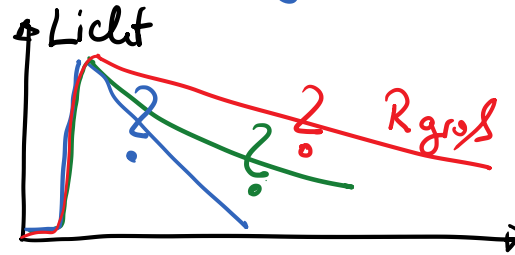


Widerstand R in Reihe mit C



Beobachtung:

- LED-Lichtintensität nimmt mit der Zeit ab
- mit großem R
 \rightarrow geringere Intensität, aber längere Dauer



Licht abhängig von

- Strom
- Spannung

also R & C

L_0 R und C in Reihe

- a) Entladen von C
- b) Aufladen von C
- c) Energiebilanz

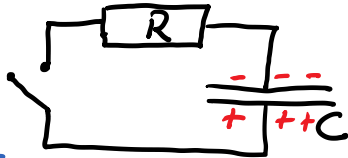
RC-Kreise: Zusammenschalten von Widerstand und Kondensator

a) Entladen eines Kondensators

- Ladung auf C

- Schalter offen: $I=0$

- für $t=t_0=0$: Schalter wird geschlossen \rightarrow Strom I fließt von C über R



gesucht: Zeitverlauf $I(t)$ & $U(t)$

Ansatz: $C = \frac{Q_c}{U_c}$, $R = \frac{U_R}{I}$

$$U_R + U_c = 0 ; I_c = I_R$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow I &= \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_c}{dt} = -C \frac{dU_R}{dt} \\ &= -R \cdot C \cdot \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

\hookrightarrow Differentialgleichung 1. Ordnung

$$I = -R \cdot C \cdot \frac{dI}{dt}$$

• Separation der Variablen

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{1}{R \cdot C} \int_{t_0}^t dt$$

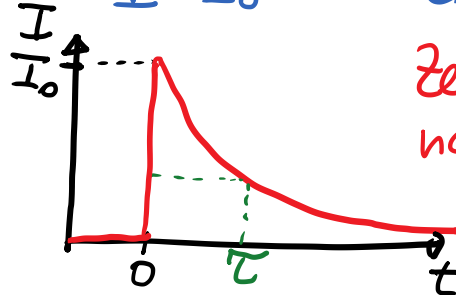
$$\ln(I) \Big|_{I_0}^I = \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot (t - t_0) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot t$$

\downarrow
 $t_0=0$

$$\hookrightarrow I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

exponentielle Abnahme!

Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$
nach $t = \tau$ Abfall auf
 $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$



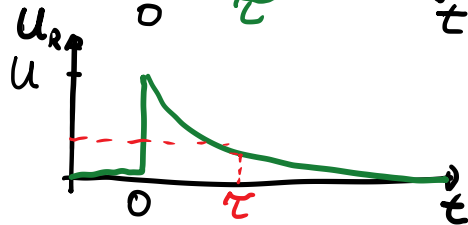
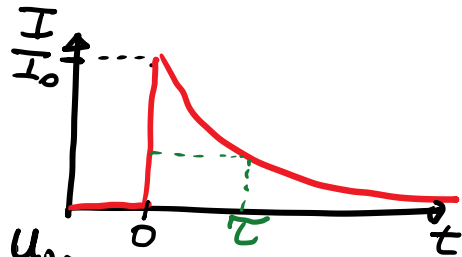
$$\hookrightarrow I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\text{mit } R = \frac{U}{I} \text{ und } R = \frac{U_0}{I_0}$$

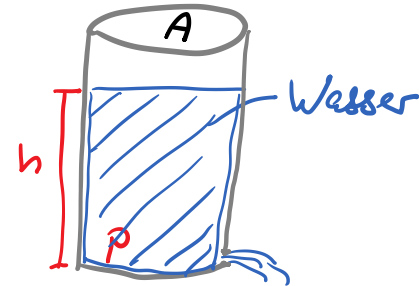
$$U_R = -U_C = R \cdot I \\ = R \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Ladung auf Kondensator:

$$Q_C = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{mit } C = \frac{Q_C}{U_C}$$



Vergleich Mechanik:

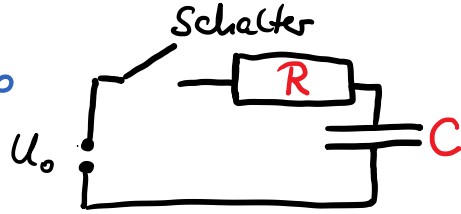


Füllhöhe des Wassers als Funktion der Zeit hängt ab von

- Öffnung und Fließeigenschaft ($\equiv R$)
- Füllhöhe h bzw. Druck p ($\equiv U$)
- Strom ($\equiv I$)
- Füllmenge und Querschnitt A ($\equiv C$)

b) Laden eines Kondensators

• äußere Spannung U_0



• $t = t_0 = 0$: Schalter wird geschlossen
 → Strom → Ladung fließt auf C
 solange, bis $U_c = -U_0$

• Maschenregel: $U_0 - U_R - U_c = 0$ (I)
 $U_0 - R \cdot I - \frac{Q}{C} = 0$ (alle Spannungen positiv)

$$\frac{dU_0}{dt} - R \cdot \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = 0$$

"0, da U_0 konstant" → $= I$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I \quad \text{gleiche Gleichung wie beim Entladen}$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} \int_{t_0=0}^t dt \rightarrow \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{1}{RC} \cdot t$$

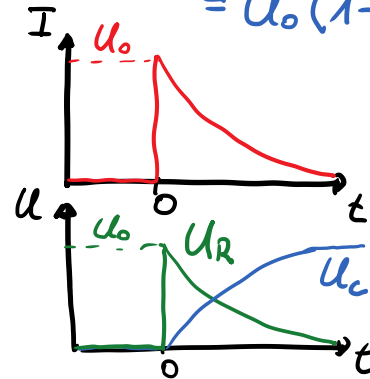
oder

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

↑ Strom I_0 , wenn der Schalter geschlossen wird

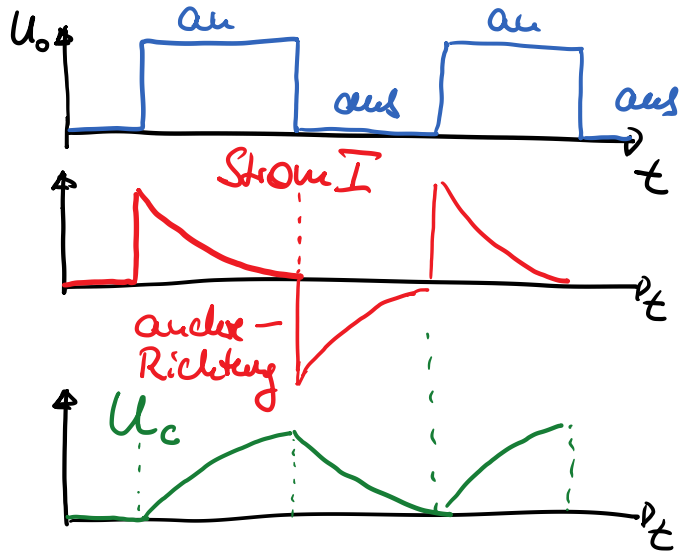
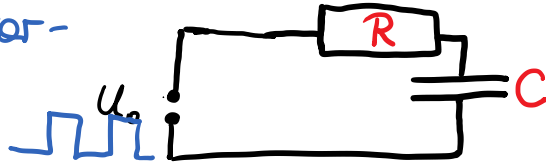
an R: $U_R = R \cdot I = R \cdot I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$
 $= U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

an C: $U_c = U_0 - U_R$ (aus I)
 $= U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

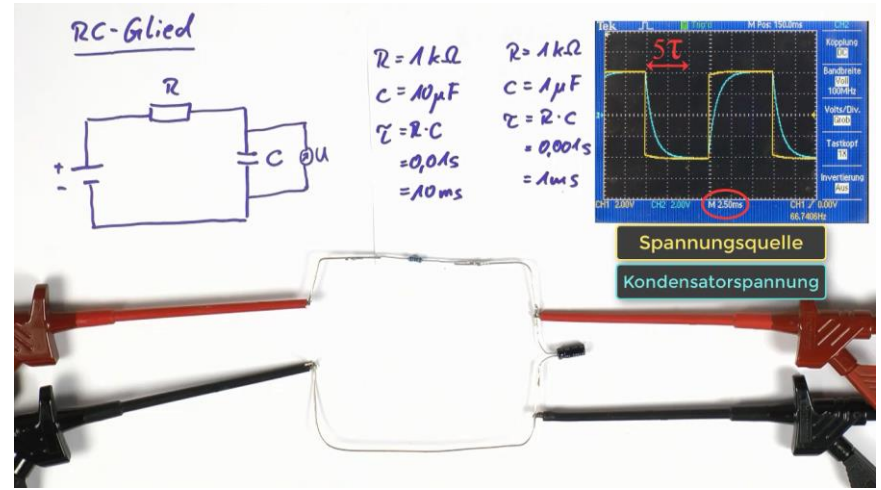


• Rechteckförmige Spannung U_0

→ Folge von Lade- und Entladevorgängen



Reales Beispiel:

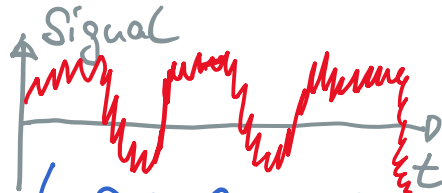


$$\left. \begin{array}{l} R = 1k\Omega \\ C = 10\mu F \\ \tau = 10ms \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} R = 1k\Omega \\ C = 1\mu F \\ \tau = 1ms \end{array} \right\}$$

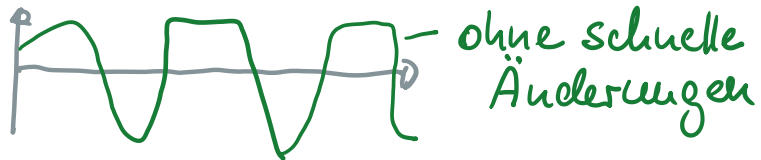


Anwendung von RC-Gliedern

- Zeitliche Dämpfung von schnellen Spannungsänderungen
- Filtern von Signalen: schnelle oder langsame Änderungen können unterdrückt werden



↳ RC-Glied-Filter



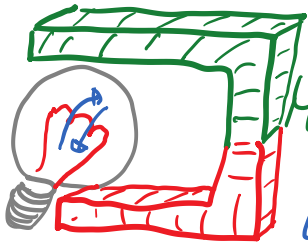
Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

9. Das Magnetfeld und die Lorentzkraft

Magnetismus: Wie beginnen?

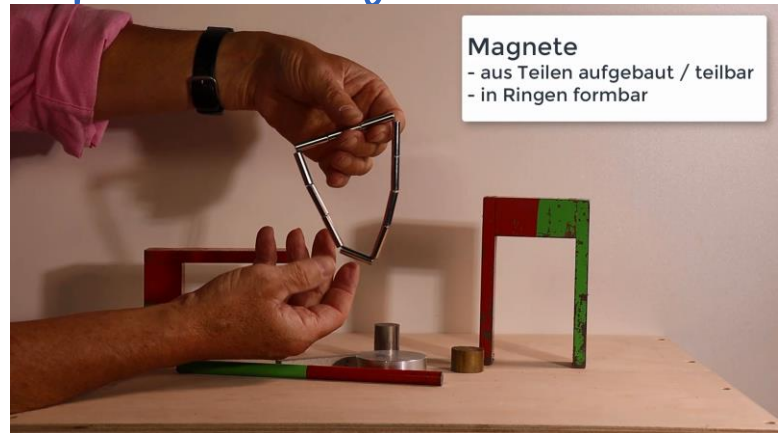
Experiment: Glühbirne und Magnet



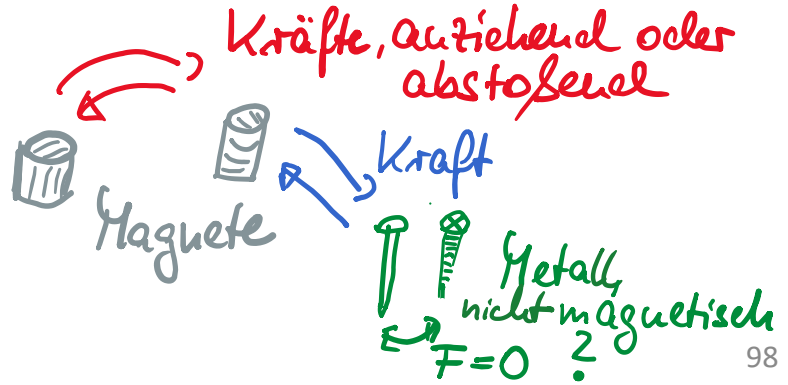
↳ Kraft

Beobachtung:
Magnet Glühdraht beginnt
zu schwingen,
wenn Magnet in der Nähe
und Strom fließt

Experiment: Magnetische Kräfte



Magnete
- aus Teilen aufgebaut / teilbar
- in Ringen formbar



bisher: Elektrostatik

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{für Punktladung } q$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{Gauß'sches Gesetz}$$

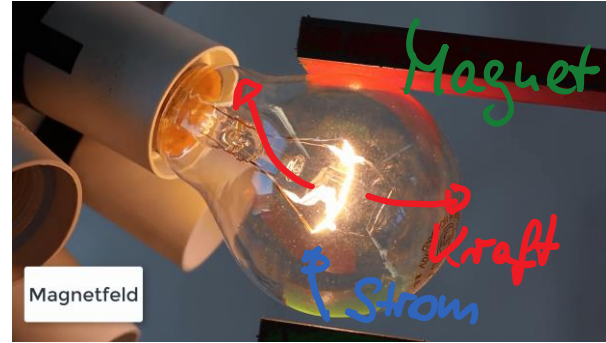
↳ bewegte Ladung: $\vec{I} = \frac{dQ}{dt}$

- genauere Betrachtung von bewegten Ladungen → Elektrodynamik

jetzt: Elektromagnetismus

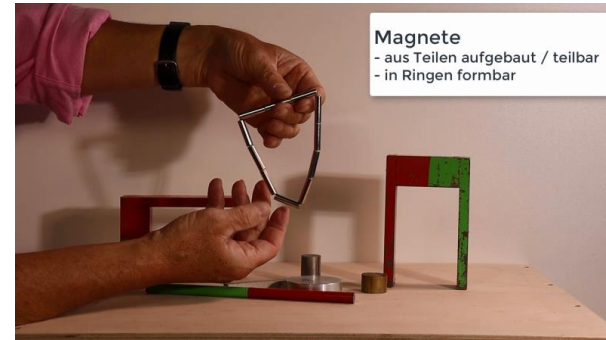
- alle Phänomene von Ladungen und Magneten lassen sich auf eine Fundamentalkraft zurückführen

- elektrischer Strom & Magnet



↳ Beschreibung durch Lorentzkraft

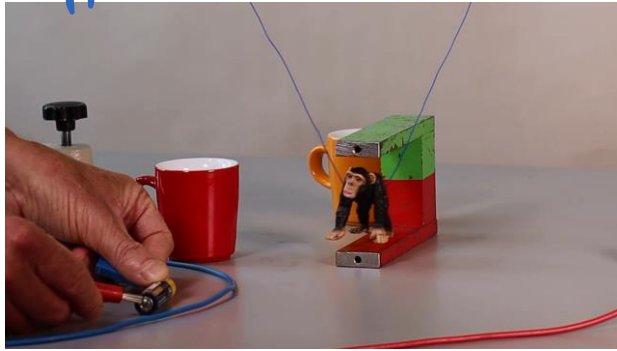
- Kräfte zwischen Magneten



↳ Beschreibung später

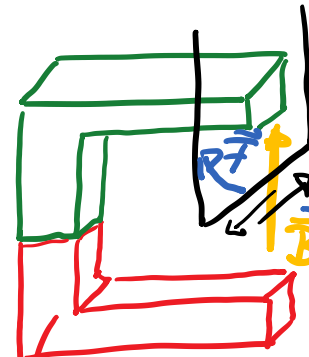
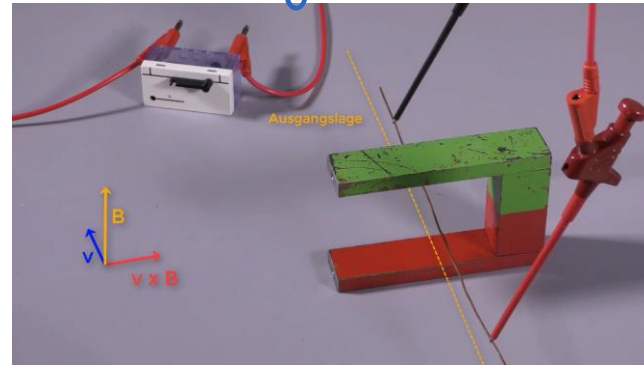
Magnetische Kräfte und elektrische Ströme sind verbunden

Affenschaukel



- Frequenz der Schwingung und der Stromstöße gleich \rightarrow Resonanz, die Amplitude wächst

Beschreibung durch ein Magnetfeld B :



Strom I in Leiterschleife

Beobachtung:

- wenn Strom fließt \rightarrow Kraft senkrecht zu \vec{I}
- andere Stromrichtung \rightarrow Kraftrichtung gekehrt

Magnet

\hookrightarrow Magnetische Kraft durch Magnetfeld B und Strom



Experiment: Elektronenstrahl wird durch Magnet abgelenkt



Nachweis durch Fluoreszenz

↳ Kraft durch Magnete bzw. Magnetfeld
wirkt auf Elektronen (Ladung)
und elektr. Strom I

Schlussfolgerung aus vielen Messungen:
 auf eine bewegte Ladung q oder Strom I
 im Magnetfeld \vec{B} wirkt eine Kraft \vec{F} :

- $\vec{F} \sim q$
- $\vec{F} \sim v$ (Geschwindigkeit)
- $\vec{F} \perp \vec{v}$
- $\vec{F} \perp$ Magnetfeld \vec{B}

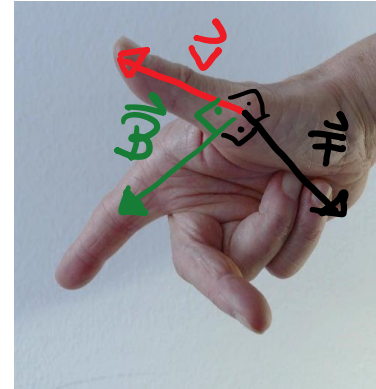
↳ Die Kraft auf eine mit \vec{v} bewegte
 Ladung q im Magnetfeld \vec{B} ist:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{Lorentz-Kraft}$$

↑

Bestimmung und Definition
 des Magnetfeldes \vec{B} aus Kraft

- „Rechte-Hand-Regel“:
- Ladung: Vorzeichen
 gibt \vec{F} -Richtung
- \vec{v} -Daumen
- \vec{B} -Zeigefinger
- \vec{F} -Mittelfinger



Definition:

Bewegt sich eine Ladung $q=1\text{C}$ mit einer
 Geschwindigkeit $v=1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht zum
 Magnetfeld \vec{B} und bildet sich eine Kraft
 $\vec{F}=1\text{N}$, so hat \vec{B} eine Stärke 1T (Tesla)

$$\begin{aligned} \text{Einheit: } [B] &= [F] / ([q] \cdot [v]) \\ &= 1 \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1 \text{T (Tesla)} \end{aligned}$$

Größenordnung von B :

	$B [T]$
Erdmagnetfeld	$\sim 10^{-4}$
Kernspintomogr. NMR	1 - 5
Neodym-Magnet	$< 0,01 - \sim 1 T$ (kleine Entfernung)

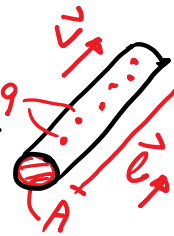
Anmerkungen:

- alte Einheit von B : 1 Gauß = $10^{-4} T$
- Bezeichnung von B : teils als magnet. Flussdichte
... daher oft als B -Feld

Lorentz-Kraft auf bewegte Ladung
bzw. Strom im Leiter

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{für Ladung } q \quad (1)$$

im Leiter mit Volumen $V = A \cdot l$ ist die
Ladung $Q = q \cdot V \cdot n$



Einzel-Ladung q
 Dichte der Ladungsträger n

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow \text{Strom } I &= \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(q \cdot A \cdot l \cdot n) \\
 &= q A \cdot v \cdot n \quad \text{mit } v = \frac{dl}{dt}
 \end{aligned}$$

\hookrightarrow Lorentz-Kraft auf Leiter

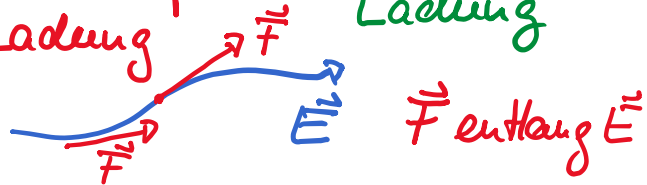
$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \cdot A \cdot l \cdot n$$

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \quad \text{mit } \vec{l} \parallel \vec{v} \quad (2)$$

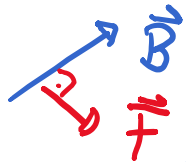
(1) und (2) sind äquivalent!

Vergleich:

- E-Feld: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$
 - wirkt auf Ladung
 - entsteht aus Ladung
 - \vec{F} entlang \vec{E}



- B-Feld: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$
 - wirkt auf bewegte Ladung
 - entsteht aus? ... bewegter Ladung



- Gravitation: $\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{r}{r}$

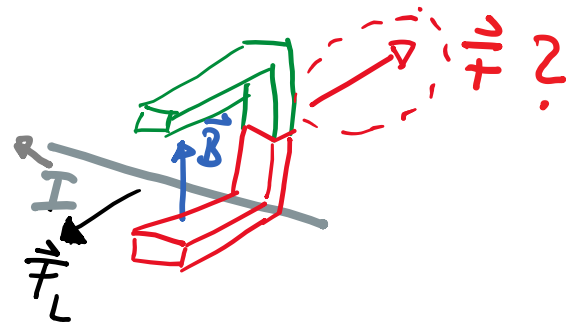
Fragen:

- Was genau ist \vec{B} ? Wie entsteht \vec{B} ? Gibt es eine magnetische Ladung?

- Newtons Axiom: actio = reactio



↳ Was ist die Gegenkraft zur Lorentzkraft, wo und wie wirkt sie?



Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

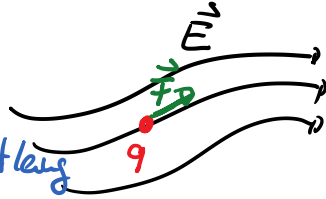
Prof. Dr. Matthias Kohl

10. Bewegte Ladung im Magnetfeld

- Zyklotronfrequenz
- gekreuzte E - und B -Felder • Hall - Effekt,
- Massenspektrometer u. Zyklotron

Bewegte Ladung im \vec{E} -Feld:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



→ Beschleunigung entlang
der \vec{E} -Feldlinien

Ladung / Strom im \vec{B} -Feld:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{bzw.} \quad \vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

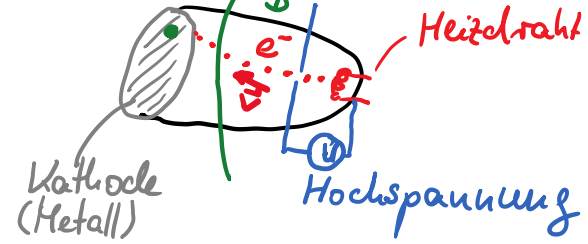
→ Kraft und Beschleunigung $\perp \vec{B}$
 $\vec{v} = 0$

$$v \parallel B \Rightarrow \vec{F} = 0$$

• hier: Entstehung von \vec{B} wird nicht
geklärt

Beispiel: Elektronenröhre

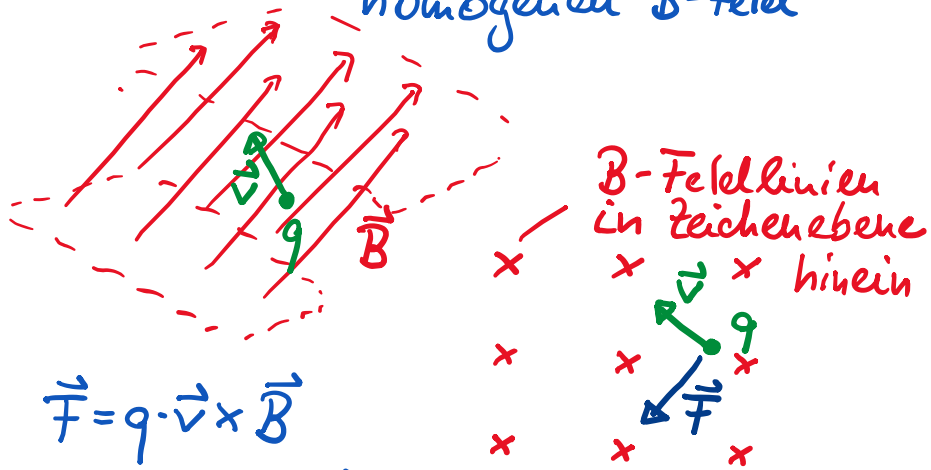
e^- auf Kathode
→ Fluoreszenz
(Licht)



\vec{B} -Feld → Ablenkung des e^- -Strahls
durch Lorentzkraft



a) Bewegung von Ladung im homogenen B-Feld



$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

es sei $\vec{v} \perp \vec{B}$

→ Kraft \vec{F} wirkt \perp zu \vec{v}

→ daher Beschl. $\vec{a} \perp \vec{v}$

↳ Richtungsänderung! $|\vec{v}|$ bleibt gleich!
Zentripetalbeschleunigung auf Masse m

↳ Kreisbewegung

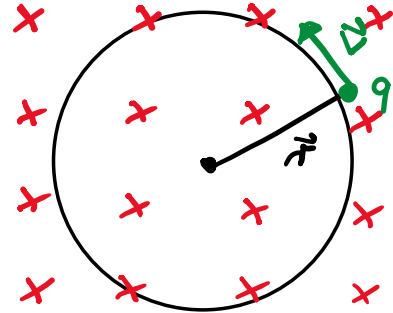
$$\rightarrow q \cdot v \cdot B = m \underbrace{\frac{v}{r}}_{\omega}^2 = m r \underbrace{\omega^2}_{\text{Zentripetalbeschleunigung}}$$

Zentripetalbeschleunigung mit Kreisfrequenz ω

Kreisbahn mit

- Radius $r = \frac{mv}{qB}$

- Kreisfrequenz $\omega = \frac{qB}{m}$



• die Ladung hat daher eine

Umlaufzeit $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{qB}$

bzw. Frequenz $\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$

„Zyklotronfrequenz“

ν und T sind unabh. von Geschw.!

Beispiel: Elektronenquelle & B-Feld



- e^- : Beschleunigung durch U
 - Stoß mit Gasteilchen \rightarrow Fluoreszenz
 - B-Feld homogen durch Helmholtz-Spulen
- \hookrightarrow Kreisförmige e^- -Bahn, abhängig von B und U (bzw. v)



Beispiel: Proton bewegt sich in $B=3T$ auf Kreisbahn $r=20cm$.
Gesucht: v und ν .

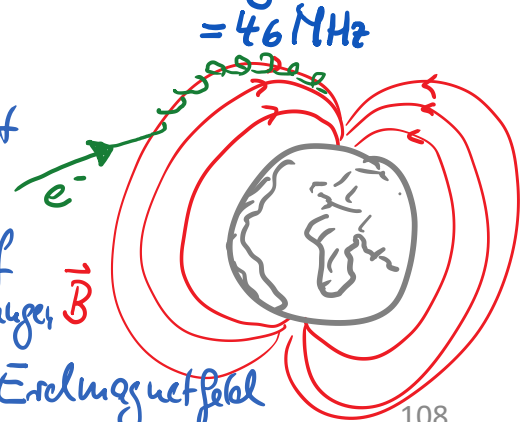
$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad q_p = e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\hookrightarrow v = \frac{q_p B r}{m_p} = \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 3 \text{ T} \cdot 0,2 \text{ m}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 5,75 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\nu = \frac{q_p B}{2\pi m_p} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 3 \text{ T}}{2\pi \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 4,6 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 46 \text{ MHz}$$

Beispiel: Nordlicht

e^- wird vom Erdmagnetfeld auf Spiralbahnen gezwungen \vec{B}
 \rightarrow Kapitel über Erdmagnetfeld

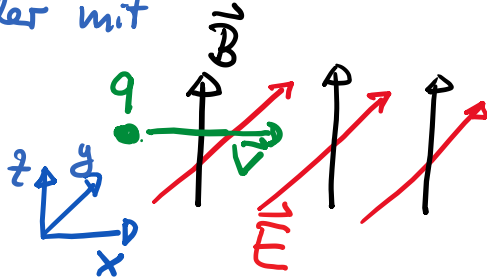


b) gekreuzte \vec{E} - und \vec{B} -Felder

• homogene Felder mit

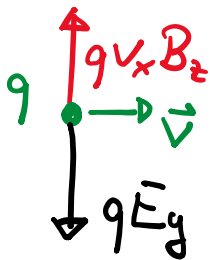
$$\vec{E} = (0, E_y, 0)$$

$$\vec{B} = (0, 0, B_z)$$



Ladung q wird mit $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$
in die Felder bewegt: $\vec{v} \perp \vec{E}$ $\vec{v} \perp \vec{B}$

↳ Kräfte $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = q(0, E_y, 0)$
 $\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} = q(0, v_x B_z, 0)$



nur y -Komponente
der Kraft

→ keine Kraft und keine Ablenkung
der Ladung q , wenn

$$q v_x B_z = q E_y$$

also unabhängig von der Ladung
keine Ablenkung für Geschw.

$$v_x = \frac{E_y}{B_z}$$

↳

Geschwindigkeitsfilter: nur Teilchen mit
dieser Geschw. v laufen ungehindert
durch die Felder

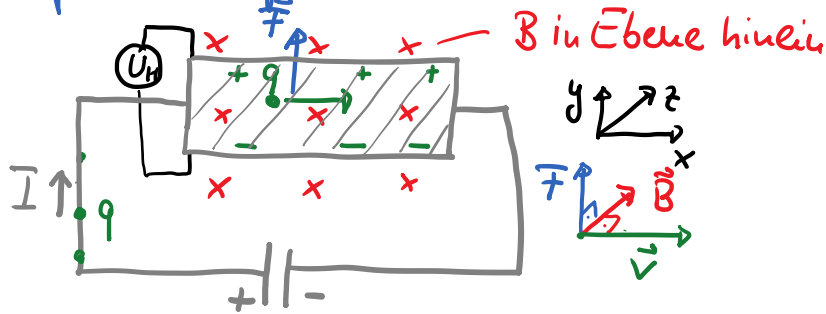
↳ Entdeckung des Elektrons e^- im
Kathodenstrahlrohr (J.J. Thomson)

c) Hall-Effekt

- Lorentz-Kraft $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$ \perp Stromrichtung

↳ gibt es einen Einfluß auf den Strom im Leiter?

- für Metallfolie $\perp B$



Betrachtung für positive Ladung $+q$ mit v_x

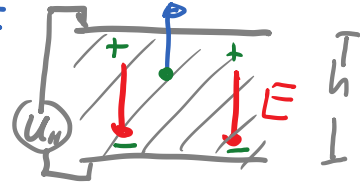
→ \vec{F} nach oben ($+y$)

→ Ablenkung der Ladung, so daß an der oberen Seite der Folie positive Ladung

→ Hall-Spannung U_H zwischen oben und unten

↳ E -Feld mit $U_H = h \cdot E$

↳ Kraft auf q : $\vec{F} = q\vec{E}$



- Gleichgewicht der Kräfte bildet sich aus

$$\vec{F} = q\vec{E} = qv\vec{B} \quad (\vec{v} \perp \vec{B})$$

und damit eine Hall-Spannung

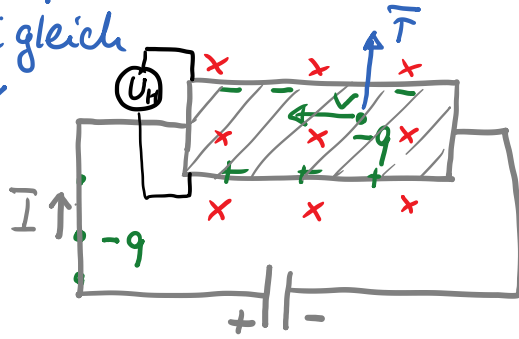
$$U_H = h \cdot E = h \cdot v \cdot B$$

$$U_H \sim v$$

$$U_H \sim B$$

- Spannung U_H leicht messbar
 - wenn v bekannt → Messung von B
 - wenn B bekannt → Messung von v

- Betrachtung für $-q$:
Stromrichtung sei gleich
 v ist gekehrt: $-v$



↳ $F = -q \cdot (-v) \cdot B = q v B$, also weiterhin
Kraft nach oben;
da $-q \rightarrow E$ -Feld und Hall-Spannung
hat umgekehrtes Vorzeichen

→ aus der Polarität der Hall-Spannung
läßt sich das Vorzeichen der Ladungs-
träger bestimmen!

Anwendung der Hall-Spannung)

i) Bestimmung der Ladungsdichte n

Strom abhängig von n :

$$I = n \cdot q \cdot v \cdot A$$

↳ Ladungs-
dichte
↳ Driftgeschw
↳ Querschnitt
 $A = h \cdot d$

$$\hookrightarrow n = \frac{I}{q \cdot v \cdot h \cdot d}$$

$$n = \frac{I \cdot B}{q \cdot U_H \cdot d} \quad \text{mit } U_H = h \cdot v \cdot B$$

also läßt sich bei bekanntem I und
 B die Ladungsdichte bestimmen

ii) Messung von B

- wenn I und n bekannt:
aus der Hall-Spannung lässt sich B
bestimmen:

$$B = \frac{n \cdot q \cdot d}{I} \cdot U_H$$

Hall-Sensor zur Magnetfeldmessung



iii) Abschätzung der Hall-Spannung:

- Driftgeschw. $v \sim 3 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}$
- für $B = 1 T$ und $h = 1 cm = 10^{-2} m$

$$U_H = h \cdot B \cdot v$$

$$\hookrightarrow U_H = 10^{-2} m \cdot 1 T \cdot 3 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s} = 3 \cdot 10^{-7} V = 0,3 \mu V$$

relativ klein!

U_H ist abhängig von Ladungsdichte n :

$$U_H = I \cdot \frac{1}{q \cdot d} \cdot \frac{1}{n} \cdot B$$

\hookrightarrow in Halbleitern ist n klein
 $\rightarrow U_H$ größer

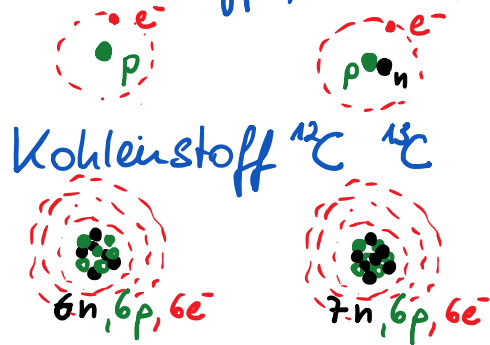
Kupfer: $n_{Cu} \approx 8,5 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3}$

Silizium: $n_{Si} \approx 10^{20} \frac{1}{m^3}$

\hookrightarrow Hallspannung ca. 10^9 mal größer!

d) Massenspektrometer

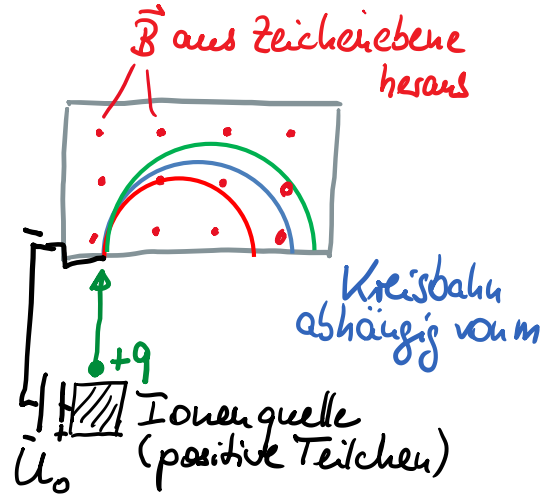
- Bestimmung der Masse von Isotopen
 - Isotope: Elemente, die sich nur in der Anzahl der Neutronen im Kern unterscheiden, chemisch identisch sind
- Beispiel: Wasserstoff, Deuterium



↳ Massen unterschiedlich

Aufbau:

- Ionenquelle (+q)
- Spannung zwischen Quelle und Bereich des \vec{B} -Feldes
- Ionen werden beschleunigt durch Spannung



- Ladung beim Eintreffen in das \vec{B} -Feld hat $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = q \cdot U_0 \quad \oplus$
- im \vec{B} -Feld: Lorentz-Kraft \rightarrow Kreisbewegung mit $r = \frac{m v}{q B}$ bzw. $v = r \cdot \frac{q B}{m}$

$$\oplus \quad \frac{1}{2} m v^2 = q U_0$$

$$\frac{m}{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{U_0} \cdot r^2$$

eingestellt im Massenspektrometer

Messung

Verhältnis von Isotopmasse zur Ladung kann bestimmt werden

↳ Messung von r liefert $\frac{m}{q}$

- Isotope haben unterschiedliche Massen
→ unterschiedliche Radien r

Beispiel: ^{58}Ni -Ion mit $q = +e$ und Masse $m = 9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$

Massenspektrometer: $U_0 = 2 \text{ kV}$, $B = 0,2 \text{ T}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow r_{58} &= \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2U_0 m}{q}} \\ &= \frac{1}{0,2 \text{ T}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}} \\ &= 0,245 \text{ m} \end{aligned}$$

Isotop ^{60}Ni

$$r \sim \sqrt{m} \rightarrow \frac{r_{60}}{r_{58}} = \sqrt{\frac{m_{60}}{m_{58}}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1,017$$

und damit $\delta = 1,7\%$

$$r_{60} = r_{58} \cdot 1,017 = 0,249 \text{ m}$$

e) Zyklotron

- Massenspektrometer: Beschleunigung der Ionen durch Spannung $U_0 \rightarrow E_{kin} = q \cdot U_0$
 U_0 limitiert $E_{kin} \stackrel{D}{=} \frac{1}{2} mv^2$

Wie können Ionen eine hohe E_{kin} erhalten?

Zyklotron: Gerät zur Beschleunigung von Ionen auf hohe Energie

- Ziel: Stoßexperimente mit Atomen
- \rightarrow Untersuchung der Atomkerne
 - \rightarrow Herstellung von Radionukleotiden, z.B. für Positronenemissionstomographie (PET) in der Medizin

Aufbau Zyklotron:

- elektrisches Wechselfeld / Wechselspannung
 $\rightarrow E_{kin}$ von Ionen wird erhöht
- B-Feld zur Richtungsänderung
- zwei D-förmige Halbdosen aus Metall



- B-Feld: homogen, entlang Achse
- Ionenquelle im Zentrum



Aufbau Zyklotron:

• Wechselspannung zwischen Dosen \rightarrow Ionen werden beschleunigt

• homogenes B
 \hookrightarrow Bahnänderung

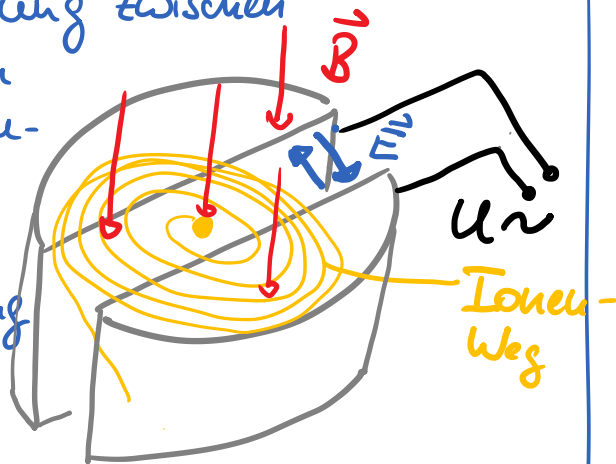
\hookrightarrow Umlaufzeit

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

(Kap. 10.1 a)

T unabh. von Geschw. v

• Wechselspannung mit $\Delta = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{q}{m} \cdot B$
 \rightarrow Ionen werden beschleunigt



• im Inneren: $E=0$ (Faraday-Käfig)

• im Zentrum: Ionenquelle

- vom E -Feld beschleunigt,
 $\Delta E_{kin} = q \cdot U$

- vom B -Feld umgelenkt um 180°

- U ist umgepolt, als \vec{E} um 180° gedreht

- weitere Beschleunigung

Synchronisation von Umlaufzeit und Wechselspannung

$\hookrightarrow E_{kin}$ nimmt zu, v nimmt zu

\hookrightarrow Bahnradius wächst: $r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$ (siehe 10.1)

Endenergie $E_{kin} = q \cdot |U| \cdot \text{Umläufe}$

• typisch: $E_{kin} = 50-100 \text{ MeV}$

• Ionen treten mit dieser Energie aus

Beispiel: Proton ($m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)
im Zyklotron mit $B = 1 \text{ T}$

• wenn $r = 0,25 \text{ m}$

↳ $E_{\text{kin}} =$

gesucht: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$

mit $r = \frac{m v}{q \cdot B} \rightarrow v = \frac{q \cdot B}{m} \cdot r$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \frac{q^2 \cdot B^2}{m} \cdot r^2$$

$$= 1,92 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 12 \text{ MeV}$$

($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

dies entspricht einer (nicht-relativistischen)
Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \frac{E_{\text{kin}}}{m}} = 4,8 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Lichtgeschw. } c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Anmerkung: Durchdringen von Materie
durch B -Feld



Beobachtung:

- B -Feld in Aluminium (und Keramik)
- B -Feld wird durch Stahl (Ferromagnet) abgeschwächt

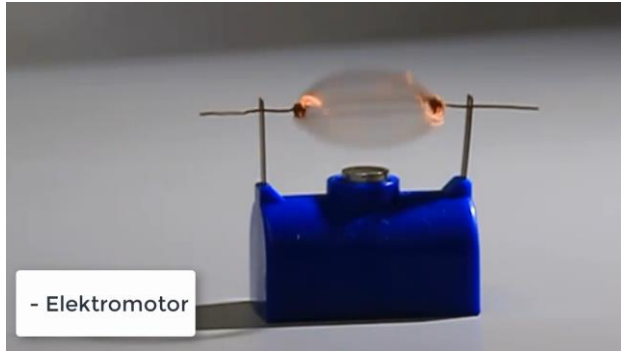
Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

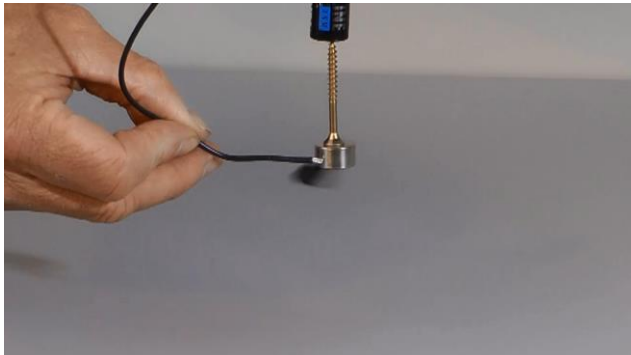
*11. Vom magnetischen Dipolmoment
zum Elektromotor*

Elektromotor:

- Batterie, Strom & Magnet & Leiterschleife

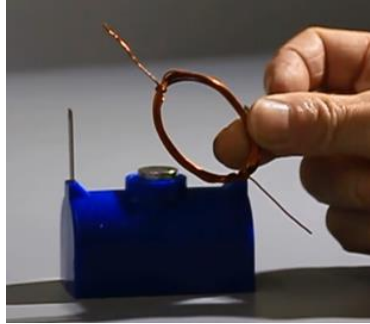


- Batterie, Strom & Magnet & Schraube, Kabel

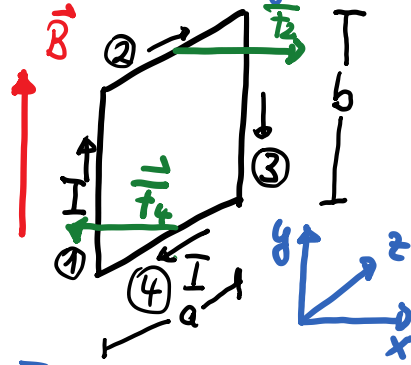


Was ist das Prinzip eines Elektromotors?
↳ Lorentz-Kraft

Abstraktion:



Leiterschleife



- Leiterschleife mit Strom I
- homogenes \vec{B} -Feld
- Lorentz-Kraft wirkt $\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$
Leiterelement
- für ① & ③ : $\vec{\ell} \times \vec{B} \rightarrow \vec{F} = 0$
- für ② : $\vec{\ell}_2 = (0, 0, a)$ in z -Richtung
 $\vec{F}_2 = (F_x, 0, 0) = (I \cdot a \cdot B, 0, 0)$
- für ④ : $\vec{\ell}_4 = (0, 0, -a)$
 $\vec{F}_4 = (-I \cdot a \cdot B, 0, 0) = -\vec{F}_2$

↳ da $\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$: Gesamtkraft $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = 0$
 ↳ keine Translationsbewegung
 aber:

• Leiterschleife wird gedreht

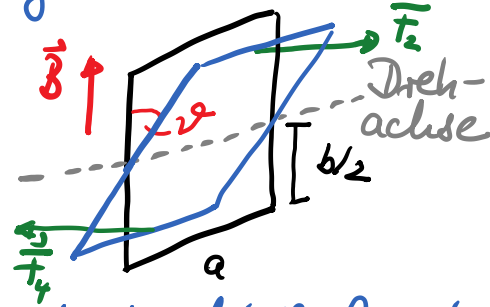
Drehmoment:

$$M = F_2 \cdot \frac{b}{2} + F_4 \cdot \frac{b}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot I \cdot a \cdot B$$

$$= I \cdot A \cdot B$$

mit der Fläche der Leiterschleife $A = a \cdot b$
 → Drehung um Achse: ϑ



allgemein: für Winkel ϑ

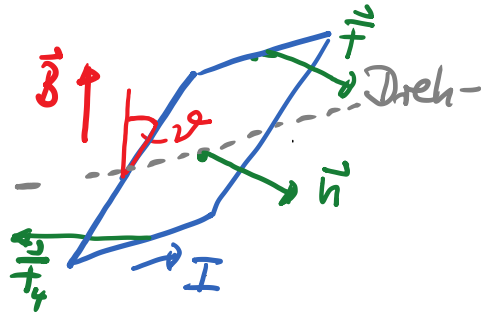
$$M = I \cdot A \cdot B \cdot \sin \vartheta$$

oder

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= I \cdot A \cdot \vec{n} \times \vec{B}$$

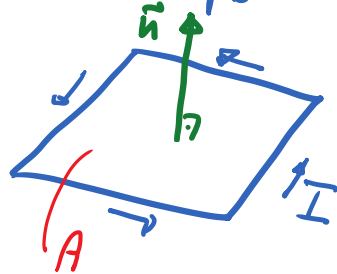
Einheitsvektor \perp Fläche



$$\hookrightarrow \vec{M} = \vec{p}_3 \times \vec{B}$$

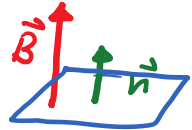
mit magnetischem Dipolmoment $\vec{p}_3 = I \cdot A \cdot \vec{n}$

„Rechte-Hand-Regel“:
Stromrichtung: Finger
 \vec{n} bzw. \vec{p}_3 : Daumen

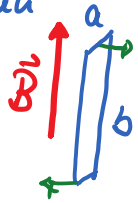


• Drehmoment $M = 0$,

wenn \vec{p}_3 bzw. $\vec{n} \parallel \vec{B}$

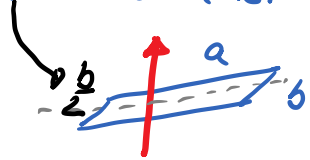


• M ist klein, wenn Fläche A klein
und Element \vec{a} bzw. \vec{B} klein,
also \vec{F} klein

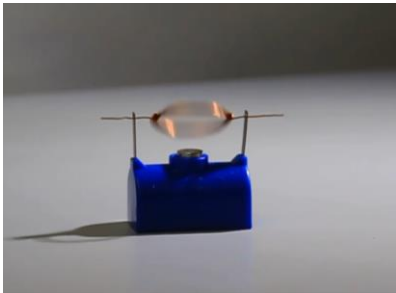


oder

b und damit der Hebelarm klein ist



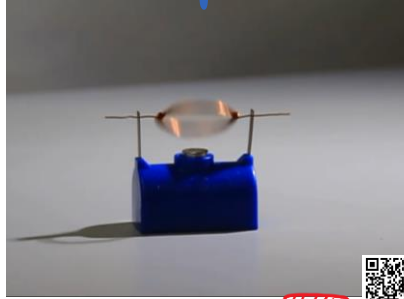
- magnetischem Dipolmoment $\vec{p}_B = I \cdot A \cdot \vec{n}$
... gilt für jede Form
 - beim Drehen um einen Winkel gegen
Drehmoment $\vec{M} = \vec{p}_B \times \vec{B}$ wird Arbeit
verrichtet \rightarrow pot. Energie
- $$E_{\text{pot}} = \int \vec{M} \cdot d\vec{\vartheta} = \int p_B \cdot B \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta$$
- da $\vec{B} \perp \vec{p}_B$
- $$= -p_B \cdot B \cdot \cos\vartheta$$
- $$= -\vec{p}_B \cdot \vec{B}$$
- \rightarrow Energie \rightarrow Leistung beim Drehen



Magnetisches Dipolmoment $\vec{p}_B = I \cdot A \cdot \vec{n}$

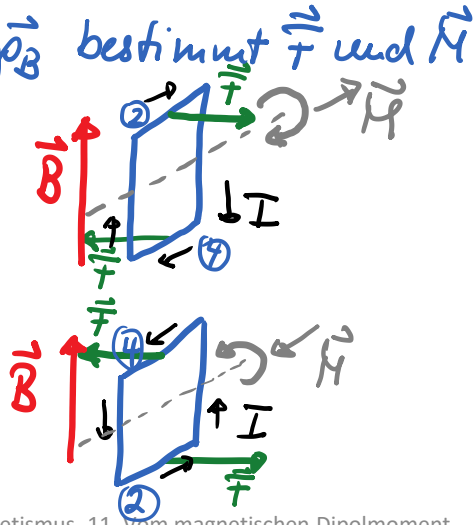
• hier: vielfache
Drahtwicklung
→ $\vec{p}_B = I \cdot A \cdot \vec{n} \cdot Z$

Wicklungen



• Richtung von \vec{p}_B bestimmt \vec{F} und \vec{M}

↳ Gleichstrom:
nach einer Halb-
drehung steht
 \vec{F} bzw. \vec{M} in die
andere Richtung

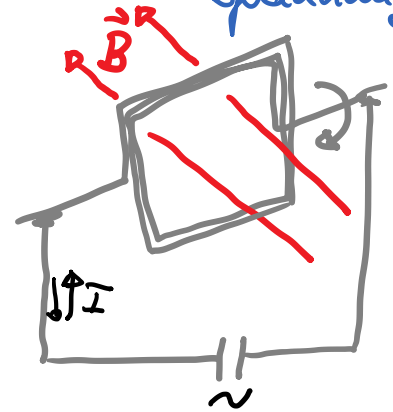


→ nur Halbdrehung für Gleichstrom

↳ Lösung hier: Isolierung des Drahtes
auf einer Seite so, daß Strom I nur
während einer Halbdrehung ungleich 0.

andere Lösung: Elektromotor mit Wechsel-
spannung

einfachster Aufbau:



Beispiel: Drahtmotor

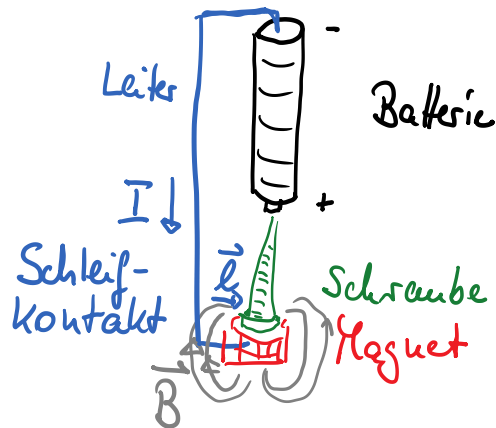
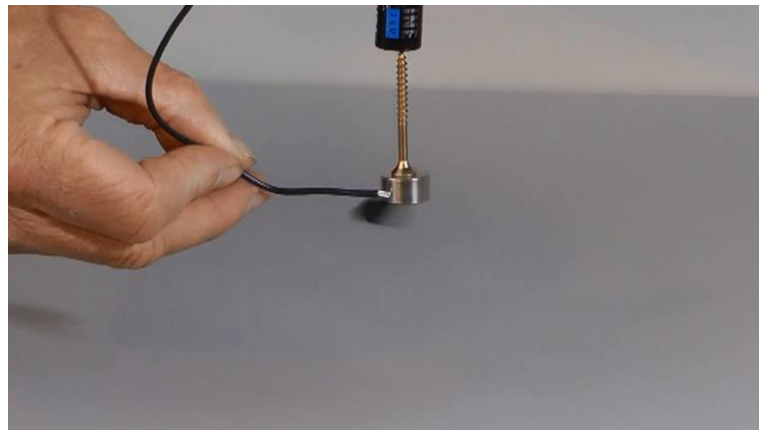


$$\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$$

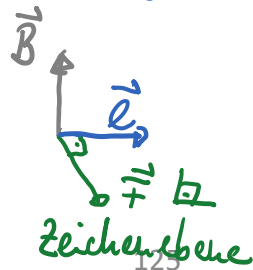


Kraft direkt auf Ladung im Leiter

Beispiel: Schraubenmotor



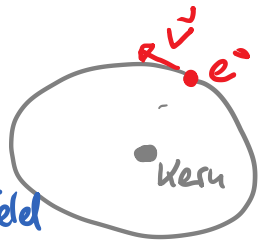
$$\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B}$$



Beispiele für magnetische Momente

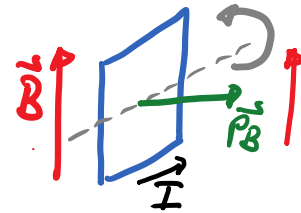
$$\vec{p}_B = I \cdot A \cdot \vec{n}$$

- Elektronenhülle in Atomen
 e^- auf Bahn \rightarrow Strom
 \rightarrow magu. Moment
 \rightarrow Drehung im äußeren B-Feld
 \rightarrow Energieänderung (Zeemann-Effekt)
- Elektronen, Neutronen und Protonen besitzen mag. Moment $\vec{p}_B \rightarrow$ „Spin“
- Kompassnadel: Ausrichtung im B-Feld
 Verhalten wie eine Leiterschleife
 Erklärung durch atomare Ringströme



Vergleich:

magnet. Dipolmoment
 $\vec{p}_B = I \cdot A \cdot \vec{n}$

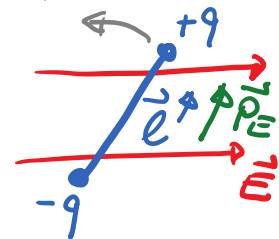


$$\vec{H} = \vec{p}_B \times \vec{B}$$

$$\vec{E}_{pot} = -\vec{p}_B \cdot \vec{B}$$

elektrisches Dipolm.

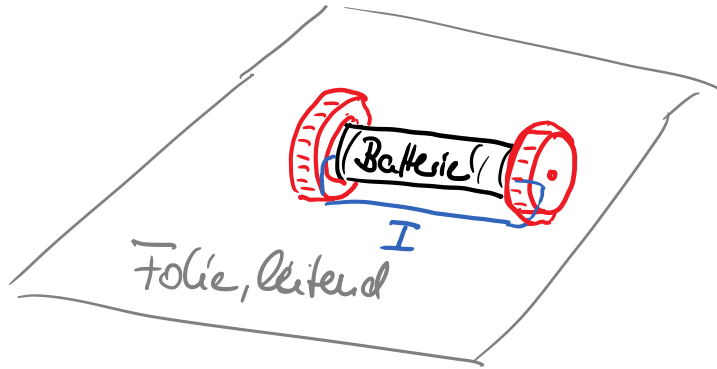
$$\vec{p}_E = q \cdot \vec{L}$$



$$\vec{M} = \vec{p}_E \times \vec{E}$$

$$\vec{E}_{pot} = -\vec{p}_E \cdot \vec{E}$$

Beispiel: Variante eines einfachen Motors



Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

12. Erzeugung von Magnetfeldern
– Biot-Savart-Gesetz

bisher: $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$

Wirkung von
 \vec{B} auf $q(I)$

↳ Frage nach den Quellen der
Magnetfelder:

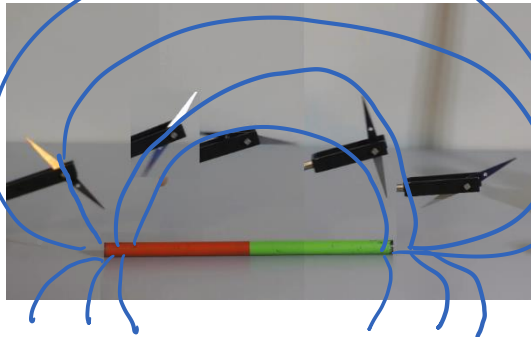
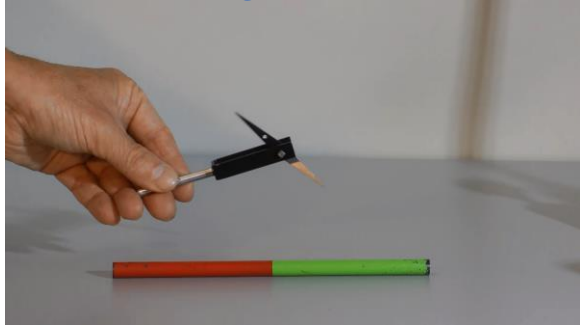
„Magnete bilden Magnetfelder,
die auf andere Magnete wirken!“

ungenügende Erklärung!

Was sind Magnete?
Woher kommen die Magnetfelder?

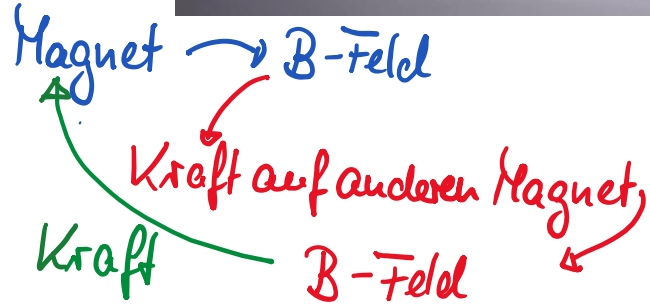
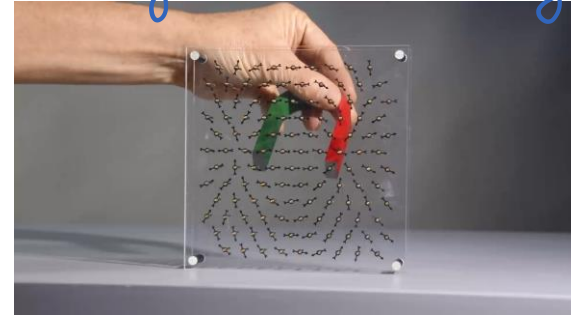
"Magnete bilden Kräfte aufeinander aus."

- Stabmagnet



— Linien der Ausrichtung
— B-Feldlinien

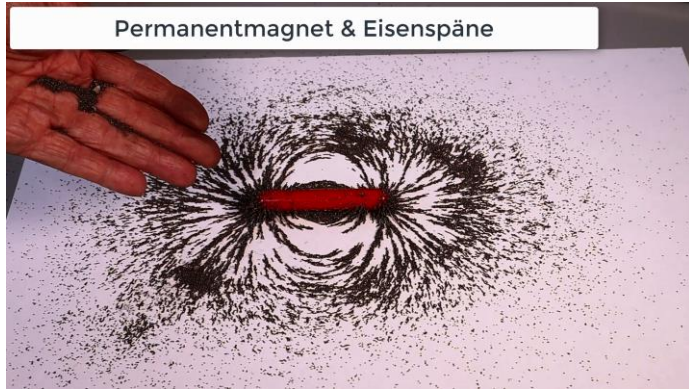
- Hufeisenmagnet → Ausrichtung von Magnetnadeln



Was aber sind Magnete „wirklich“?
Gibt es kleinste Magnete, so wie es Elektronen und Protonen als Quellen der E-Felder gibt?

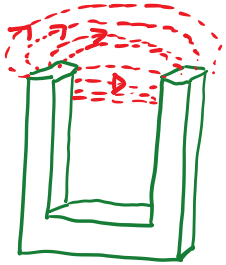
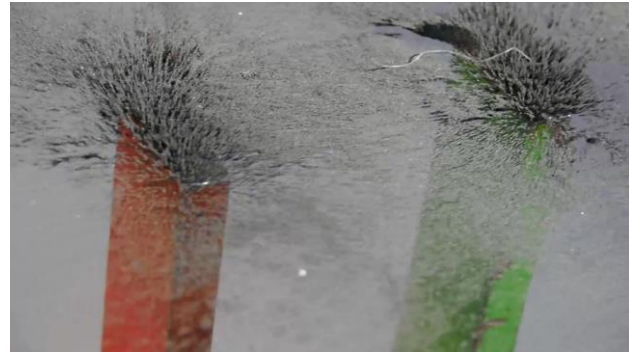
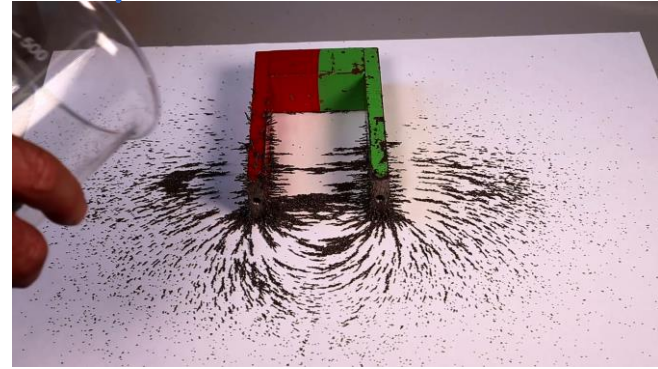
Magnetfeld: Eisenspäne zur Sichtbarmachung der Feldlinien

• Stabmagnet

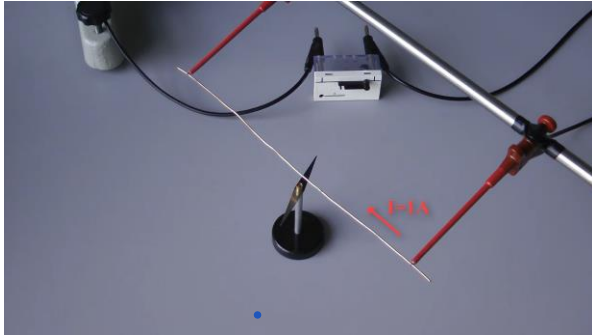


• Konvention: Magnetfeldlinien beginnen am Nordpol (üblich: rot) und enden am Südpol (üblich: grün)

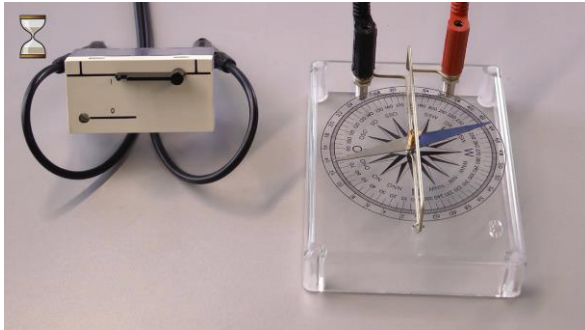
• Hufeisenmagnet



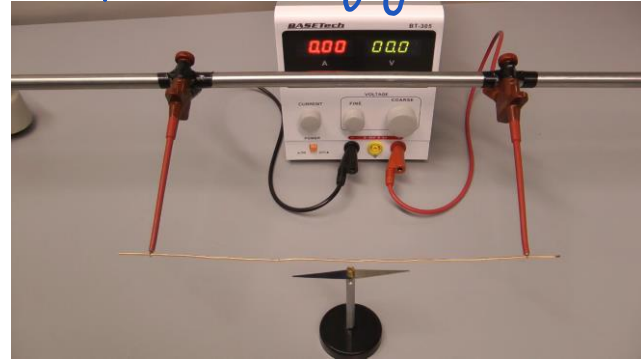
Experimente:



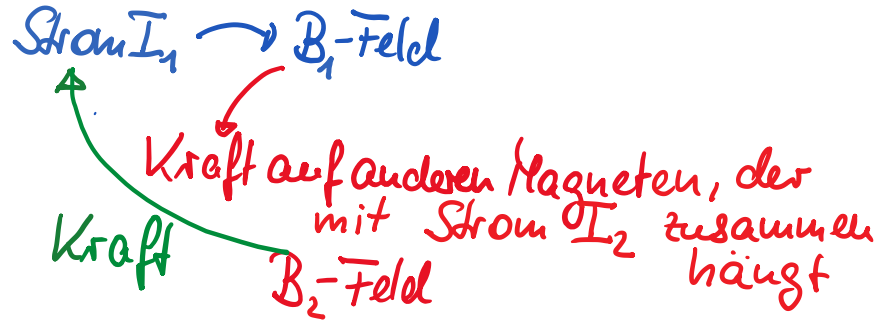
Strom bewirkt Kraft auf Magneten!
... wie ein B-Feld!



Kraft abhängig von I :



Folgerung von Ch. Oersted (1820):
Elektrische Ströme bilden Magnetfelder
und sind die einzigen Quellen von
magnetischen Kräften und Feldern. ▽



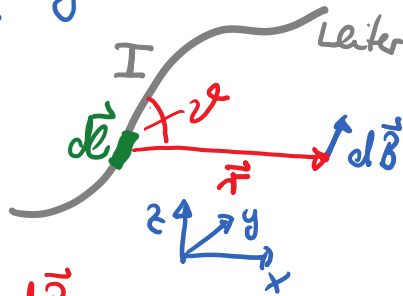
↳ es gibt keine „magnetische Ladung“
oder „magnetische Monopole“

↳ Untersuchung des B -Feldes, das
vom Strom I erzeugt wird

genaue Experimente ergaben:

für ein Element $d\vec{\ell}$ des Leiters entsteht ein B-Feld im Raum mit

- $d\vec{B} \sim I$
 - $d\vec{B} \sim d\ell$
 - $d\vec{B} \sim \frac{1}{r^2}$
 - $d\vec{B} \sim \sin\vartheta$
- } Betrag $d\vec{B}$
- $d\vec{B} \perp d\vec{\ell}$
 - $d\vec{B} \perp \vec{r}$
- } Richtung

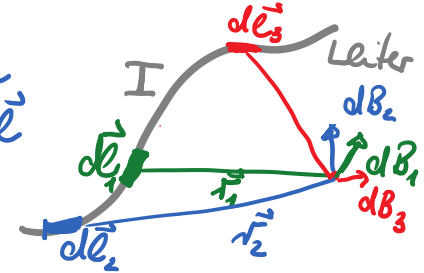


$\hookrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r^2} d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r}}{r}$ Gesetz von Biot-Savart

mit Proportionalitätskonstante $\frac{\mu_0}{4\pi}$,
wobei die Permeabilität $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$
(magn. Feldkonstante)

• Bemerkung: $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = c_0^2$ mit Lichtgeschw. c_0
es wird später klar werden, warum μ_0 den Faktor 4π enthält.

• für einen endlichen Leiter mit Strom I:
Integral für alle Leiterelemente $d\vec{\ell}$



$\hookrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$

↑
Konstante

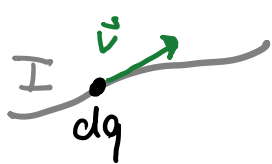
↑
Strom

↑
Integral entlang $d\vec{\ell}$

↑
Abstand und Richtung

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{für Strom } I$$

• Betrachtung für einzelne Ladung:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad I = \frac{dq}{dt}$$

$$dq \cdot \vec{v} = dq \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot d\vec{\ell} = I \cdot d\vec{\ell}$$

$$\hookrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int (dq \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}) \quad \text{für Ladungselemente } dq$$

oder

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{für eine Ladung } q$$

→ Berechnung von \vec{B} im nächsten Kapitel

↳ Ladung und Magnetfelder sind verbunden!

Also müssen auch E-Felder und B-Felder zusammen beschrieben werden!

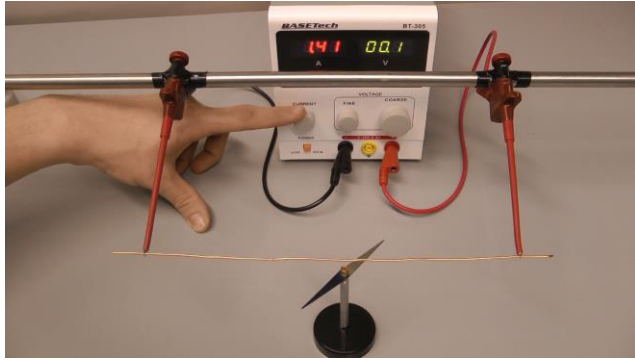
Heureka!
→ Elektromagnetismus

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

13. B -Felder von geradem Leiter,
Leiterschleife und Spule

Experiment: bewegte Ladung / Strom
 → Magnetfeld



Biot-Savart-Gesetz:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{für Strom } I$$

↑ Strom
↑ Leiterelement
↑ Abstand

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int (dq \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}) \quad \text{für Ladungselemente } dq$$

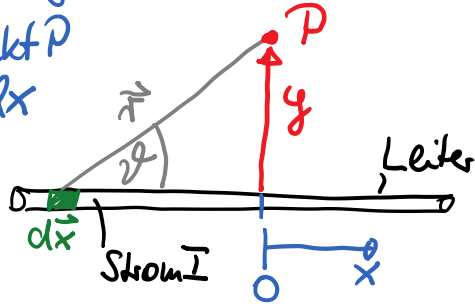
Richtung: $d\vec{B} \sim d\vec{l} \times \vec{r}$
 $\hookrightarrow d\vec{B} \perp d\vec{l}$
 $d\vec{B} \perp \vec{r}$

Lösung nur für einfache Geometrien
 analytisch möglich:

- unendlicher, gerader Leiter
- kreisförmige Leiterschleife
- Spule

a) Magnetfeld eines geraden Leiters

- gesucht: $d\vec{B}$ in Punkt P des Leiterelements dx
- danach Integration über gesamten Leiter



- Richtung von $d\vec{B} \perp xy$ -Ebene

$$\begin{aligned} \text{• Betrag } d\vec{B} &= |d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{|dx \times \vec{r}|}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{dx \cdot r \cdot \sin\vartheta}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} dx \end{aligned}$$

ϑ , r und x als geometrische Größen sind abhängig von einander, zur Berechnung müssen zwei dieser Größen (hier: r & dx) eliminiert werden

$$\bullet \sin\vartheta = \frac{y}{r} \rightarrow r = \frac{y}{\sin\vartheta} \quad (1)$$

$$\bullet \tan\vartheta = -\frac{y}{x} \quad (-\text{da } x\text{-Achse nach rechts})$$

$$\rightarrow x = -\frac{y}{\tan\vartheta}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= -y \cdot \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{\tan\vartheta} \right) = -y \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \right) \\ &= -y \frac{-\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} = + \frac{y}{\sin^2\vartheta} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow dx = -\frac{y}{\sin^2\vartheta} \cdot d\vartheta \quad (2)$$

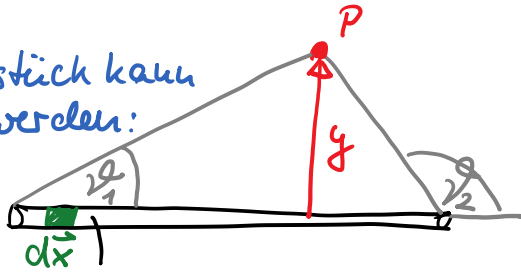
damit wird:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin\vartheta}{r^2} dx \quad \text{mit (1): } \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\vartheta}{y^2} \quad (2)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\sin\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{y^2} \cdot \frac{y}{\sin^2\vartheta} d\vartheta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \underbrace{\sin\vartheta d\vartheta}_{\text{nur abh. von } \vartheta \text{ und nicht von } r \text{ & } y} \cdot \frac{1}{y}$$

Für ein Leiterstück kann dies integriert werden:



$$B = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{y} \sin \vartheta \, d\vartheta$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{y} (-\cos \vartheta) \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{y} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)$$

• Spezialfall: Leiter ist unendlich lang

$$\rightarrow \vartheta_1 = 0; \quad \cos \vartheta_1 = 1$$

$$\vartheta_2 = 180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad \cos \vartheta_2 = -1$$

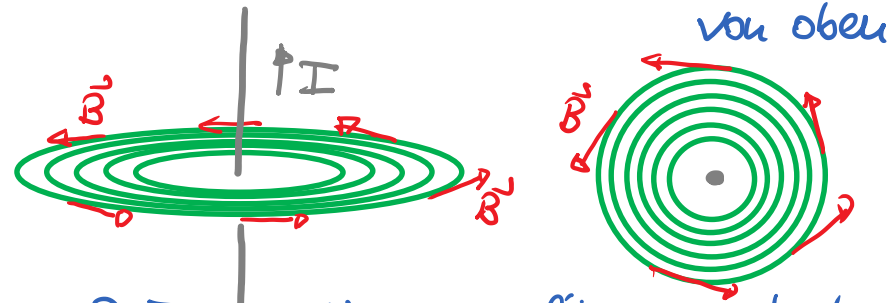
$$\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 = 2$$

→ unendlich langer, gerader Leiter:
 B -Feld in Punkt P im Abstand y ist

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{y}$$

$\vec{B} \perp$ Leiter und $\vec{B} \perp \vec{y}$

$B \sim \frac{1}{y}$; $B \sim I$; B unabh. von x, z



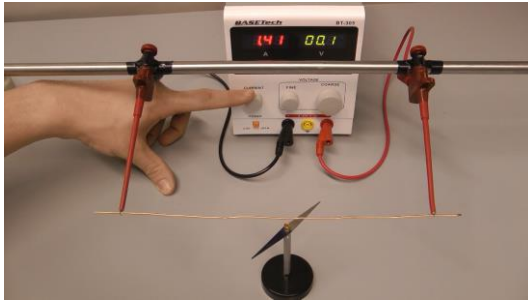
↳ B -Feld verläuft kreisförmig um Leiter
 Umlaufrichtung: rechte Hand

Daumen: \vec{I}
 Finger: \vec{B}

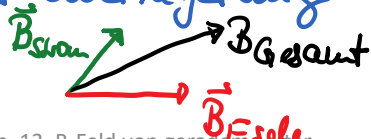
Beispiel: $I = 5A$ Abstand $y = 4cm$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow B &= \frac{\mu_0}{2r} \cdot \frac{5A}{0,04m} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}}{2r} \cdot \frac{5A}{4 \cdot 10^{-2}m} \\ &= 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{N \cdot A}{m} \\ &= 2,5 \cdot 10^{-5} T \end{aligned}$$

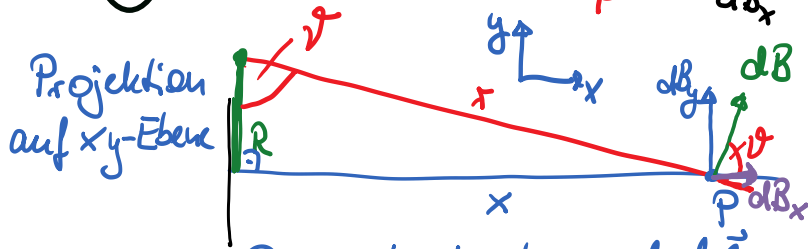
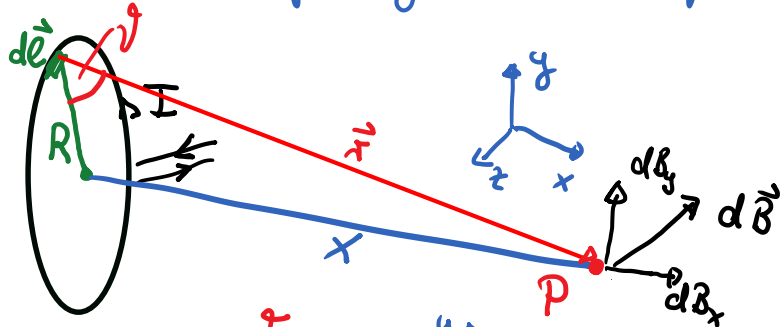
Vergleich: Erdmagnetfeld $\sim 10^{-4} T$



Ausrichtung der Kompassnadel
entsprechend der Überlagerung
beider Felder



b) Magnetfeld auf der Achse einer kreisförmigen Leiterschleife



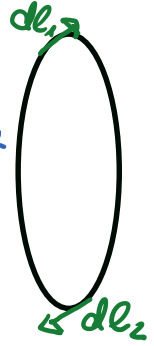
B-Feld in P von Leiter-element $d\vec{l}$

• $d\vec{B}$ in xy -Ebene $\rightarrow d\vec{l} \perp \vec{r}$

• $dB = |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{dl}{r^2}$

$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l}}{x^2 + R^2}$

• für jedes $d\vec{l}_1$ gibt es ein entsprechendes Element $d\vec{l}_2$ auf der gegenüberliegenden Seite der Schleife, deren dB_y sich aufheben



\rightarrow aus Symmetriegründen: $B_y = 0$
 $B_z = 0$

• $dB_x = dB \cdot \cos \vartheta$
mit $\cos \vartheta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$

• $B_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{\cos \vartheta}{x^2 + R^2} dl$

$= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int dl$

Schleife
Umfang der Schleife

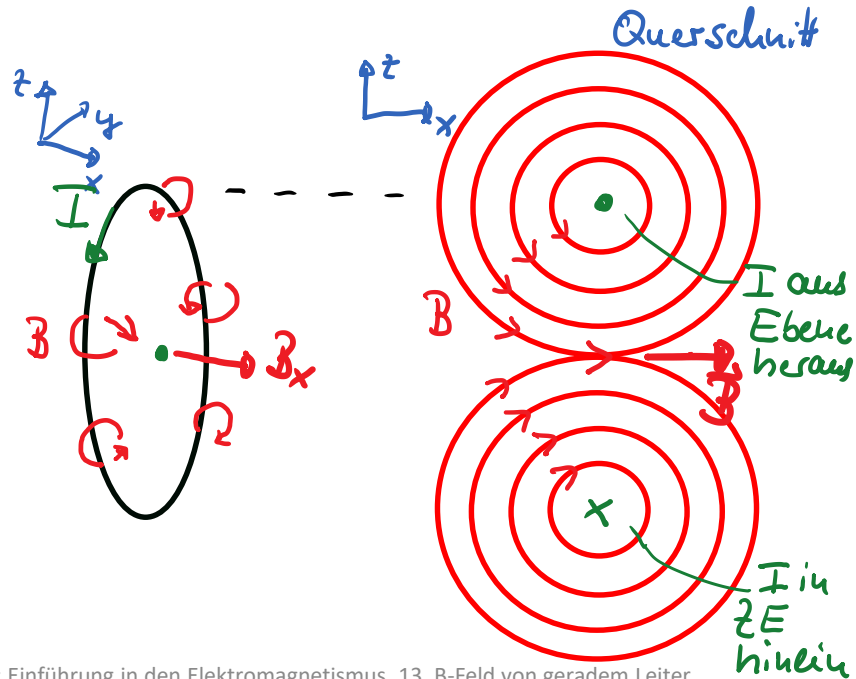
$= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R$

$\hookrightarrow B_x = \frac{\mu_0}{2} \cdot I \cdot \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$

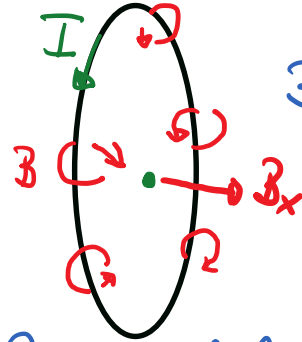
$$\hookrightarrow B_x = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

x : Abstand

Radius



Betrachtung für zwei Grenzfälle:
i) $x=0$, Punkt im Zentrum der Schleife



$$B_{x, z} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{1}{R}$$

ii) Punkt auf Achse in großer Entfernung

$$x \gg R \rightarrow x^2 + R^2 \approx x^2$$

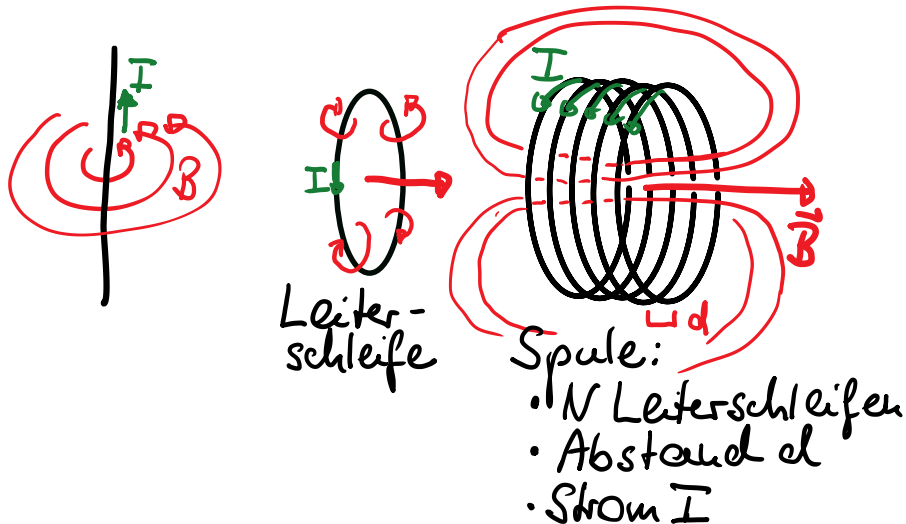
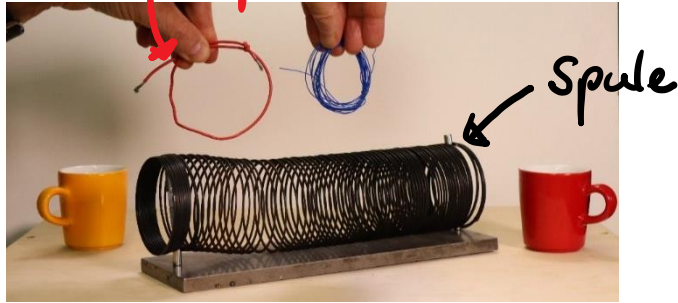
$$\hookrightarrow B_x = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{x^3}$$

mit dem magu. Moment $p_B = I \cdot \underbrace{\pi R^2}_{\text{Fläche}}$

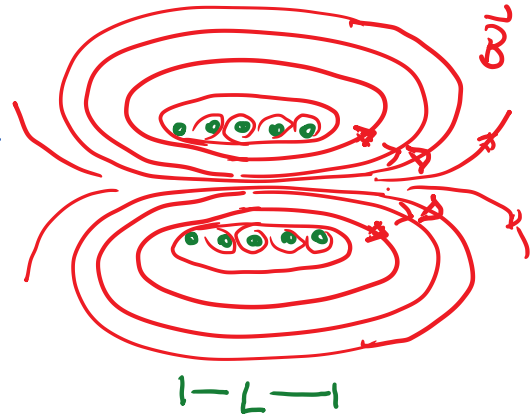
$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_B}{x^3}$$

c) Magnetfeld einer Spule

Leiterschleife



Querschnitt
Zylindersymmetrie



B-Feld kann für eine Zylinderspule berechnet werden (ohne Herleitung):

Zentrum der Spule: $B_z = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{L}$

am Rand der Spule: $B_R = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{L}$

\leftarrow Anzahl
 \leftarrow Länge

Experiment: B-Feld einer Spule

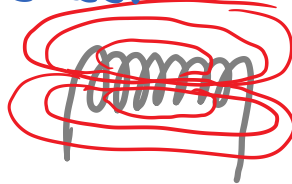


- Spule: $N=140$ Wicklungen, $L=0,4\text{m}$
 $n = N/L = 350\text{ m}^{-1}$ $\phi = 1,5\text{cm}^2$
- Strom: $I = 0 - 5\text{A}$
- Messung von B: Hall-Sensor

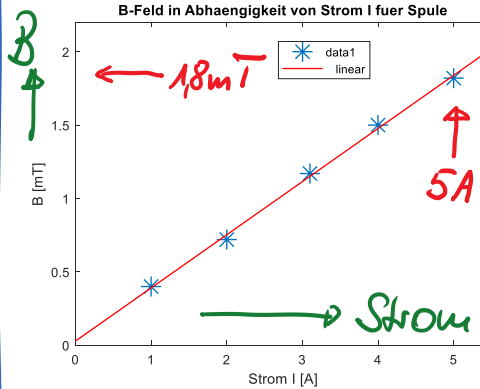
Theorie:

$$B_{\text{Zentrum}} = \mu_0 \cdot I \cdot n$$

$$B_{\text{Rand}} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot I \cdot n$$

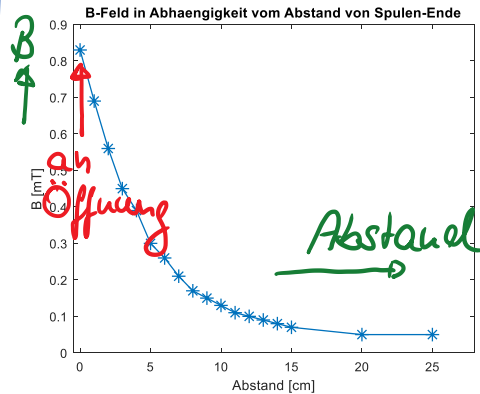


Messung: im Zentrum der Spule
 • B als Funktion des Stromes I



- $B \sim I$ ✓
- für $I = 5\text{A}$
 $B_{\text{Zentrum}} = \mu_0 \cdot I \cdot n$
 $= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 5\text{A} \cdot 350\text{ m}^{-1}$
 $= 2,2\text{ mT}$
 $B_{\text{Empf}} \approx 1,8\text{ mT}$ } ungef. gleich!

• B als Funktion vom Abstand



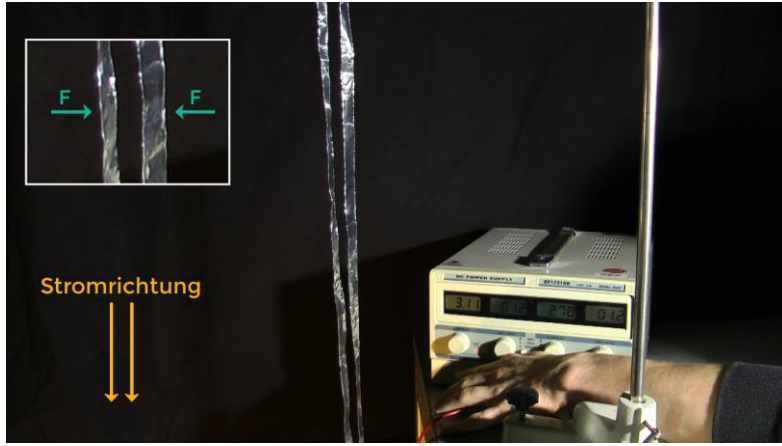
- ungenau
 $B \sim \frac{1}{\text{Abstand}}$

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

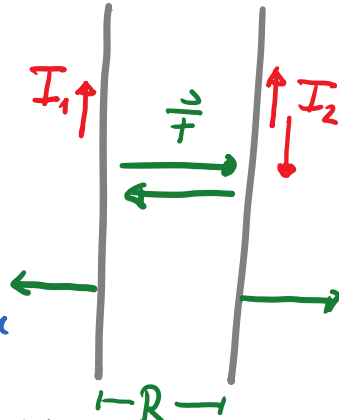
14. Kraft zwischen geraden,
stromdurchflossenen Leitern

Experiment: parallele Leiter mit Strom



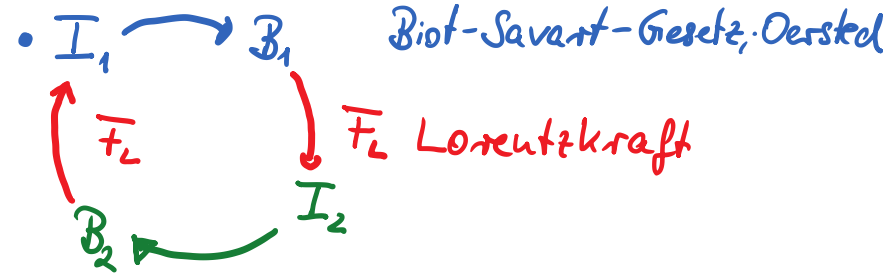
Beobachtung:

- Kraft entsteht zwischen Leitern
- anziehend oder abstoßend, abhängig von Stromrichtung

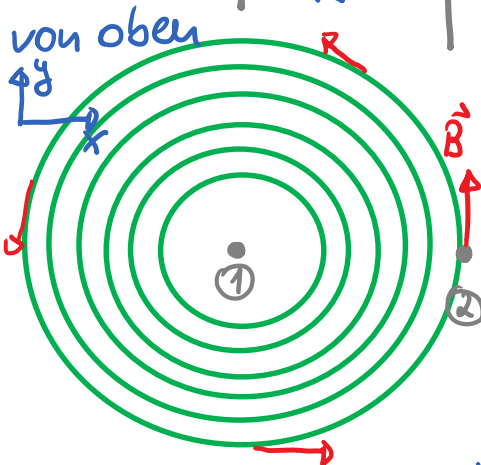
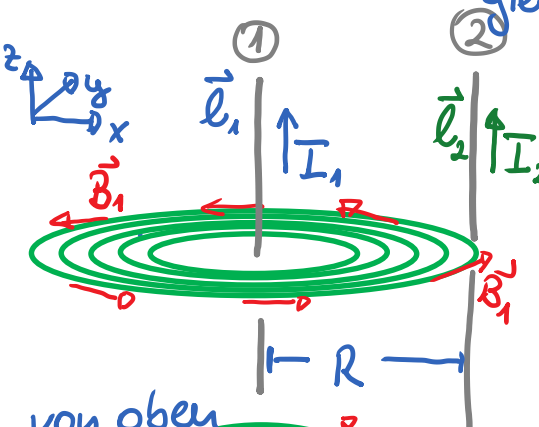


- Coulomb-Kraft ist nicht die Erklärung, da Elektronen im Leiter unabh. von I

↳ Erklärung über B -Feld & Lorentzkraft



Kraft zwischen parallelen Leitern: gleiche Stromrichtung



• I_1 erzeugt
kreisförmiges
 B -Feld:
 $B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \cdot \frac{1}{R}$
Abstand
(siehe Kap. 13)

Richtung:
 $\vec{e}_1 = (0, 0, e_1)$
 $\vec{e}_2 = (0, 0, e_2)$
 \vec{B}_1 in Leiter 2:
 $\vec{B}_1 = (0, B_1, 0)$
 $\hookrightarrow \vec{e}_2 \perp \vec{B}_1$

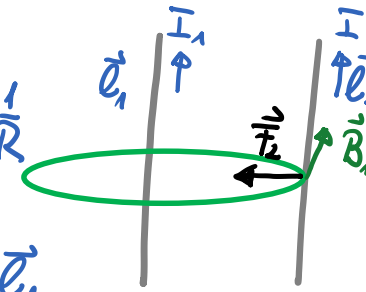
• Lorentz-Kraft von ① auf ②:

$$\vec{F}_2 = I_2 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{B}_1$$

$$F_2 = |\vec{F}_2| = I_2 \cdot l_2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \cdot \frac{1}{R}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l_2 \cdot \frac{1}{R}$$

Richtung: von \vec{e}_2 auf \vec{e}_1



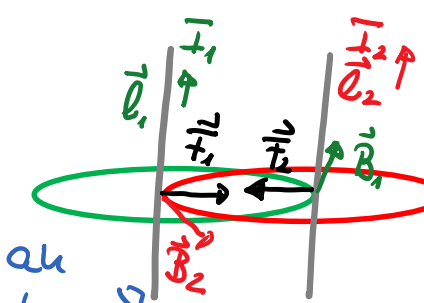
• ebenso für Kraft von ② auf ①:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_2 \cdot \frac{1}{R}$$

$$F_1 = I_1 \cdot l_1 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} I_2 \cdot \frac{1}{R}$$

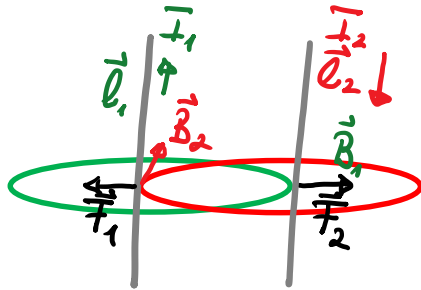
$$l_1 = l_2$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



die Leiter ziehen sich an
für gleiche Stromrichtung!

- für parallele Leiter mit entgegengesetzter Stromrichtung:



↳ wie zuvor:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2r} I_1 \cdot l_1 \cdot \frac{1}{R}$$

aber die Kraftrichtung ist gedreht

→ abstoßende Kräfte,
wenn Stromrichtung gedreht

↳ mechanische Kraftmessung
abhängig vom Strom

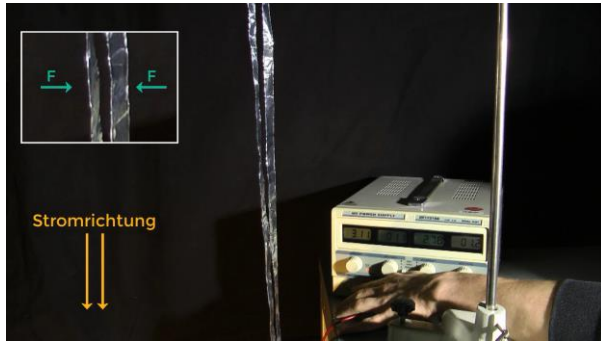
Definition des Amperes:

Zwei gerade, parallele Leiter in einem Abstand von 1m haben einen Strom $I = 1A$, wenn die Kraft pro 1m Leiterlänge $2 \cdot 10^{-7} N$ beträgt.

Anmerkung: mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$

Abschätzung:

$$I_1 = I_2 = 3 \text{ A} ; R = 3 \text{ cm} ; l_1 = l_2 = 1 \text{ m} = l$$



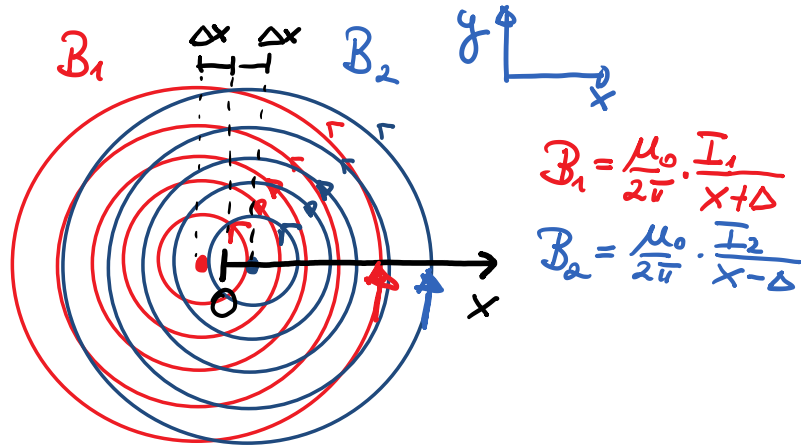
$$\begin{aligned} \hookrightarrow \bar{F}_1 = \bar{F}_2 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l \cdot \frac{1}{R} \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N}}{2\pi \text{ A}^2} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m} \cdot \frac{1}{0,03 \text{ m}} \\ &= 6 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

zum Vergleich: Gewichtskraft eines
Zuckerwürfels (ca. 3g)

$$\bar{F}_G = m \cdot g = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ N} > \bar{F}_1$$

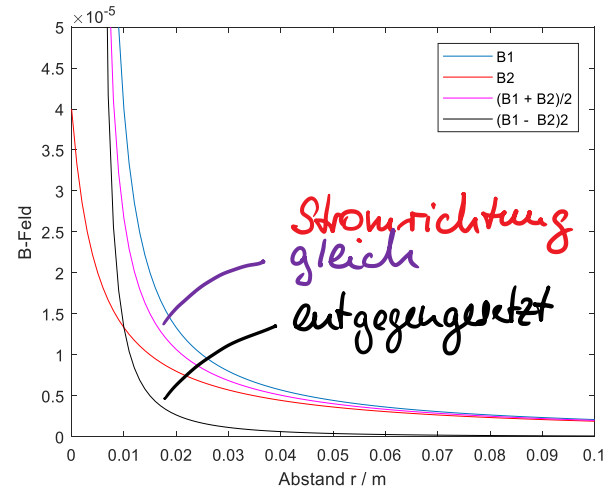
Abstandsabhängigkeit des B-Feldes
für zwei parallele Leiter

• Leiter in Position $\pm \Delta x$, Strom in z -Richtung



a) I_1 & I_2 in gleicher Richtung
→ Verstärkung

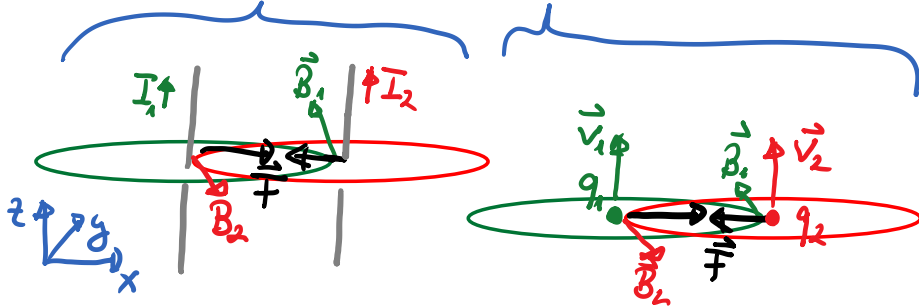
b) I_1 & I_2 in entgegengesetzte Richtung
→ Abschwächung
& schneller Abfall mit Abstands-
zunahme



Zusammenhang von Coulomb-Kraft und Lorentz-Kraft:

Gedankenexperiment:

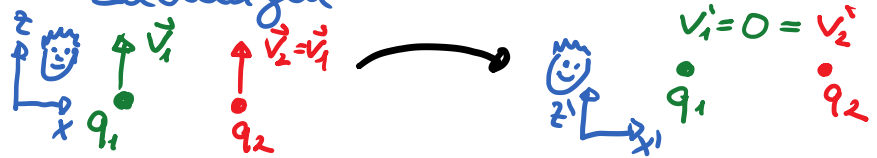
a) Strom oder bewegte Ladung
 $\rightarrow \vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B} = q \vec{v} \times \vec{B}$



- beide Beschreibungen sind äquivalent!

\rightarrow Anziehende Kraft zwischen sich mit gleicher Geschw. $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ bewegenden Ladung

b) gleiches Experiment, aber Beobachter bewegt sich mit den Ladungen



- im Bezugssystem des bewegten Beobachters: Ladungen erscheinen in Ruhe
 \rightarrow kein B -Feld & keine Lorentzkraft

Widerspruch

- die Kraft kann nicht davon abhängen, ob der Beobachter sich bewegt?
 \rightarrow Coulomb- und Lorentz-Kraft hängen zusammen
 \rightarrow E - und B -Felder sind gekoppelt

Auflösung des Widerspruchs durch Relativitätstheorie

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

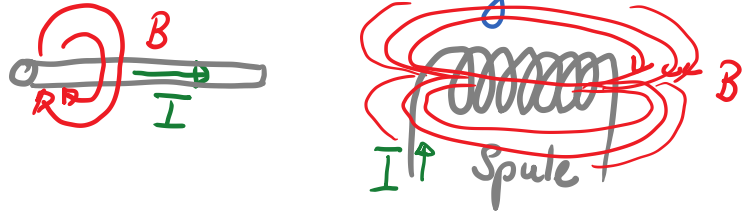
15. Der magnetische Fluß,
das Ampère'sches Gesetz

Ziel: Einfache Beschreibung von \vec{B} -Feldern

- bewegte Ladung \rightarrow \vec{B} -Feld
 \rightarrow Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = I \vec{L} \times \vec{B}$

die Quellen des \vec{B} -Feldes sind elektrische Ströme; es gibt keine „magnetische Ladung“ (magn. Monopole)

\hookrightarrow \vec{B} -Feldlinien sind geschlossen



\hookrightarrow Biot-Savart-Gesetz:

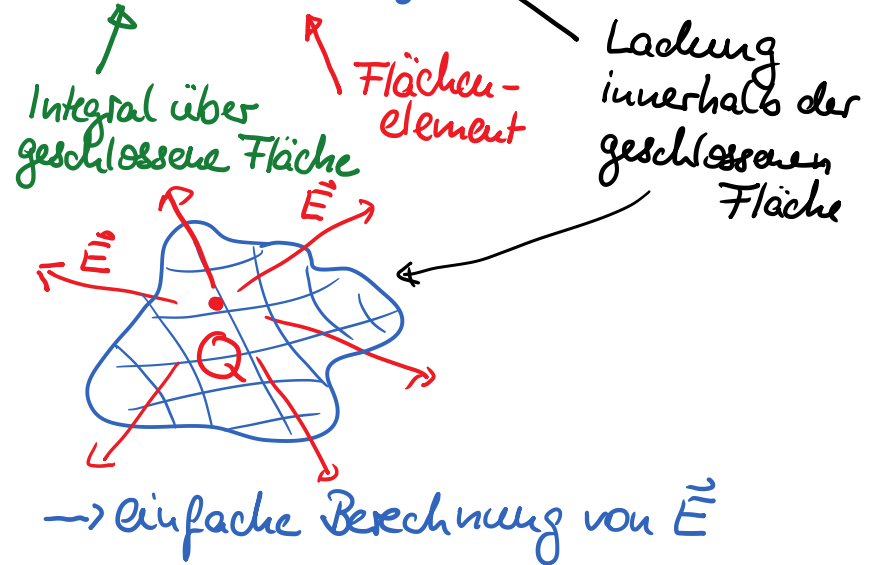
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Vergleich mit \vec{E} -Feld:

- Ladung \rightarrow \vec{E} -Feld
 \rightarrow Coulomb-Gesetz

\hookrightarrow Gauß'sches Gesetz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



- B-Feldlinien sind geschlossen

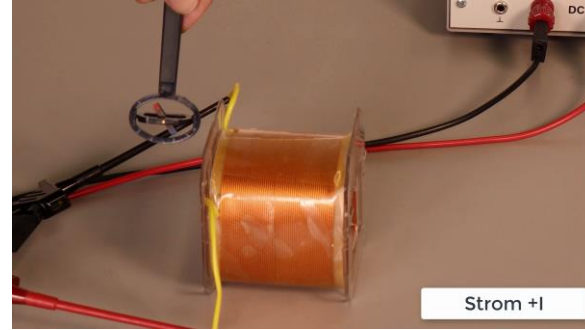
→ magnetischer Fluss durch geschlossene Fläche = 0:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

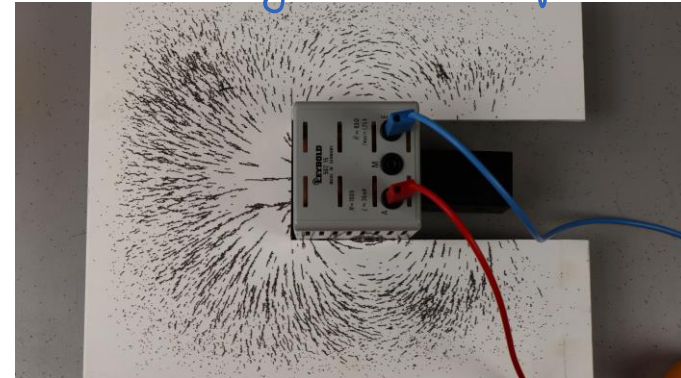


unabhängig von der Form der Fläche:
es laufen so viele B-Feldlinien hinein
wie hinaus!

- B-Felder sind geschlossen!
- B-Feld einer Spule: Darstellung:
- Ausrichtung eines Magneten



- Ausrichtung von Eisenspänen



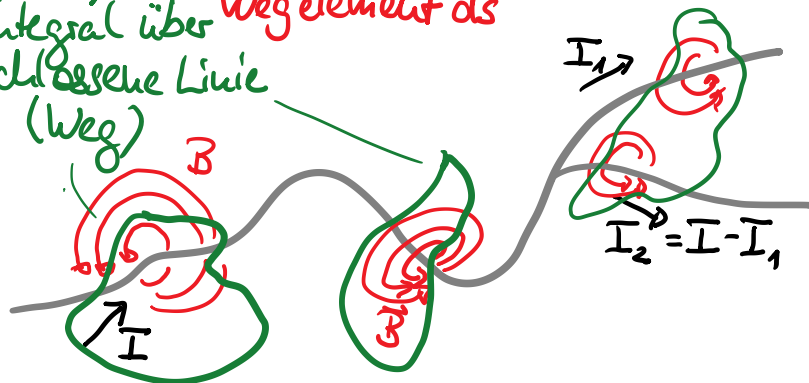
- elektrischer Strom \rightarrow \vec{B} -Feld um Strom herum

\hookrightarrow Ampère'sches Gesetz:

Das Integral der tangentialen Komponente des \vec{B} -Feldes entlang einer geschlossenen Linie ist proportional zum Strom, der innerhalb der Fläche dieser Linie fließt.

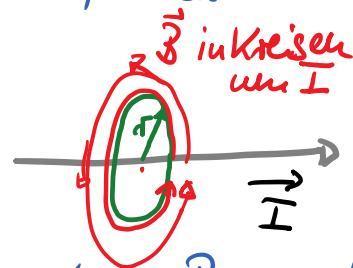
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

Integral über geschlossene Linie (Weg)
Weg element $d\vec{s}$



\rightarrow einfache Möglichkeit zur Berechnung von \vec{B} -Feldern

a) gerader, unendlicher Leiter \vec{B} bz Leiter



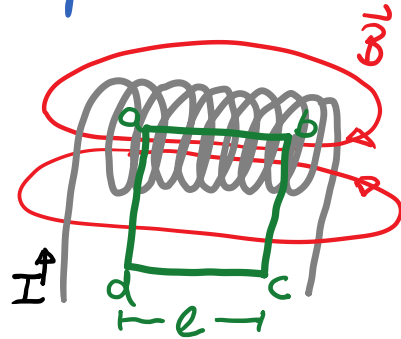
- Symmetrie: B nur abh. von r
- Wahl der Integration: Kreis um Leiter

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= B \oint ds \\ &= B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}$$

in Übereinstimmung mit Rechnung aus dem Biot-Savart-Gesetz

b) Magnetfeld einer Spule



näherungsweise Berechnung von B innerhalb der Spule:

- Wahl des Integrationsweges: Rechteck $abcd$

- für bc und da : $\vec{B} \approx \perp d\vec{s}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \underbrace{\int_{bc} \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{\approx 0, \text{ da } \vec{B} \perp d\vec{s}} + \underbrace{\int_{cd} \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{\approx 0, \text{ da } \vec{B} \perp d\vec{s}} + \underbrace{\int_{da} \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{\approx 0, \text{ da } \vec{B} \perp d\vec{s}}$$

außerhalb der Spule klein

$$\approx \int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{ab} B \cdot ds, \text{ da } \vec{B} \parallel d\vec{s} \text{ innerhalb}$$

$$= B \cdot \int_a^b ds, \text{ da } \vec{B} \text{ ungefähr homogen}$$

$$= B \cdot l = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

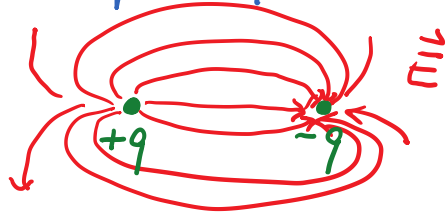
↗ Anzahl der Windungen

$$\hookrightarrow B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l} = \mu_0 \cdot I \cdot n$$

Ergebnis wie Anzahl der Windungen pro Länge mit Biot-Savart-Gesetz!

Anmerkung:

- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \iff$ "es gibt keine magnetischen Monopole"
- Dipole?
 - elektrischer Dipol: $\pm q$ im Abstand l



- magnetischer Dipol: Ringstrom



- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$ Ampère'sches Gesetz
ein Strom erzeugt ein \vec{B} -Feld

- abstrakte Beschreibung
- Integralgleichungen
- einfach und allgemein

```

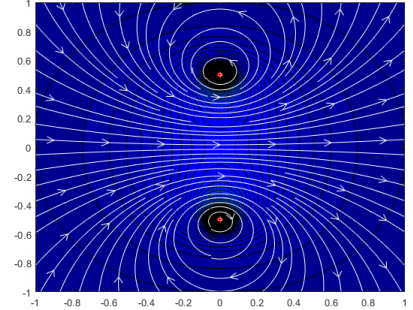
% A small program which test function m_field_new
clear all;
step=0.02
I=400;
a=0.5;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xmin=-1;
xmax=1;
rmin=-1;
rmax=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[X,R] = meshgrid (xmin:step:xmax,rmin:step:rmax);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[Bx,Br]=m_field(I,0.5,0,0,xmin,rmin,xmax,rmax,step)
;
I=I;
Bx=Bx';
Br=Br';
B=sqrt(Bx.^2+Br.^2);
contourf(X,R,B,100);
shading flat
colormap('jet')
hold on
quiver(X,R,Bx,Br,'k')
plot(0,0.5,'*r');
plot(0,-0.5,'*r');
h=streamslice(X,R,Bx,Br);
set(h,'Color','w')

```

```

function [Bx,Br]=m_field(i,a,x0,r0,xmin,rmin,xmax,rmax,step)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% [Bx,Br]=m_field(i,a,x0,r0,xmin,rmin,xmax,rmax)
% Bx - axial comp. of mag. field
% Br - radial comp. of mag. field
% i=coil current; % a=coil radius;
% x0, y0 - coil coordinate
% xmin,ymin,xmax,ymax - interest domain for magnetic field
% succes! % created by Iulian Teliban
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
miu0=4*pi*10^-7;
B0=(i*miu0)/(2*a);
in1=1;
for x=(xmin-x0):step:(xmax-x0)
    in2=1;
    for r=(rmin-r0):step:(rmax-r0)
        if (r~=0)
            al=abs(r/a);
            be=abs(x/a);
            ga=(x/r);
            q=((1+al)^2+be^2);
            k=sqrt(4*al/q);
            [K,E] = ellipke(k^2);
            Bx(in1,in2)=B0*(1/(pi*sqrt(q)))*(E*(1-al^2-be^2)/(q-4*al)+K);
            Br(in1,in2)=B0*(ga/(pi*sqrt(q)))*(E*(1+al^2+be^2)/(q-4*al)-K);
        else
            Bx(in1,in2)=0;
            Br(in1,in2)=0;
        end
        X(in1,in2)=x;      R(in1,in2)=r;      in2=in2+1;
    end
    in1=in1+1;
end
s=size(Bx);
for i=2:s(1)-1
    for j=2:s(2)-1
        if (Bx(i,j)==0 & Br(i,j)==0)
            Bx(i,j)=1/6*(Bx(i-1,j-1)+Bx(i-1,j+1)+Bx(i,j-)+Bx(i,j+)+Bx(i+1,j-1)+Bx(i+1,j+1));
            Br(i,j)=1/6*(Br(i-1,j-1)+Br(i-1,j+1)+Br(i,j-1)+Br(i,j+1)+Br(i+1,j-1)+Br(i+1,j+1));
        end
    end
end
end
end

```

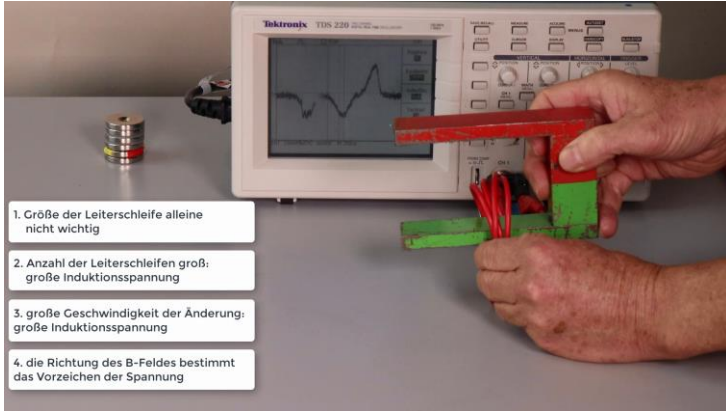


Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

16. Faraday'sches Induktionsgesetz

Experiment: Leiterschleife im B-Feld



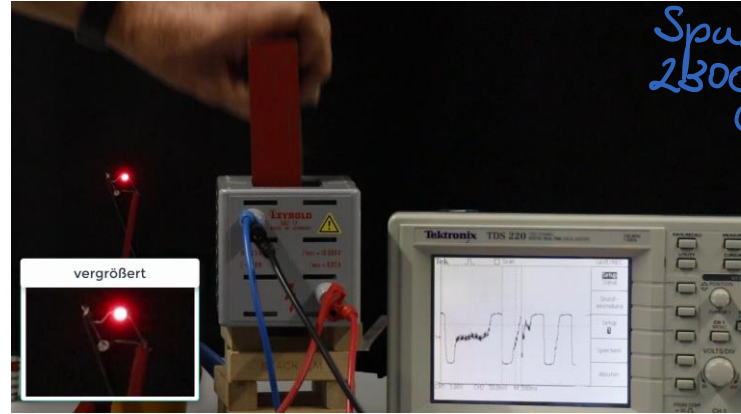
1. Größe der Leiterschleife alleine nicht wichtig
2. Anzahl der Leiterschleifen groß: große Induktionsspannung
3. große Geschwindigkeit der Änderung: große Induktionsspannung
4. die Richtung des B-Feldes bestimmt das Vorzeichen der Spannung



Beobachtung: Spannung U entsteht, wenn Magnet oder Spule bewegt werden.

→ Induktionsspannung U_{ind}

Experiment: U_{ind} - Strom



Spule mit 23000 Windungen

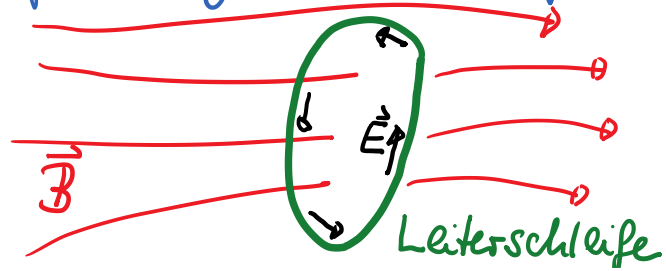


Spannung / Strom: \pm → 2 LEDs

Beobachtung: Induktionsspannung U_{ind} wird beeinflusst von

- Magnetfeld
- Geschwindigkeit
- Spulenanzahl
- relativer Ausrichtung / Lage

↳ Folgerung von Faraday:
 Jede Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife induziert eine Spannung in der Schleife.



→ damit verbunden ist ein elektrisches Feld \vec{E} entlang der Schleife

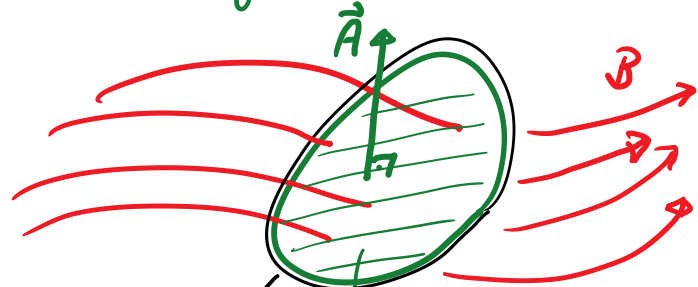
$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

↑
 geschlossenes Integral um Leiterschleife

↳ Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_m = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

magu. Fluss $\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ ↑ zeitliche Änderung



Integrationsweg entlang Schleife

$U_{\text{ind}} \neq 0$, wenn der magnetische Fluss sich ändert

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_m = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Anmerkungen:

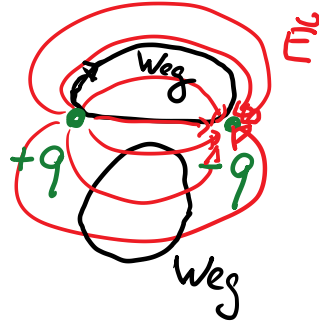
- bisher: E -Feld geht von Ladungen aus

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

und daher auch

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

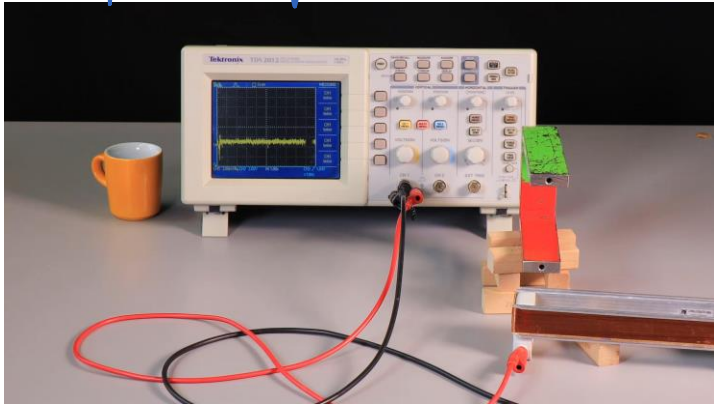
gilt nur im
statischen Fall



jetzt: zeitliche Änderungen $\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$
des magnetischen Flusses sind die
Quellen von Spannungen und
damit von E -Feldern

- Minuszeichen im Faraday-Gesetz: die Richtung des E -Feldes wird bestimmt
→ Kapitel: Lenz'sche Regel

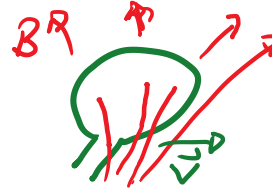
Beispiele: Spule im B-Feld



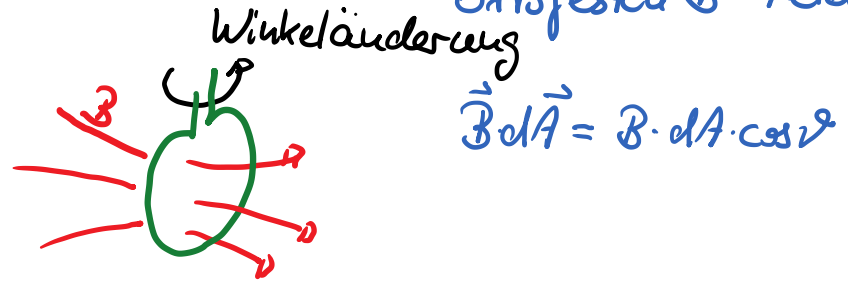
$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_m = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

verschiedene Möglichkeiten
zur Erzeugung von
Änderungen ◻

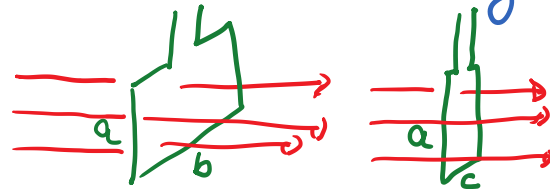
a) Bewegung einer Leiterschleife
relativ zum B-Feld



b) Drehung der Leiterschleife im
ortsfesten B-Feld

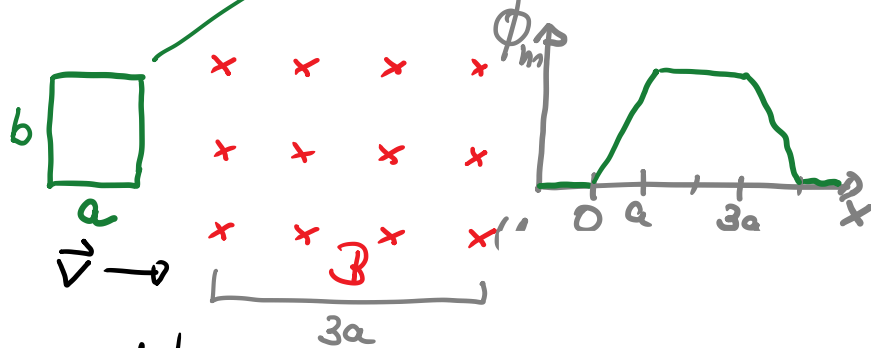


c) Flächenänderung



Beispiel:

homogenes \vec{B} -Feld \perp Zeichenebene
rechteckige Leiterschleife bewegt
sich mit $v = \text{const.}$



$$U = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

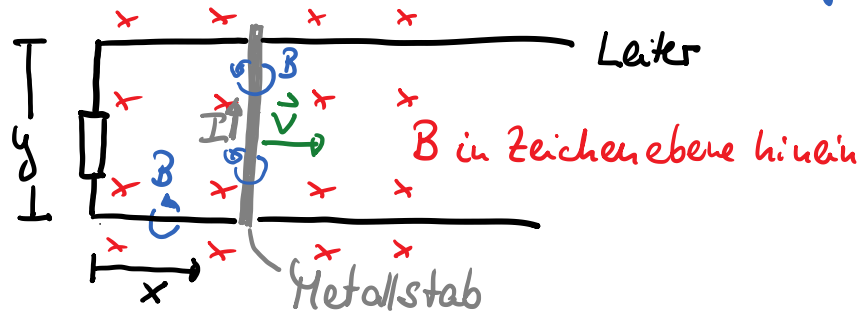
$\vec{B} \cdot d\vec{A} = -B \cdot b \cdot v$

hier: Φ_m ändert sich von 0 auf $a \cdot b \cdot B$
in der Zeit Δt mit $v = \frac{a}{\Delta t}$

↳ maximaler Wert $|U_{\text{max}}| = B \cdot b \cdot v$

→ große Geschw. \Leftrightarrow große Induktionsspannung

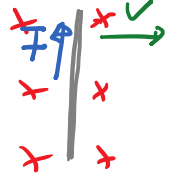
Zusammenhang von Faraday-Gesetz und Lorentz-Kraft:



- Metallstab in Kontakt mit Leiter
Geschw. $v = \frac{dx}{dt}$
 - in Leiterschleife: $\Phi_m = B \cdot A = B \cdot y \cdot x$
 $\frac{d\Phi_m}{dt} = B \cdot y \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot y \cdot v = |U|$ ①
- Induktionsstrom: Richtung so, daß das B -Feld dieses Stromes aus der Zeichenebene heraus kommt, also dem äußeren B -Feld entgegensteht

andere Beschreibung: Ladungen im bewegten Metallstab erfahren Lorentzkraft
 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$; $\vec{v} \perp \vec{B}$

↳ Strom entsteht, Ladung wird verschoben bis das entstehende E -Feld / Kraft die Lorentzkraft ausgleicht



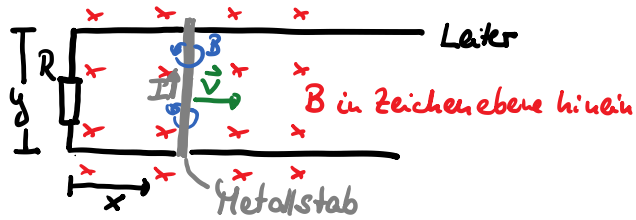
$$qE = qvB$$

$$\leadsto E \cdot y = U = yvB$$

← Übereinstimmung mit ①

↳ Lorentzkraft & Faraday Gesetz bieten gleichwertige Erklärungen!

Abschätzung der Induktionsspannung:

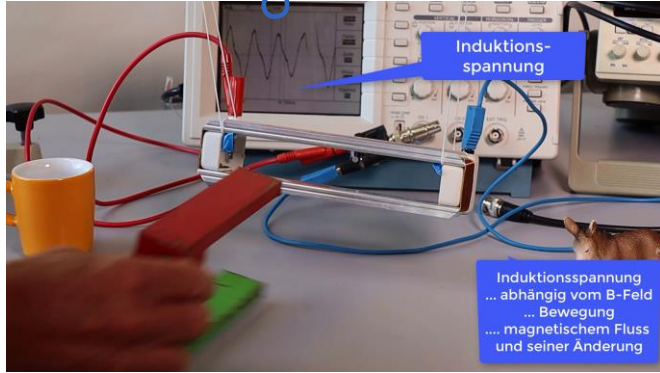


für $B = 1 \text{ T}$, $v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $y = 10 \text{ cm}$

$$\hookrightarrow U_{\text{ind}} = B y \cdot v = 1 \text{ T} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,1 \text{ V}$$

$$\text{für } R = 25 \Omega \rightarrow I = U/R = \frac{0,1 \text{ V}}{25 \Omega} \\ = 0,004 \text{ A}$$

Experimenteller Zusammenhang von Faraday-Gesetz und Lorentzkraft



a) Änderung des mag. Flusses

$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

hier: ändernde Bewegung von Leiterschleife führt zu Spannung

b)

U_0 äußere Spannung U_0
 \hookrightarrow Strom
 $\hookrightarrow \vec{F}_L = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$

hier: angelegte Spannung führt zu Bewegung der Leiterschleife

$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$
 $F_L = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$

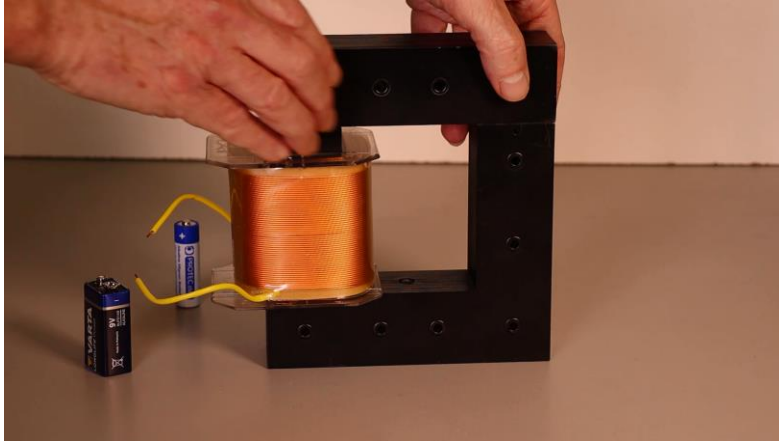
Zusammenhang!

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

16a. Induktionsspannung:
Wie groß ist sie? oder
Funken aus einer Batterie?

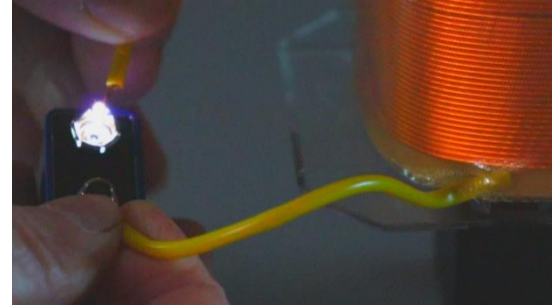
Experiment: Spule mit Eisenkern



- Spule & Eisenkern
- Batterie (1,5V)
 - ↳ Strom in Spule

Beobachtung:

- Strom in Spule: Kraft zwischen Eisen
- Abschalten des Stroms
 - ↳ Funken



Funken \equiv Hochspannung
— aus Batterie ? !

Erklärung:

- Batterie 1,5V

→ Strom in Spule

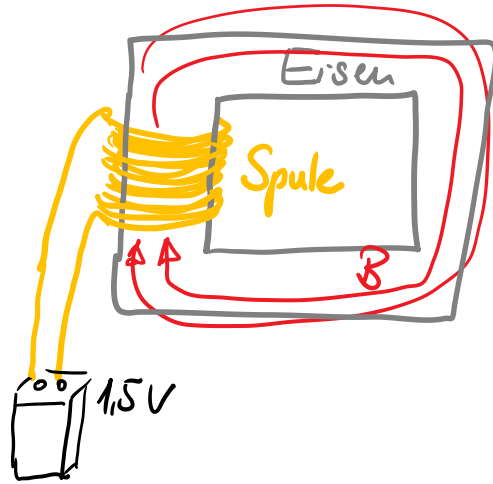
→ B-Feld der Spule

→ Magnetisierung des Eisens

→ Verstärkung des B-Feldes

begrenzung des Stroms durch Widerstand
in Batterie

→ Magnetischer Fluss $\Phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}$
in Spule



- Abschalten des Stroms:

→ B wird kleiner

→ Φ_m nimmt ab

↳ Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_m = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A}$$

zeitliche Änderung

↳ wenn Φ_m sich schnell ändert, so
ist die Induktionsspannung hoch!

Funken entstehen

→ Funken aus niedriger Spannungen

$$U \approx 1,5 \text{ V} \rightarrow U_{\text{ind}} > 10000 \text{ V}$$

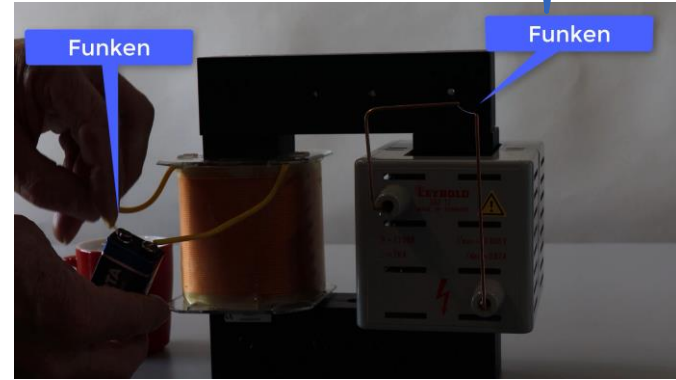
• im Alltag:

→ Gasexplosionen

→ Zerstörung von Elektronik

→ Zündkerze im Otto-Motor

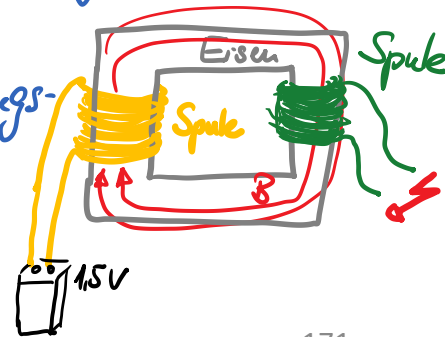
Induktionsspannung und Transformator



- Batterie 1,5 V → Strom
- Abschalten der Spannung: $U_{\text{ind}} \gg 1,5$

• Transformator: zweite Spule mit hoher Wicklungszahl → Verstärkung von U_{ind}

→ Funken in Luft über > 15 mm



Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

17. Lenz'sche Regel, Wirbelströme

oder
das Minuszeichen ⚠

Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$U_{\text{Ind}} = \oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \Phi_m = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A}$$

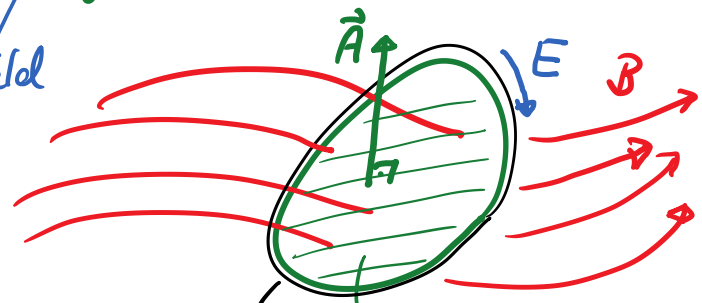
Induktionsspannung

$\nabla ?$

zeitliche Änderung

magu. Fluss $\Phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}$

E-Feld



Integrationsweg entlang Schleife

Fläche A

Warum das Minuszeichen?

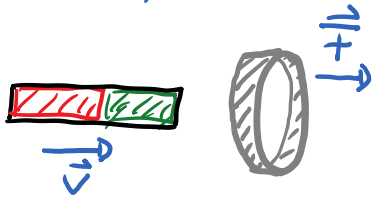
→ Lenz'sche Regel: die Induktionsspannung ist so gerichtet, daß ihre Wirkung der Ursache entgegensteht.

Erklärungen notwendig

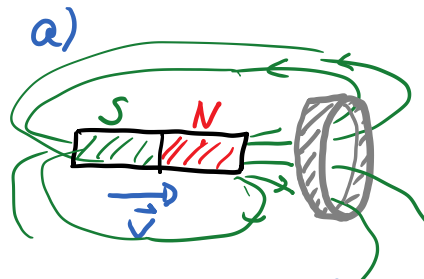
Experiment: Metallring & B-Feld



Beobachtung: der Metallring erfährt eine Kraft, wenn sich der magn. Fluss in ihm ändert.



- Bewegungsrichtung wichtig
- Ausrichtung des Magneten spielt keine Rolle

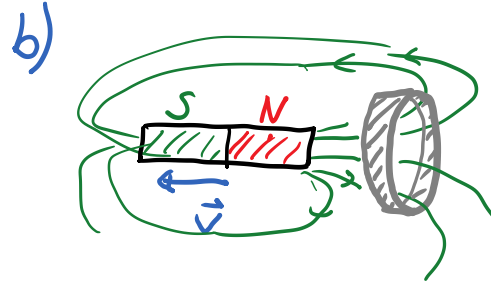


• Magnet bewegt sich auf Ring zu
 $\rightarrow \Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ wird größer

\rightarrow Strom I im Ring durch Umd



\rightarrow negative Änderung von Φ_m , die Flussänderung wird abgeschwächt



• Magnet bewegt sich weg vom Ring
 $\rightarrow \Phi_m$ wird kleiner



→ Induktion → Spannung → Strom

→ Abschwächung der Flussänderung

• ohne „-“: $\frac{d\Phi_m}{dt}$ würde verstärkt werden

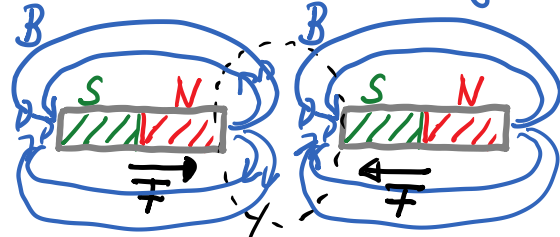
Kraftwirkung unabhängig von der Ausrichtung des Magneten



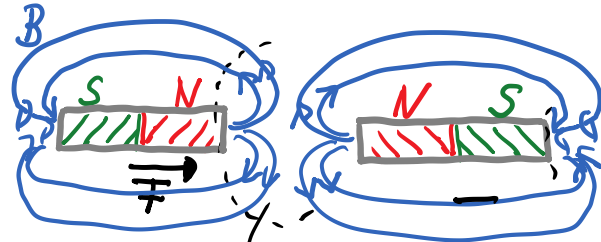
Ring mit Schlitz:
kein Ringstrom
→ kein B !



Kräfte zwischen Magneten



B -feld wird kleiner → aufziehende Kraft



B -feld wird größer → abstoßende Kraft

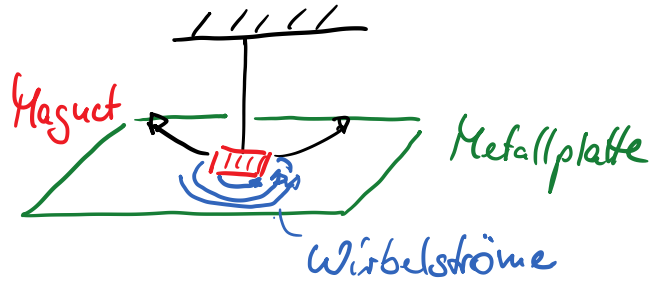
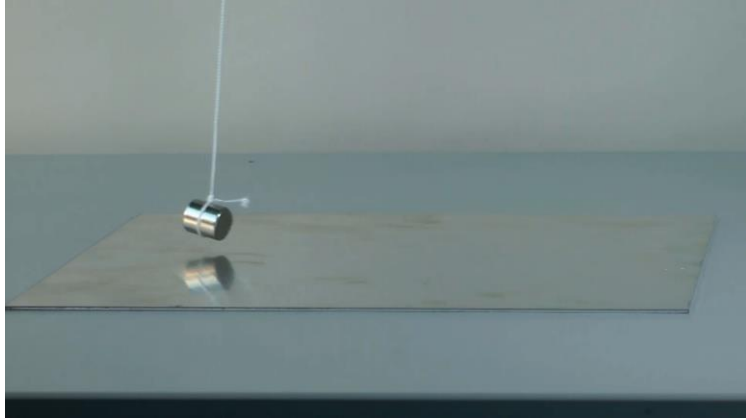
• Lenz'sche Regel ist Ausdruck der Energieerhaltung

Experimente



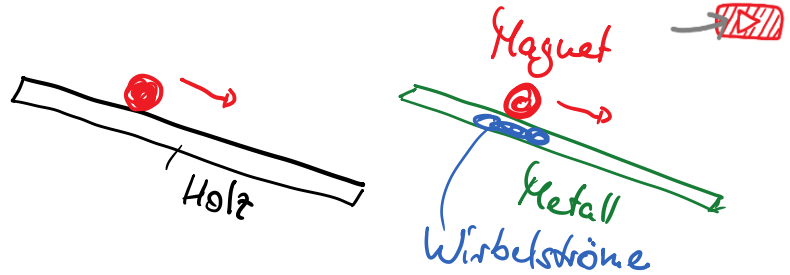
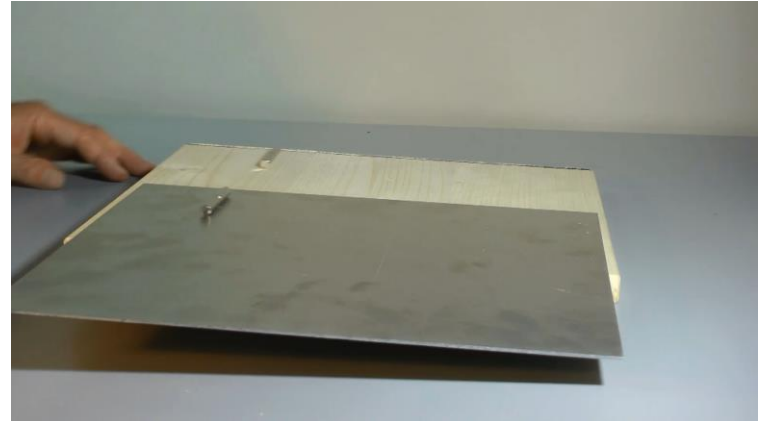
- Bremswirkung von Kupfer hoch:
 R klein $\rightarrow I$ groß $\rightarrow B$ groß
- $R \rightarrow$ Verlust von Energie,
die aus der Bewegung kommt
 \hookrightarrow Wirbelstrombremse

Beispiel: Wirbelstrombremse



→ Energie wird der Bewegung entzogen

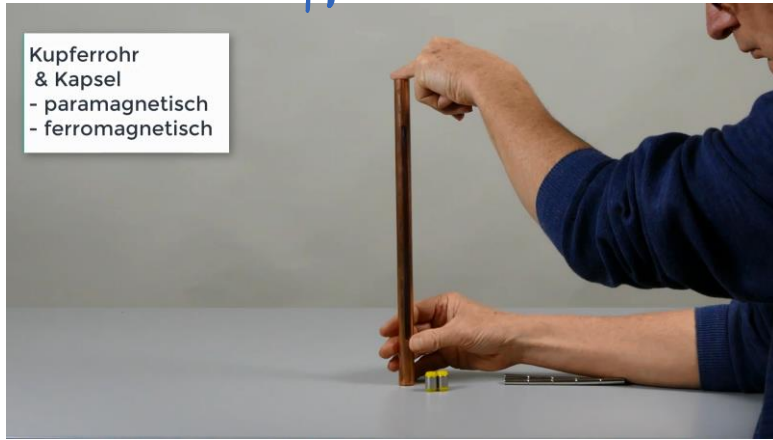
Abrollen von Magneten



Wirbelströme im ruhenden Metall, aber der sich bewegende Magnet wird gebremst

Beispiel: Wirbelstrombremse

- Fall im Kupferrohr



Beobachtung: ferromagnetische Kapsel fällt langsamer als paramagnetische
→ Wirbestrome durch bewegtes Magnetfeld

Anwendung: Wirbelstrombremse

- ohne mechanischen Kontakt
- ohne Verschleiß
- nur in der Bewegung

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

↑
▽
○

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

18. Elektrischer Generator

Generator von elektrischem Strom:

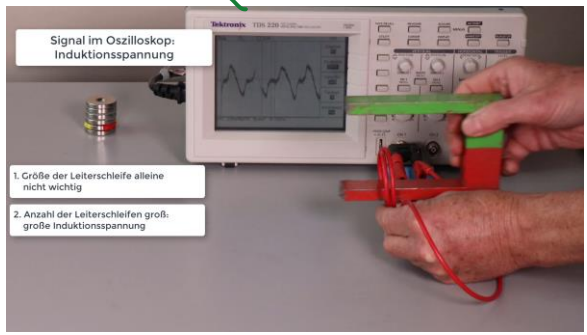
Prinzip: Faraday'sches Induktionsgesetz:

$$U_{\text{Ind}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_m = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

magu. Fluss $\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ ↑ zeitliche Änderung



$U_{\text{Ind}} \rightarrow I$



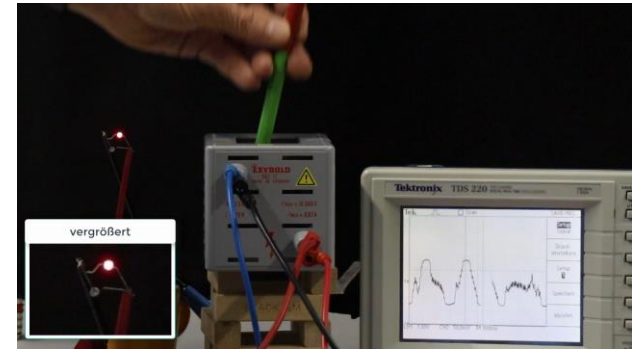
Signal im Oszilloskop: Induktionsspannung

- 1. Größe der Leiterschleife alleine nicht wichtig
- 2. Anzahl der Leiterschleifen groß: große Induktionsspannung

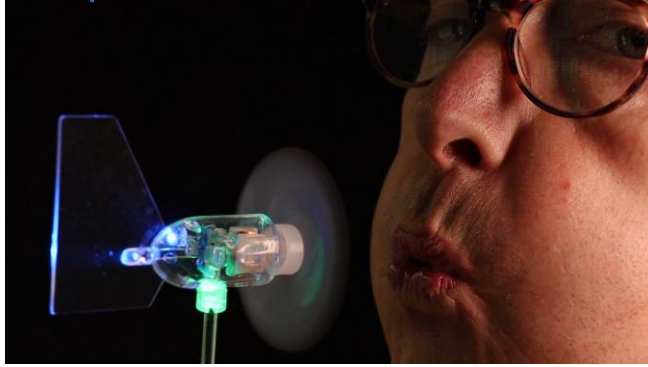


Beispiel: Bewegung von Magneten relativ zur Spule

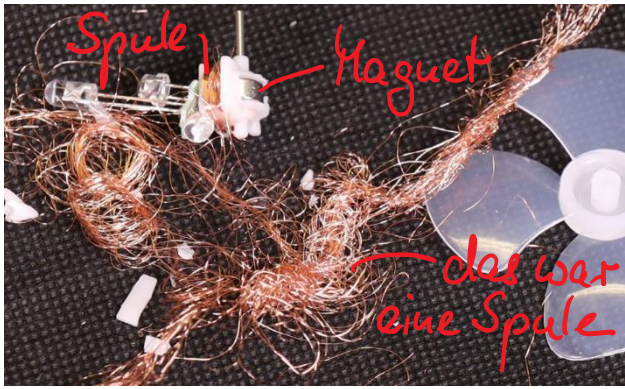
$\hookrightarrow U_{\text{Ind}} \rightarrow I$
 $\hookrightarrow \text{Licht}$



Beispiel: Turbine \leftrightarrow Drehbewegung



relative Bewegung von Spule und Magnet

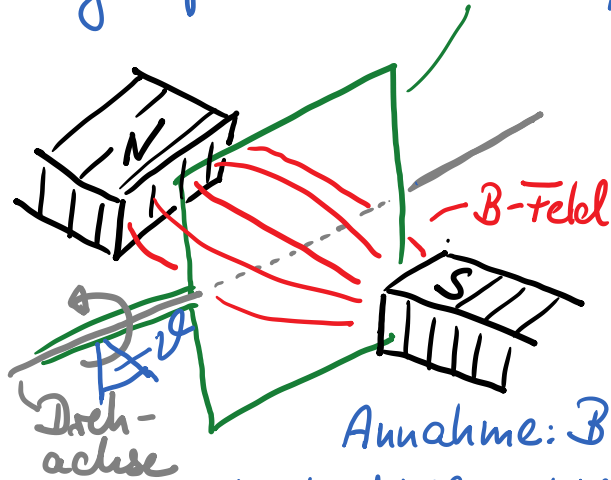


= "reverse engineering"

\rightarrow Drehbewegung: einfache Realisierung

- Abhängigkeit der Spannung / Strom von:
 - Magnet
 - Spule
 - Wicklungszahl
 - Rotationsfrequenz

Stromgenerator: einfacher Aufbau
 • Magnet fest • Leiterschleife rotierend



Annahme: B sei homogen
 Leiterschleife mit N Windungen

• mag. Fluss $\Phi_m = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \vartheta$

• Drehung der Spule im B -Feld mit Winkelgeschwindigkeit ω
 $\vartheta = \omega \cdot t + \vartheta$ Phase ϑ

$$\Phi_m = N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega t + \vartheta)$$

Induktionsspannung:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = +N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \vartheta)$$

sinusförmige Spannung

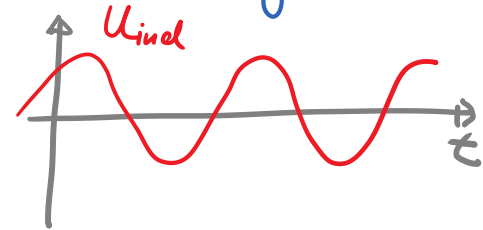
$U_{\text{ind}} \sim$ Fläche A

\sim Wicklungszahl N

$\sim B$

$\sim \omega \leftarrow$ schnelleres Drehen, große Spannung

\hookrightarrow einfacher Wechselstromgenerator



Beispiel: Spule $N=250$, $A=10\text{cm}^2$

$$\nu = 50\text{Hz} \quad B = 0,4\text{T}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow U_{\text{ind}} &= 250 \cdot 0,4\text{T} \cdot 10 \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot 50 \cdot \frac{1}{\text{s}} \cdot 2\pi \\ &= 31\text{V} \end{aligned}$$

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

19. Induktivität
und Selbstinduktion

Betrachtung einer Spule

Strom I

→ B -Feld

$$B \sim I$$

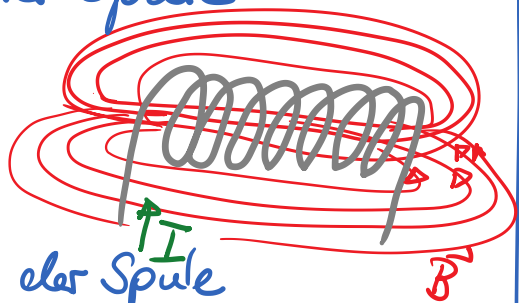
→ mag. Fluss in der Spule

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \sim I$$

$$\text{bzw. } \Phi_m = L \cdot I$$

↑
Selbstinduktion / Induktivität
als Proportionalitätsfaktor

- dies muss für jeden, beliebig geformten Stromkreis gelten: der Strom erzeugt ein B -Feld und dies zu einem mag. Fluss



$$\Phi_m = L \cdot I$$

mit Induktivität L

$$\text{Einheit: } [L] = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}} = 1 \text{H (Henry)}$$

Symbol im Schaltkreis:

- aus dem Faraday'schen Induktionsgesetz:

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - L \cdot \frac{dI}{dt}$$

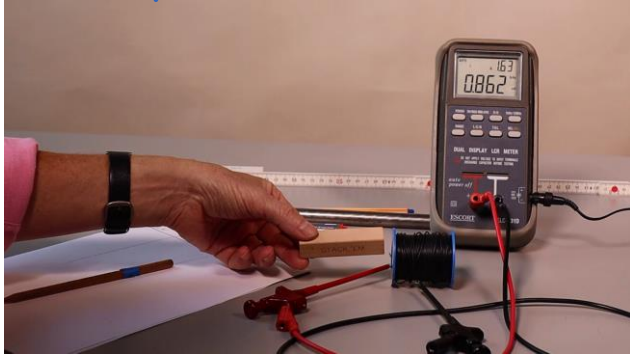
↑
Selbstinduktionsspannung

↑ zeitliche Änderung
des Stroms

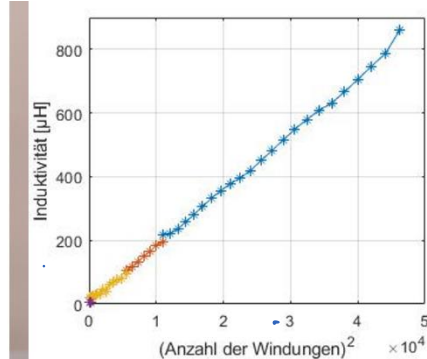
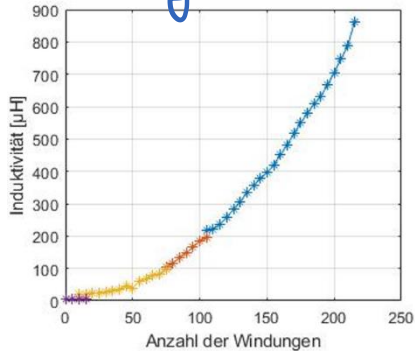
Induktivität L : jedes elektrische Bauteil / elektrischer Stromkreis besitzt L

Bestimmung von L : Berechnung
oder experimentell

Induktivität einer Kabelrolle: Experiment und Berechnung



Messung: Induktivität $L \sim N^2$ *Anzahl der Windungen*



- Messung: für $N=220$ Länge 5cm
Radius $r=1,5\text{cm}$: $L=860\mu\text{H}$

- Berechnung: mit $\Phi_m = L \cdot I$ **Experiment**

L für Spule mit N Windungen

$$L = \frac{N \cdot \Phi_m}{I}$$

- B -Feld im Inneren einer Spule: $B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l}$

$$L \rightarrow L = N \cdot \frac{A \cdot \mu_0 \cdot I \cdot N}{l}$$

$$= \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l} \quad \text{mit } A = \pi r^2$$

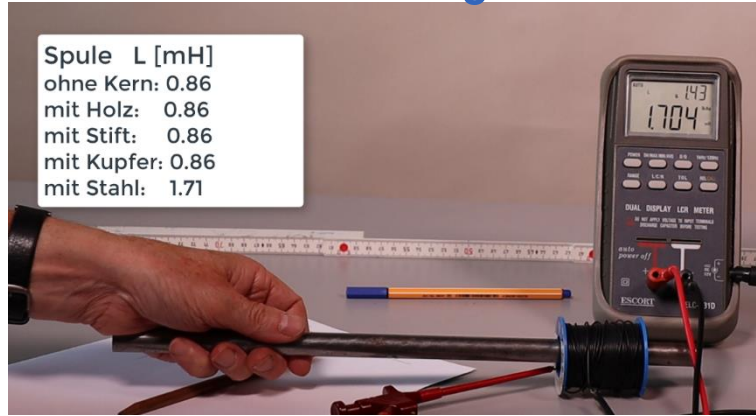
hier:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 220^2 \cdot \frac{(\pi \cdot 0,015\text{m}^2)}{0,05\text{m}}$$

$$= 860\mu\text{H}$$

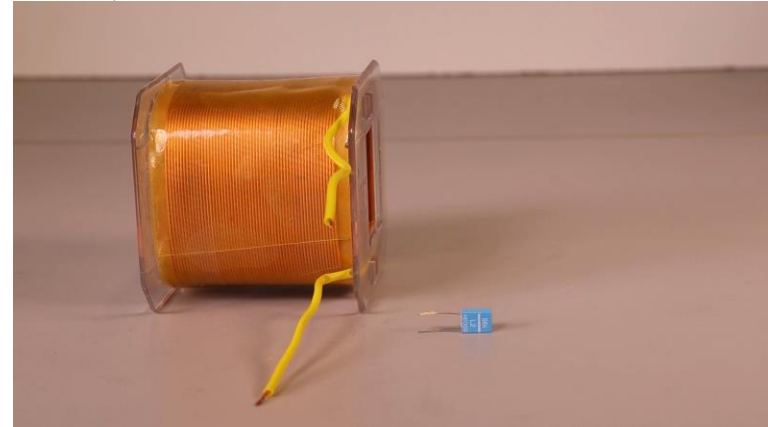
Übereinstimmung
mit Experiment

• zweite Beobachtung:



Induktivität L ist abhängig
von der Materie
→ L ist hoch für Eisen
→ Magnetisierung

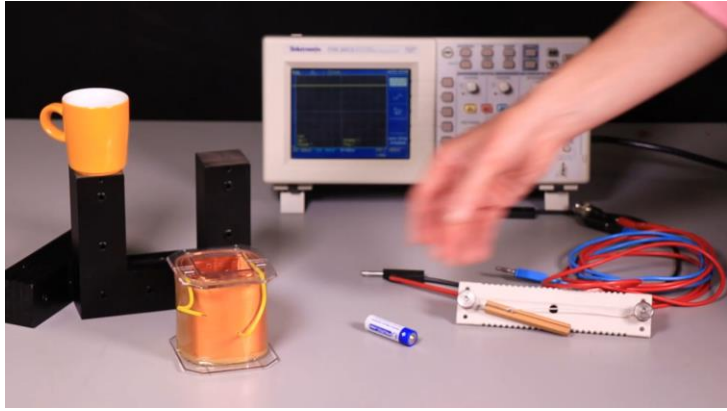
Bauformen:



für Elektronik: 
 L als Spule

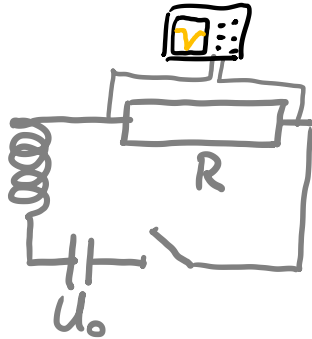


LR-Kreise: Einfache Stromkreise mit R und L

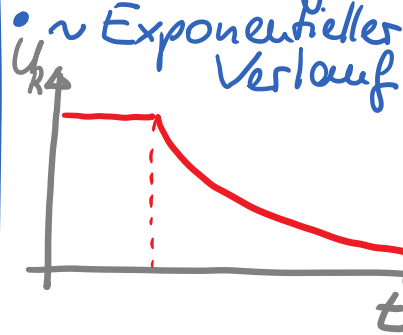


Reihenschaltung:

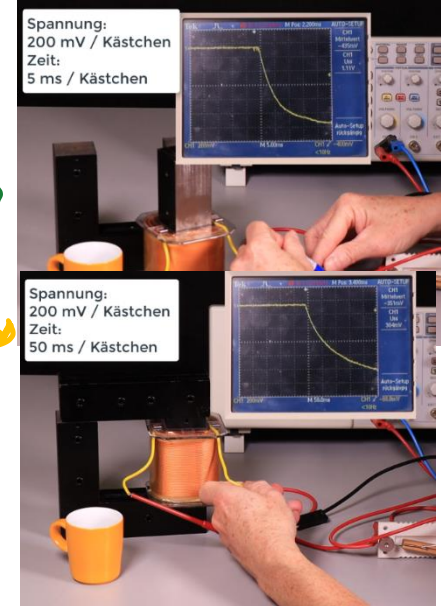
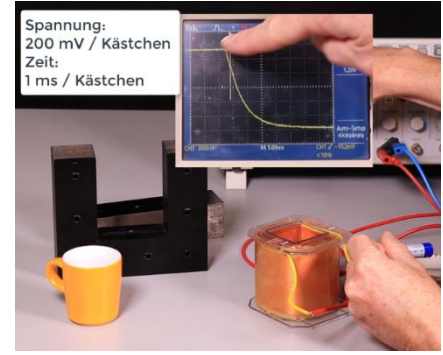
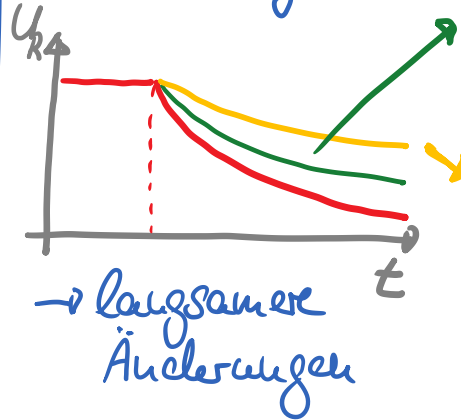
- Messung von U_R beim Einschalten



Beobachtung:



- Eisenkern / Eiserring



Berechnung von LR-Kreisen

a) Einschalten einer Spannung U_0

• Schalter schließen $\rightarrow I$

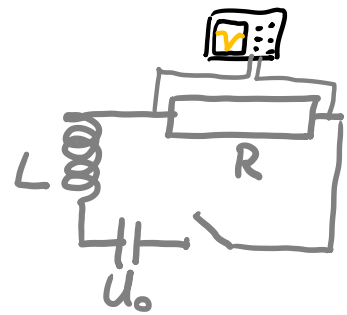
\hookrightarrow Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$$

\hookrightarrow

$$U_0 + U_R + U_L = 0$$

$$U_0 + R \cdot I - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \textcircled{1}$$



Differentialgleichung 1. Ordnung
ähnlich zum Lade-/Entladevorgang
eines Kondensators

$$\text{Lösungsansatz: } I(t) = K_1 \cdot e^{-K_2 \cdot t} + I_0$$

zu bestimmende Konstanten

Anfangsbedingung: für $t=0: I(t=0) = 0$

$$\hookrightarrow 0 = K_1 \cdot e^{-K_2 \cdot 0} + I_0 = K_1 + I_0$$

$\rightarrow K_1 = -I_0$ erste Konstante bestimmt

$$\hookrightarrow I(t) = I_0 (1 - e^{-K_2 t})$$

• Einsetzen in ①:

$$U_0 + R \cdot I_0 (1 - e^{-K_2 t}) - L \cdot I_0 (-K_2) e^{-K_2 t} = 0$$

$$U_0 + R I_0 + e^{-K_2 t} (-R I_0 + L I_0 K_2) = 0$$

= 0, da:

• am Anfang $U_0 + U_R = 0$

$$U_R = R \cdot I_0 = -U_0$$

• also muß $(-R I_0 + L I_0 K_2) = 0$ sein

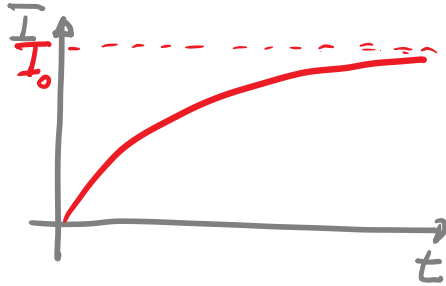
$$\hookrightarrow K_2 = \frac{R}{L}$$

$$\hookrightarrow I(t) = I_0 (1 - e^{-\frac{R}{L} t})$$

$$I(t) = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t})$$

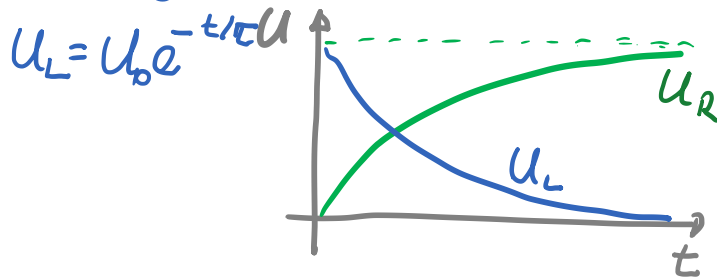
$$= I_0(1 - e^{-t/\tau})$$

mit Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R}$

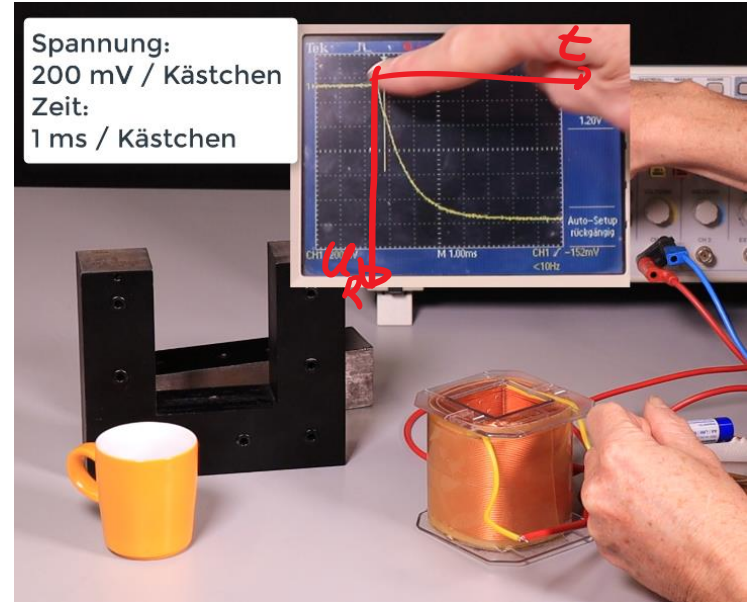


$$L \rightarrow U_R = R \cdot I$$

$$= U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$



... in Übereinstimmung mit Experiment



b) Abschaltvorgang entsprechen

Energie & Leistung:

$$|U_0| = |R \cdot I| + |L \frac{dI}{dt}|$$

Leistung: $P = U_0 \cdot I = R I^2 + L I \frac{dI}{dt}$

Leistung der Spannungsquelle
 $P = \frac{dW}{dt}$

Leistung, die an R in Wärme umgewandelt wird

Leistung der Spule

↳ Energie der Spule / Induktivität:

$$W_L = \int P_L dt = \int L I \cdot \frac{dI}{dt} dt$$
$$= \int L I dI = \frac{1}{2} L I^2$$

• für eine Spule: $B = \mu_0 \frac{N}{l} \cdot I$
 $\Phi_m = N \cdot B \cdot A = \mu_0 \frac{N^2}{l} I \cdot A$

• mit Definition von L: $\Phi_m = L \cdot I$

↳ $L = \frac{\Phi_m}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot A$

↳ $W_L = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l^2} \cdot A \cdot l \cdot I^2$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot B^2 \cdot A l$

Volumen der Spule

Folgerung: die Energie einer Spule kann durch ihr Magnetfeld beschrieben werden. Die Energiedichte eines B-Feldes ist allgemein

$$w_B = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot B^2$$

↳ allgemein:

- B-Feld: $w_B = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$ ↗ quadratisch
 - verbunden mit Strom,
bewegter Ladung

Vergleich mit

- E-Feld: $w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$
(siehe: Kondensator)

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

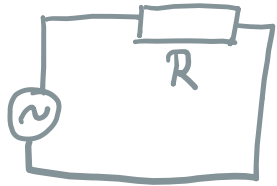
Prof. Dr. Matthias Kohl

20. Wechselstromkreise
mit R , C und L

Betrachtung von einfachen elektronischen Schaltungen mit

- Wechselspannung als Quelle \odot
- R, C & L

a) Wechselspannung an Widerstand R

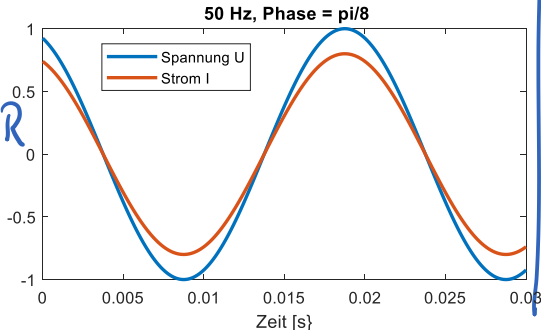


$$U = U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\hookrightarrow U_R = IR = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{U_0}{R} \cdot \cos(\omega t) \\ = I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

\rightarrow Strom und Spannung sind am Widerstand R in Phase



• Leistung $P = U \cdot I = RI^2 = R \cdot I_0^2 \cdot \cos^2(\omega t)$

• mittlere Leistung

$$\langle P \rangle = R \cdot I_0^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$$

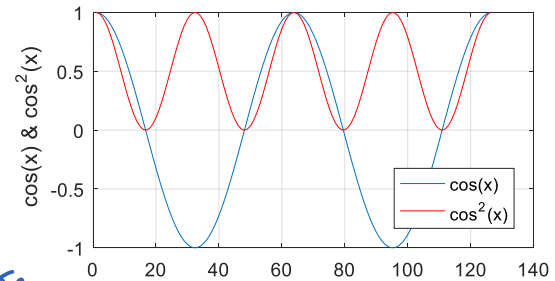
$\langle \rangle$ Mittelwert

mit $\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cdot \cos x)$
und Integration über eine Periode

$$x_p = \omega t = 2\pi \cdot n$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

\hookrightarrow



$$\langle \cos^2(x) \rangle = \frac{1}{x_p} \int_0^{x_p} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2\pi \cdot n} \cdot \frac{1}{2} (2\pi \cdot n + 0) \\ = \frac{1}{2}$$

\dots verständlich, da $\cos(x)$ symmetrisch um 0, $\cos^2(x)$ daher in der Mitte zwischen 0 und 1 liegt, als $\frac{1}{2}$

$$\text{daher: } \langle P \rangle = R \cdot I_0^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{2} R \cdot I_0^2$$

• effektive Stromstärke I_{eff} :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle};$$

ein Wechselstrom mit I_0 hat die gleiche Leistung wie ein Gleichstrom mit I_{eff}

- für sin-/cos-förmigen Strom:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \cos^2(\omega t) dt} = I_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt}$$

$$= I_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• ebenso: effektive Spannung

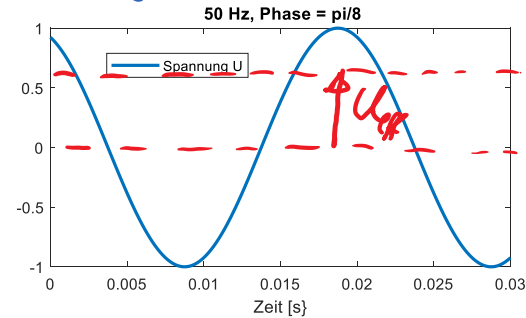
$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle U^2 \rangle} = U_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Beispiel: Netzspannung $U = 230 \text{ V}$, $\nu = 50 \text{ Hz}$

$$\rightarrow U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$$

$$U_0 = 230 \text{ V} \cdot \sqrt{2}$$

$$= 325 \text{ V}$$

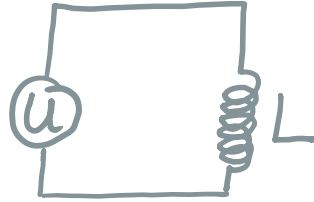


mit $\int \cos^2(ax) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax)$

also $\int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}T + \frac{1}{4\omega} \underbrace{\sin(2\omega T)}_{\approx 0}$ für Perioden-dauer T

b) Wechselspannung an Spule

- Spannung steigt
→ Strom steigt
→ Gegenspannung



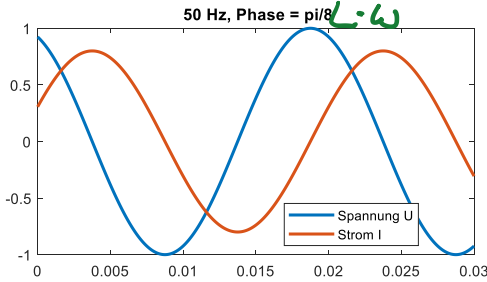
$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -U = -U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$dI = U_0/L \cdot \cos(\omega t) dt$$

$$I = \int dI = \int \frac{U_0}{L} \cdot \cos(\omega t) dt$$

$$= \underbrace{I_0}_{= \frac{U_0}{L \cdot \omega}} \cdot \sin(\omega t) + \underbrace{\text{const}}_{\text{Gleichstromanteil}}$$

→ in der Spule ist die Spannung um $\frac{\pi}{2}$ (90°) vor dem Strom



- hier ist: $I_0 = \frac{U_0}{L \cdot \omega} = \frac{U_0}{X_L}$
in Analogie zum Widerstand $R = \frac{U}{I}$ wird $X_L = L \cdot \omega$ als induktiver Widerstand (Blindwiderstand) bezeichnet.

• Leistung:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cos(\omega t) \cdot I_0 \sin(\omega t)$$

mit zeitlichem Mittelwert

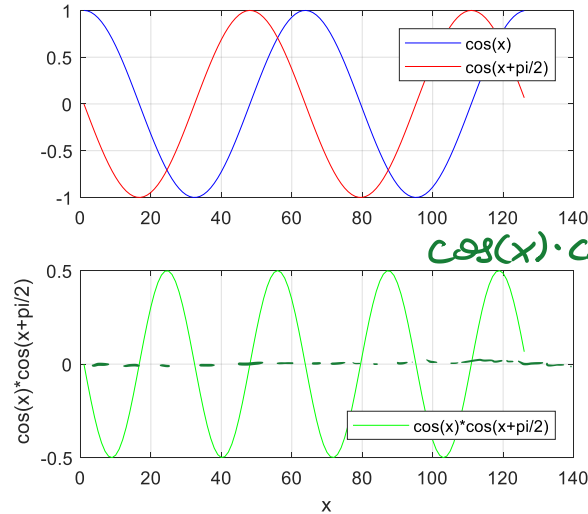
$$\langle P \rangle = U_0 \cdot I_0 \langle \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \rangle = 0$$

→ im Mittel wird durch die Spule keine Leistung benötigt / keine Energie verbraucht!

$$\text{mit } \sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2} (\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_1 + x_2))$$

$$\langle \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \rangle = \langle \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \rangle = 0$$

da sin-Funktion symmetrisch um 0-Linie



$$\cos(x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hookrightarrow \langle \cos(x) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rangle = 0$$

- in der Spule: B -Feld abh. von Strom;
Energie wird im B -Feld aufgenommen und wieder abgegeben

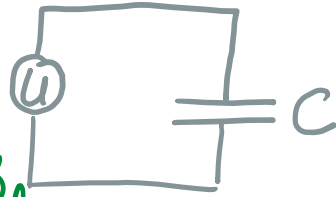
c) Wechselspannung an Kondensator

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

am Kondensator:

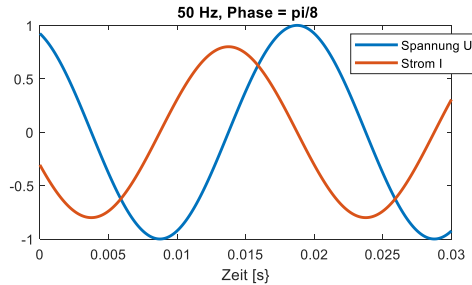
$$U_c = \frac{Q}{C} \quad \leftarrow \text{Ladung auf Kond.}$$

$$= U_0 \cdot \cos(\omega t)$$



$$\begin{aligned} \hookrightarrow I &= \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(U_c \cdot C) = C \cdot U_0 \cdot (-\omega) \sin(\omega t) \\ &= C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \pi) \\ &= C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

→ am Kondensator
läuft der Strom
um $\frac{\pi}{2}$ (90°) vor
der Spannung



$$\cdot \bar{I}_0 = C \cdot U_0 \cdot \omega = \frac{U_0}{X_c}$$

mit dem kapazitiven Widerstand

$$X_c = \frac{1}{C \cdot \omega}$$

• mittlere Leistung am Kondensator

$$\langle P(t) \rangle = \langle U(t) \cdot I(t) \rangle$$

$$= -U_0 \cdot \bar{I}_0 \cdot \langle \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \rangle$$

$$= 0$$

= 0, siehe oben

↳ keine Abgabe von Wärme

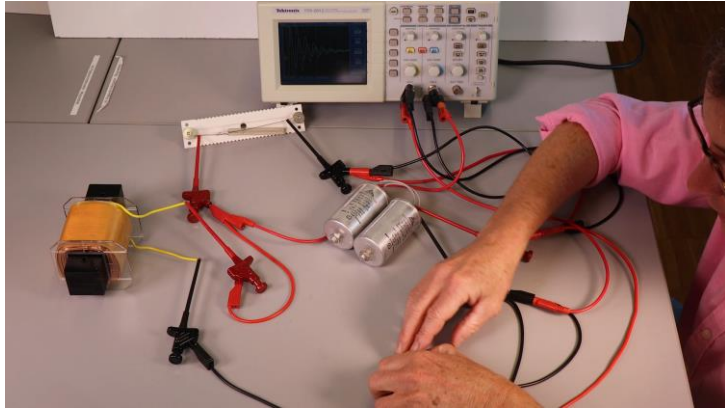
↳ Energie wird im E-Feld gespeichert

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

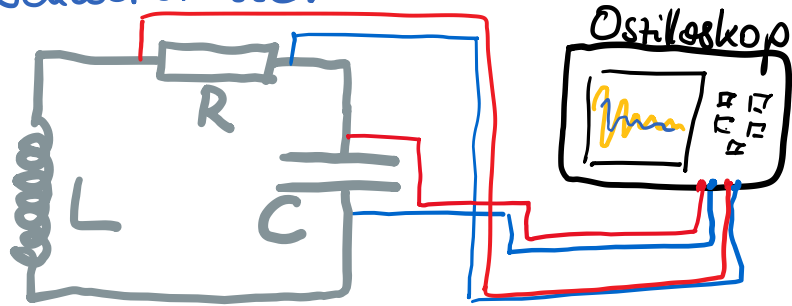
Prof. Dr. Matthias Kohl

21. Elektrischer Schwingkreis
aus R, C und L

Experiment: Reihenschaltung von R, C und L



Schaltskizze:



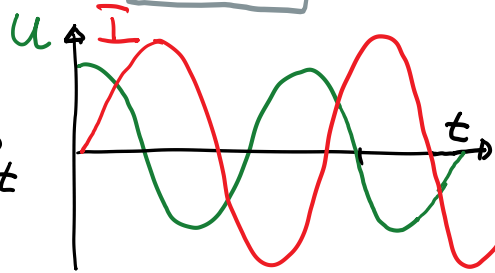
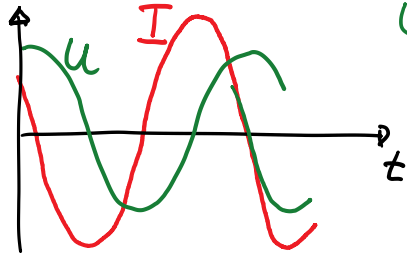
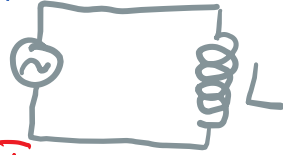
Messung: • Spannung am Kondensator U_C
• Strom über Spannungsmessung über Widerstand

Beobachtung:

- gedämpfte Schwingung von Spannung U_C und Strom I
- Phasenverschiebung zwischen U_C und I

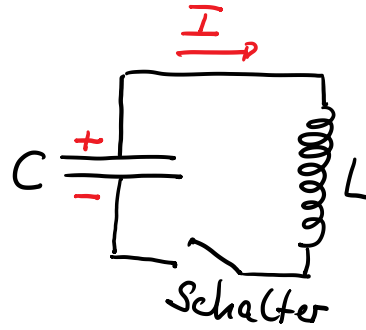
gesucht: Erklärung von $U(t)$ & $I(t)$

bisher: bei Wechselspannungen an
Kapazität C und Induktivität L :
→ Spannung und Strom sind
phasenverschoben



jetzt: sowohl L als auch C in
einem Stromkreis
→ Schwingkreis

a) Induktivität L und Kapazität C :
 LC -Kreis



- ohne Ohm'schen Widerstand R
- Entladung des Kondensators C über die Spule
- Gegenspannung

$$C: U_C = \frac{Q}{C}$$

$$L: U_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\text{mit } I = \frac{dQ}{dt}$$

Maschenregel:

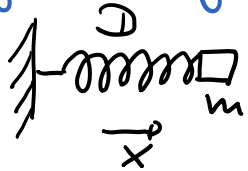
$$\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{I}{C} + L \frac{d^2I}{dt^2} = 0$$

daraus: $\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q = 0$

bzw $\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot I = 0$

• dies entspricht der Schwingungsgleichung für ein Federpendel:



$$F = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -Dx$$

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} + \frac{D}{m} = 0$$

Lösung: harmonische Schwingung

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ φ -Phase

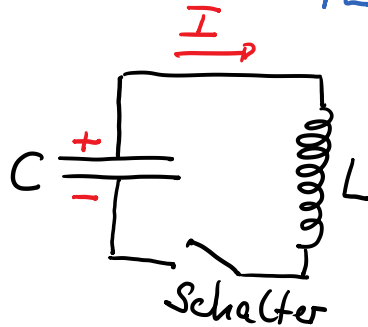
• Lösungen hier:

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \text{bzw. } I &= I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \\ U_C &= U_{C0} \cos(\omega t + \varphi_1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Strom, Spannung} \\ \text{und} \\ \text{Ladung} \\ \text{schwingen} \end{array}$$

mit $U = \frac{Q}{C}$

$$\begin{aligned} \text{aus } I &= \frac{dQ}{dt} = -Q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_1) \\ &= I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$



→ Wechsel von Strom und Ladung

→ Analogie:

elektr. Schwingkreis

Federpendel

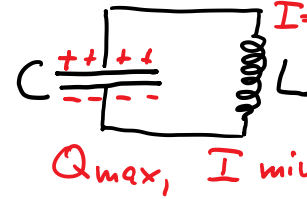
- Induktionsgesetz ↔ Massenträgheit
- Ladung ↔ Kraft

Energie: statisch
 gespeichert in Q bzw. E -feld
 gespeichert in Feder
 E_{pot}

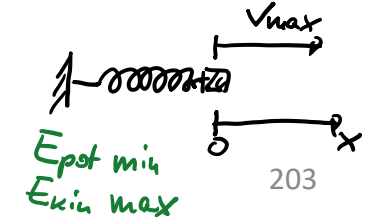
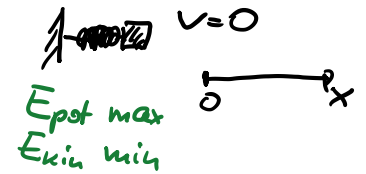
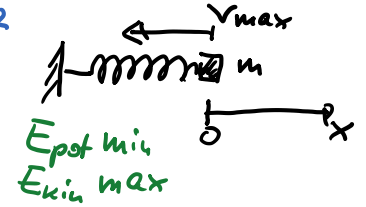
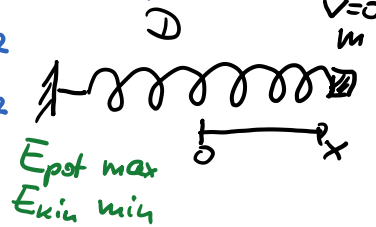
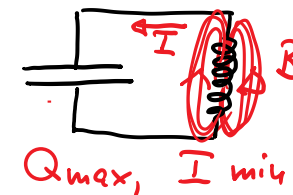
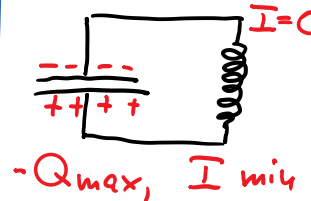
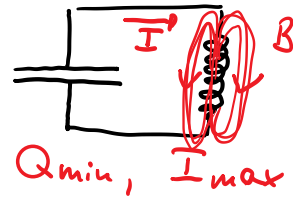
Energie: dynamisch
 in Strom $I = \frac{dQ}{dt}$ bzw. B -feld
 in $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

Vergleich:
 LC-Schwingkreis

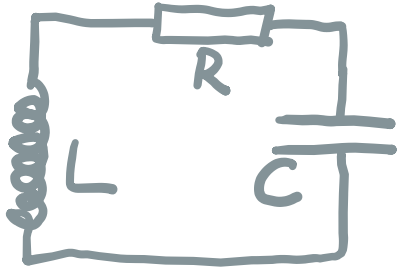
Federpendel



$E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2$
 $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$
 $E_C = \frac{1}{2} C U^2$
 $E_L = \frac{1}{2} L I^2$



b) L, C & R in einem Schaltkreis



$$U_R = R \cdot I = R \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2Q}{dt^2}$$

Maschenregel: $|U_L| + |U_R| + |U_C| = 0$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Bewegungsgleichung, analog zu der einer gedämpften Schwingung eines Federpendels

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + Dx = 0$$

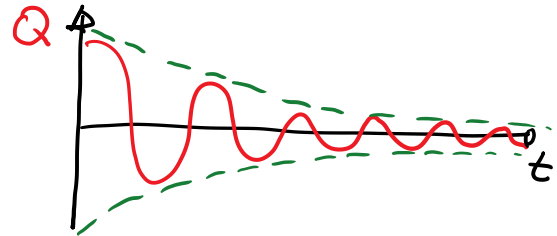
Dämpfung \sim Geschw.

hier: Widerstand R \rightarrow Dämpfung, Energieverlust

Lösung, durch Vergleich mit mechanischer Schwingung

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{2RL}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

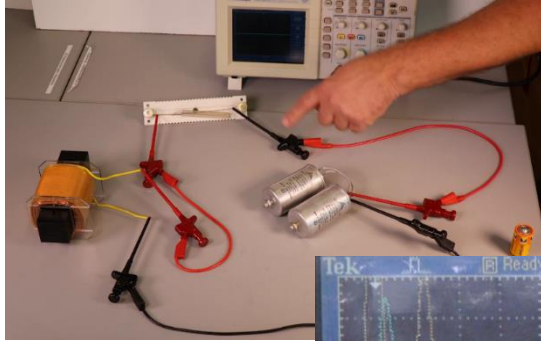
mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
und Phasenkonst. δ



$I = \frac{dQ}{dt}$ hat das gleiche Zeitverhalten

$\cdot e^{-\frac{t}{2RL}}$: exponentielle Abnahme
mit $\tau = 2RL$

im Experiment:



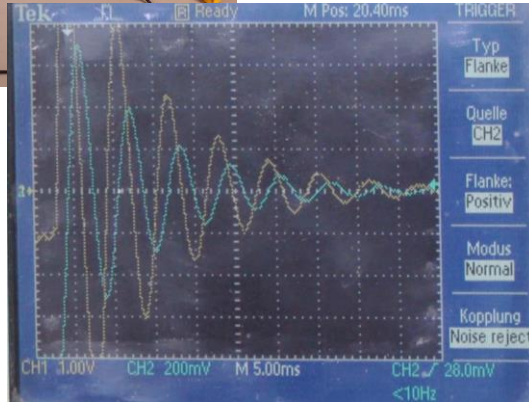
$$C = 16 \mu\text{F}$$
$$R = 6 \Omega$$
$$L = 9 \text{ mH}$$

Gemessen:

$$\tau \approx 10 - 15 \text{ ms}$$

$$T \approx 7 \text{ ms}$$

$$\hookrightarrow \nu = \frac{1}{T} \approx 140 \text{ Hz}$$

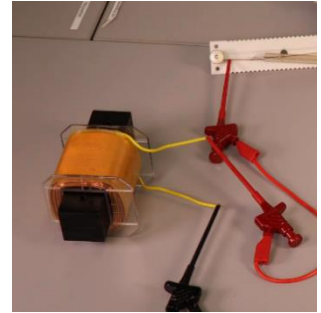


$$\text{Rechnung: } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{9 \text{ mH} \cdot 16 \mu\text{F}}} = 2635 \text{ Hz}$$
$$\hookrightarrow \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = 419 \text{ Hz}$$

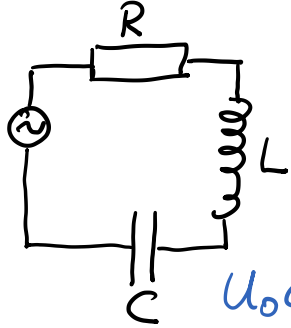
Diskrepanz von Messung ($\nu = 140 \text{ Hz}$)
und Rechnung ($\nu = 420 \text{ Hz}$):

Induktivität $L = 9 \text{ mH}$
ohne Eisen

im Experiment: mit Eisen
 $\hookrightarrow L = 80 \text{ mH}$



c) L, C & R in Reihe mit Wechselspannung



$$U_0 \cos(\omega t) - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} - I \cdot R = 0$$

bzw. $L \frac{dI}{dt} + R I + \frac{Q}{C} = U_0 \cos(\omega t)$

• entspricht der Bewegungsgl. einer erzwungenen Schwingung

↳ Lösung analog zur Mechanik

Lösung für Q bzw. $I = \frac{dQ}{dt}$

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t - \delta)$$

$$\text{mit } \delta = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

$$\text{und } I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{U_0}{Z}$$

→ Z: formal ein Widerstand
↳ Impedanz für Wechselströme

→ Phasenverschiebung δ
zwischen Strom und Spannung

Anwendung: „Dimmen“ - Herabsetzen der elektrischen Leistung durch Einfügen einer Phasenverschiebung

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

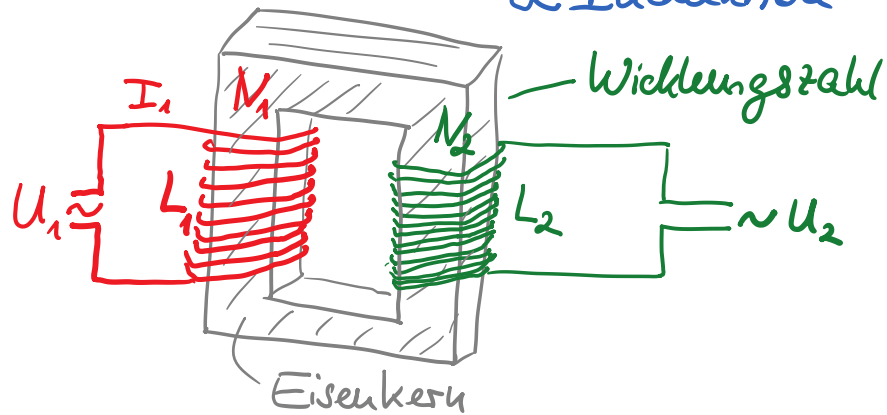
Prof. Dr. Matthias Kohl

22. Transformation von
Spannungen,
Energieübertragung

Ziel: Transformation von Wechselspannungen



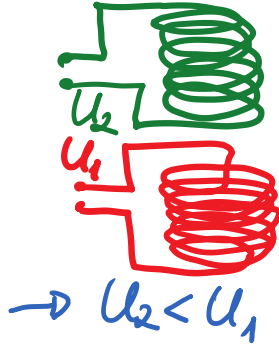
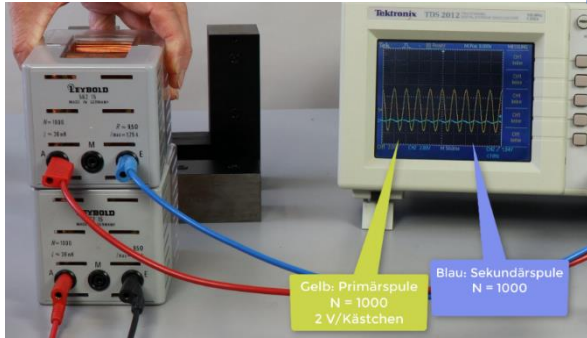
Prinzip: zwei Spulen, Wechselspannung & Induktion



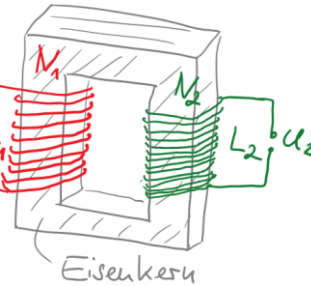
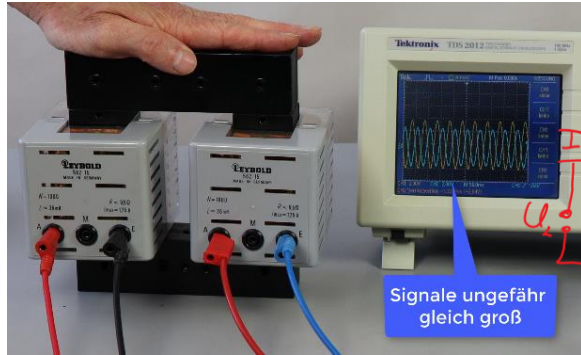
Experiment: Spule + Wechselspannung



- Spulen gleiche Wicklungszahl $N_1 = N_2$, ohne Eisenkern

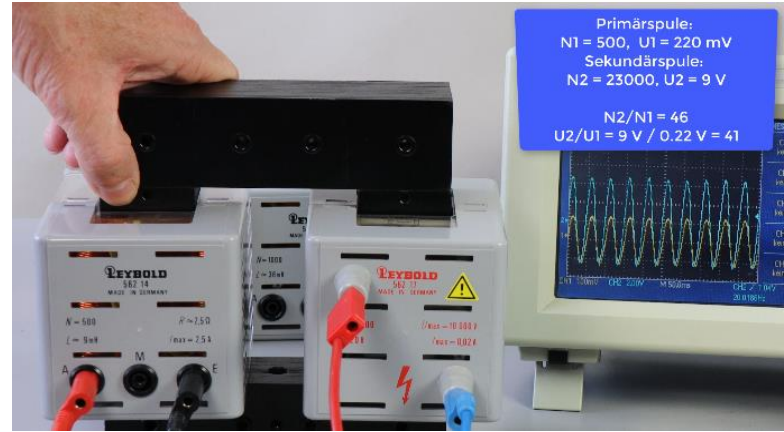


- $N_1 = N_2$, mit Eisen



$\rightarrow U_2 = U_1$

- $N_1 = 500$, $N_2 = 23000$

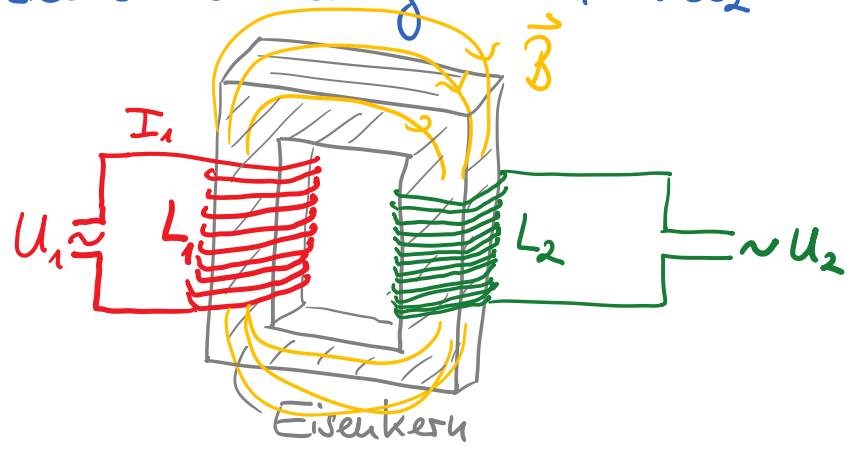


$\rightarrow U_1 = 220 \text{ mV}$, $U_2 = 9 \text{ V}$!
Verstärkung um Faktor > 40

- Frequenz bleibt

Transformation von Wechselspannungen

Ziel: Umwandlung von U_1 in U_2



- Wechselspannung $U_1 \rightarrow$ Wechselstrom I_1
- \rightarrow B-Feld und mag. Flussänderung
- \rightarrow Induktionsspannung

$$U_1 = -L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} = -N_1 \cdot \frac{d\Phi_m}{dt}$$

↑
Wicklungen in L_1

- B-Feld wird durch Eisenkern verstärkt und geführt \rightarrow B-Feld in L_2
- \rightarrow mag. Flussänderung in L_2
- \rightarrow Induktionsspannung

$$U_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi_m}{dt}$$

↑
Wicklungen in L_2

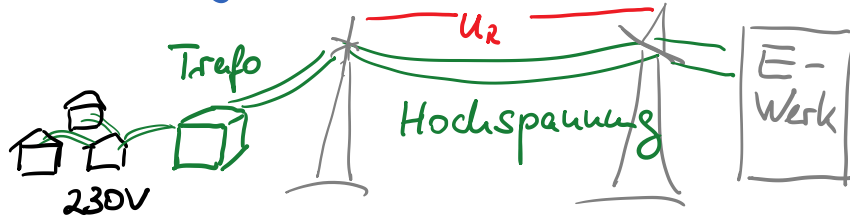
- wenn Φ_m vollständig durch Eisen geführt

$$U_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi_m}{dt} = N_2 \cdot \frac{U_1}{N_1}$$

$$\hookrightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

die Spannung wird durch die Übersetzungszahl $\frac{N_2}{N_1}$ verstärkt
(die Frequenz bleibt unverändert)

Anwendung: Transformation der Spannung



Ziel: Übertragung der Leistung $P = U \cdot I$
an den Verbraucher

- geringe Verluste durch Widerstand
in der Leitung: $\Delta P_R = U_R \cdot I = I^2 \cdot R$

... Strom ist in der gesamten Leitung
konstant

↳ relative Verlustleistung ist

$$\frac{\Delta P_R}{P} = \frac{I^2 \cdot R}{U \cdot I} = \frac{I \cdot R}{U} = \frac{I \cdot U \cdot R}{U^2} = \frac{P \cdot R}{U^2}$$

- also ist der
Verlust, wenn
die Leistung P
übertragen wird:

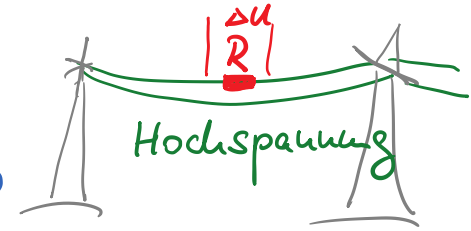
$$\Delta P_R = \frac{R}{U^2} \cdot P^2$$

→

$$\Delta P_R \sim R$$

$$\Delta P_R \sim \frac{1}{U^2}$$

▽ geringer Verlust
für hohe Spannung! ▽



→ daher:

- Netzspannung im Haus: 230V
- Überlandleitung über große Entfernung:
typisch: 110kV oder 380kV

Beispiel: Kupferleitung der Länge 3 km
und Gesamtwiderstand $R=2,5\Omega$.
Eine Leistung $P=20\text{kW}$ soll übertragen werden.



$$P = U \cdot I \rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{20\text{kW}}{230\text{V}} = 87\text{A}$$

in der Leitung fällt jedoch an R die
Verlustspannung

$$\Delta U = I \cdot R = 87\text{A} \cdot 2,5\Omega = 217\text{V} \text{ ab}$$

$$\rightarrow \text{am Verbraucher: } U = 230\text{V} - 217\text{V} = 13\text{V}$$

$$\rightarrow \text{relative Verlust } \frac{\Delta P}{P} = \frac{R}{U^2} \cdot P = \frac{2,5\Omega}{(230\text{V})^2} \cdot 20\text{kW}$$

$$= 0,95 = 95\%$$

... nur 5% am Verbraucher ^{1?}₀

b) Transformation der Spannung: $U=110\text{kV}$

$$I = \frac{P}{U} = \frac{20 \cdot 10^3\text{W}}{110 \cdot 10^3\text{V}} = 0,18\text{A} \text{ ausreichend}$$

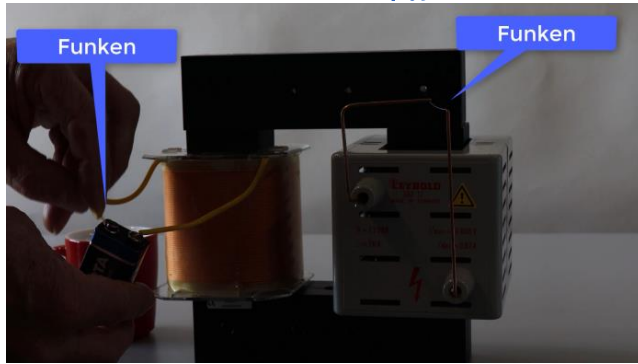
$$\text{Spannungsabfall an } R = \Delta U = 2,5\Omega \cdot 0,18\text{A} = 0,45\text{V}$$

relative Verlust

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{R}{U^2} \cdot P = \frac{2,5\Omega \cdot 20 \cdot 10^3\text{W}}{(110 \cdot 10^3\text{V})^2} = 4,1 \cdot 10^{-6}$$

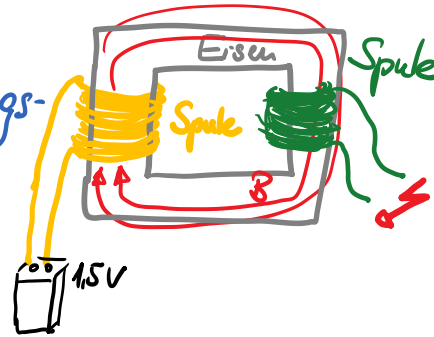
sehr gering.

→ Funken aus niedriger Spannungen
 $U \approx 1,5 \text{ V} \rightarrow U_{\text{ind}} > 10000 \text{ V}$ (Kap. 16a)



- Batterie 1,5V → Strom
- Transformator: zweite Spule mit hoher Wicklungszahl → Verstärkung von U_{ind}

→ Funken in Luft über $> 15 \text{ mm}$

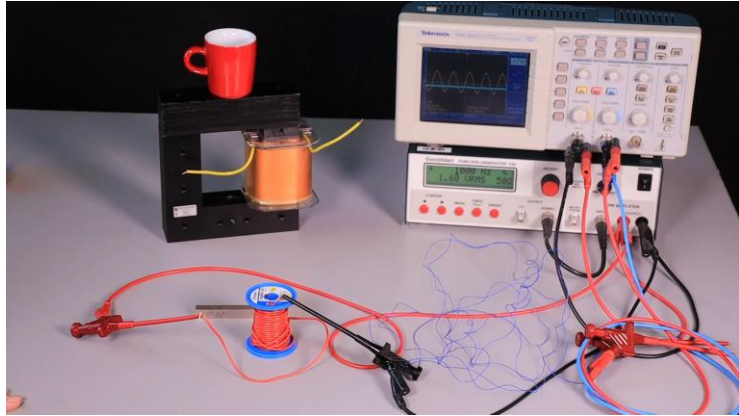


Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

23. Transformator:
- Selbstbau
 - Nagelschweißen
-

Transformator im Eigenbau:



Zutaten:

- Wechselstromquelle
- Kabelrolle
- Kabel zum Wickeln
- Eisenstab



Wicklungszahl N_1

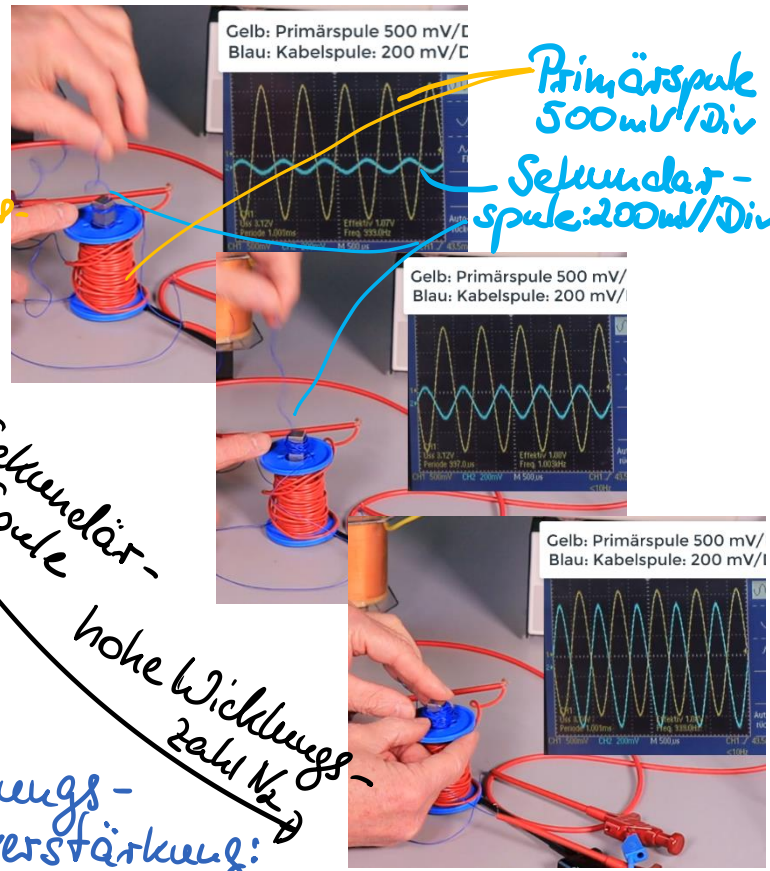
Sekundärspule

hohe Wicklungszahl N_2

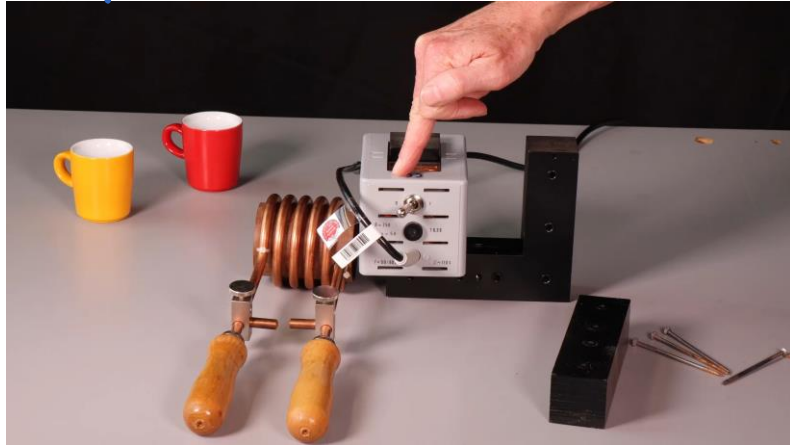
Spannungsverstärkung:

$$\rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

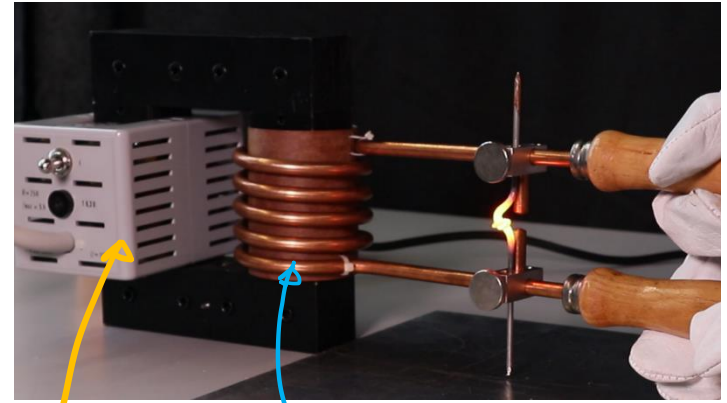
(bei vollständiger Übertragung)



Experiment: Nagelschweißen



- Nagel glüht \rightarrow Wärme und schmilzt

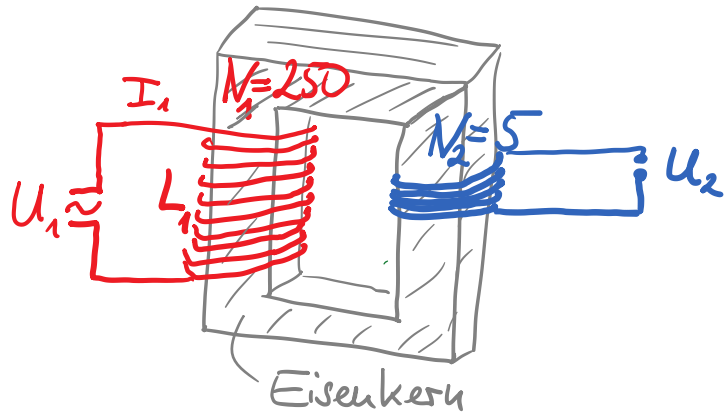


Primärspule
 $N_1 = 250$
 $I = 5\text{ A}$
 $U_1 = 110\text{ V}$

Sekundärspule
 $N_2 = 5$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow U_2 &= U_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} \\ &= 110\text{ V} \cdot \frac{5}{250} \\ &= 2,2\text{ V} \end{aligned}$$





• bei vollständiger Übertragung der Leistung P :

$$P_1 = I_1 \cdot U_1 = I_2 \cdot U_2$$

$$\hookrightarrow I_2 = I_1 \cdot \frac{U_1}{U_2} = I_1 \cdot \frac{N_1}{N_2}$$

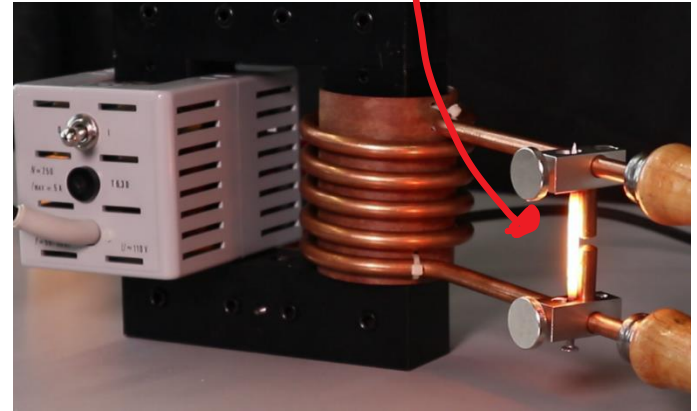
hier: für $I_1 = 5 \text{ A}$:

$$I_2 = 5 \text{ A} \cdot \frac{250}{5} = 5 \text{ A} \cdot 50 = 250 \text{ A}$$

• für Ohm'schen Widerstand R des Nagels:
 $R = \frac{U_R}{I}$ \leftarrow Spannungsabfall am Nagel
 (nicht U_1 oder U_2)

$$\hookrightarrow P = I \cdot U_R = R \cdot I^2$$

d.h. wenn I hoch \rightarrow P hoch
 \rightarrow Wärmeentwicklung







Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

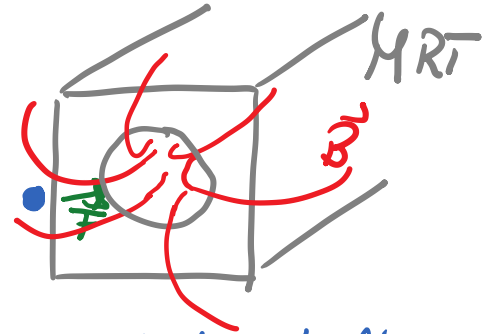
24. Materie in Magnetfeldern,
Experimente!

Materie im Magnetfeld eines Kernspintomographen



	2 Cent	{ Eisen (94,4%) Kupfer (5,6%)
	5 Cent	
	50 Cent	Nickel-Messing Cu 75%, Zn 20%, Ni 5%
	1 Euro	Kern: Kupfer-Nickel Nickel

Beobachtung: Anziehungskräfte
• abhängig vom Material



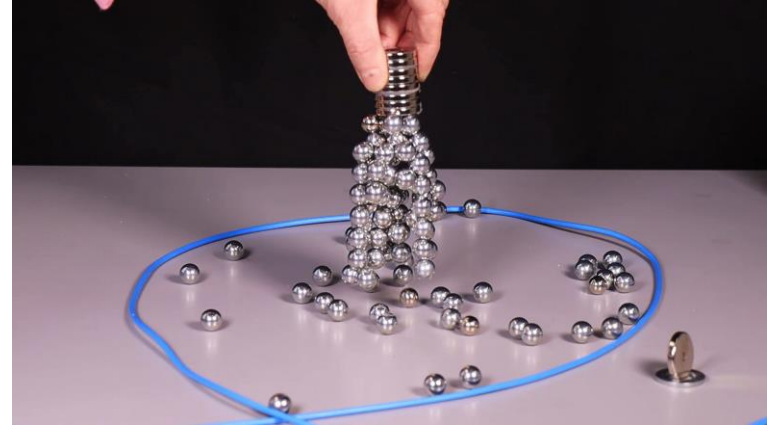
• Münzen: keine merkliche Kraft
auf andere Münzen

Wechselwirkung von Magnet

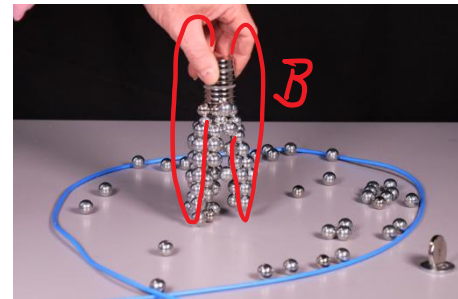
- und andere Magnete
- und Eisennagel



Magnet und Stahlkugeln:



- Kraftwirkung wird verstärkt
- Reichweite der Kraft ist größer

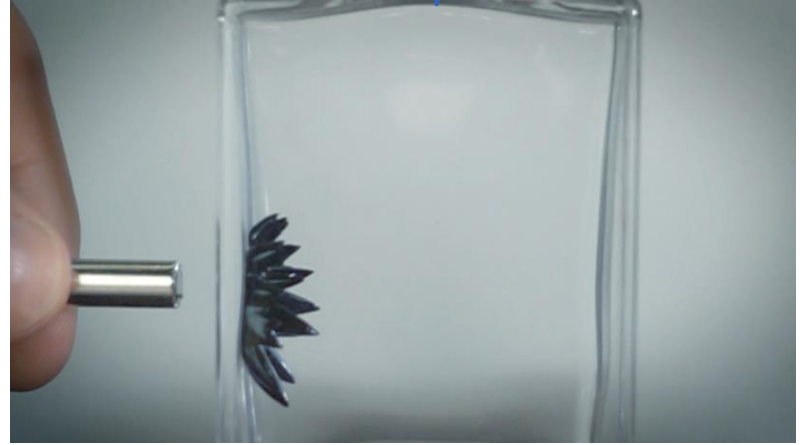


Beispiel: Magnetische Kräfte



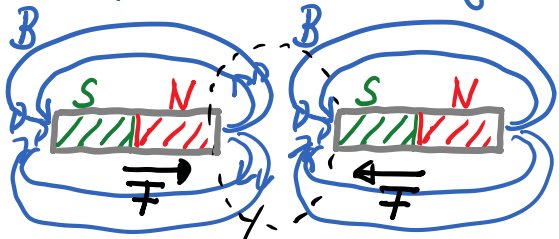
- magnetische Abstoßung:
„Schweben“ - keine Energie wird benötigt

Ferrofluid: magnetische Nanoteilchen, in Suspension

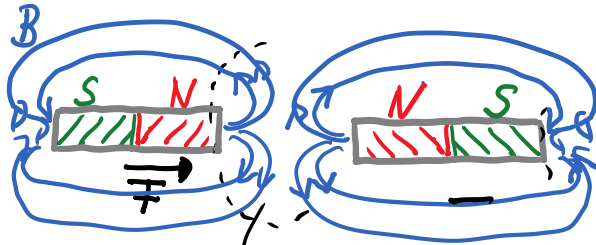


- Ausrichtung entlang der B -Feld-Richtung
- außerdem:
 - Gravitation
 - Oberflächenspannung

Kräfte zwischen Magneten / Energie im B -Feld

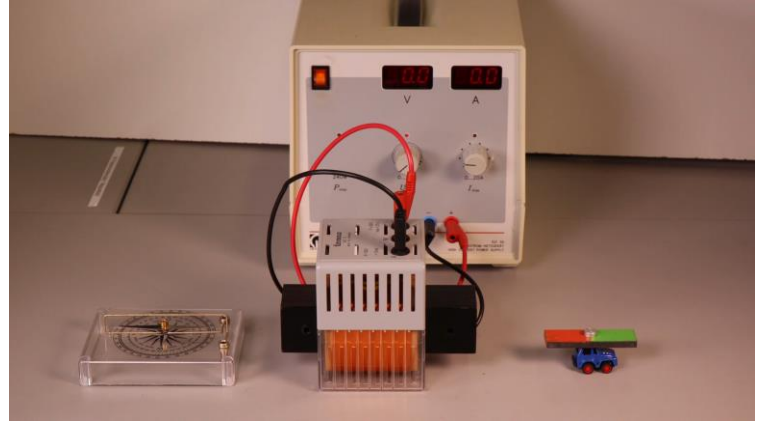


B -Feld wird kleiner \rightarrow anziehende Kraft



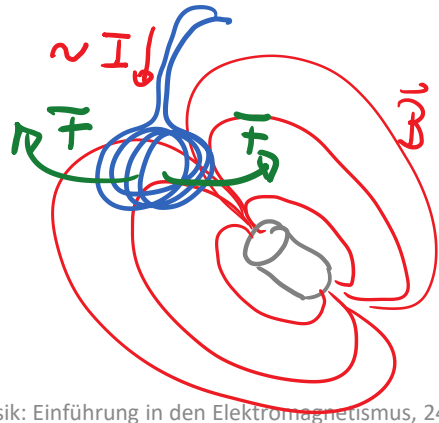
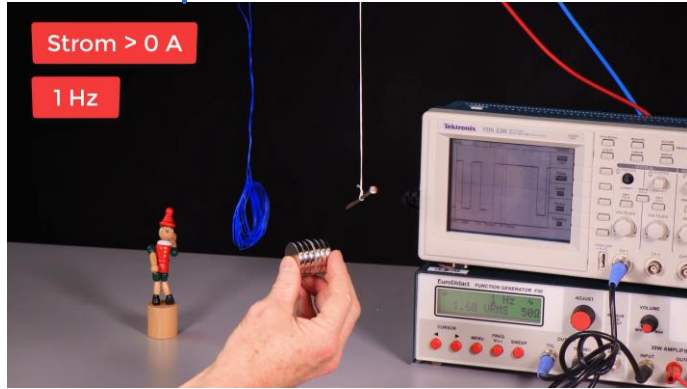
B -Feld wird größer \rightarrow abstoßende Kraft

Beispiel: Magnetische Kräfte



Kraftrichtung so, daß Zustand kleinster Energie angenommen wird

Kabelspule im Magnetfeld



- Lorentzkraft
- Anziehung / Abstoßung
- Drehung
- Spule & Nagel verhalten sich ähnlich

Warum ist es im Kernspintomographen so laut?

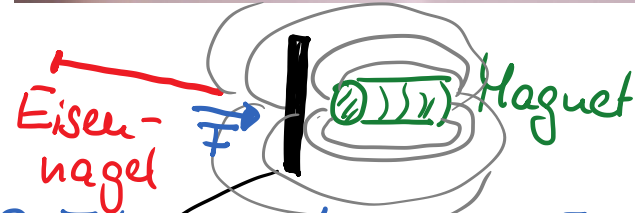
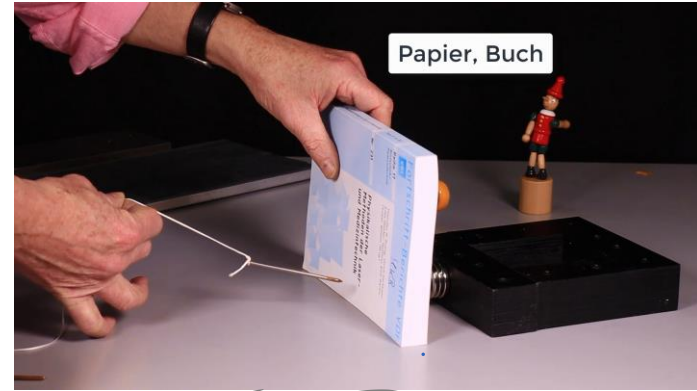


- Permanentes Magnetfeld
- Gradientenspulen mit kurzen Stromstößen $> 100 \text{ A}$
 - ↳ Kraft auf Spule
 - ↳ Schwingungen → Schall

B-Felder: welche Stoffe werden durchdrungen?

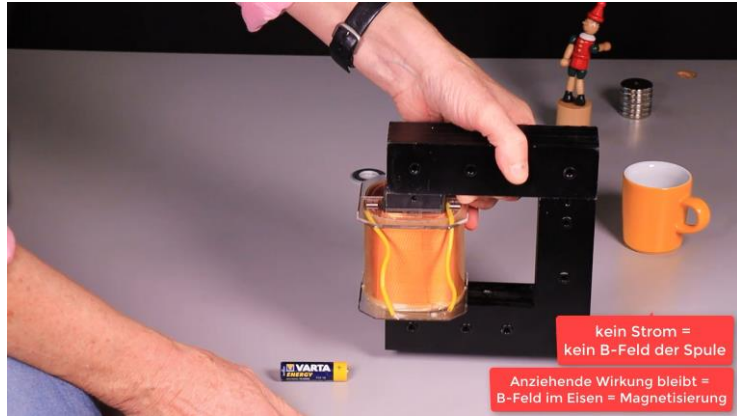
Beobachtung:

- B-Feld in Aluminium (und Keramik)
- B-Feld wird durch Stahl (Ferromagnet) abgeschwächt



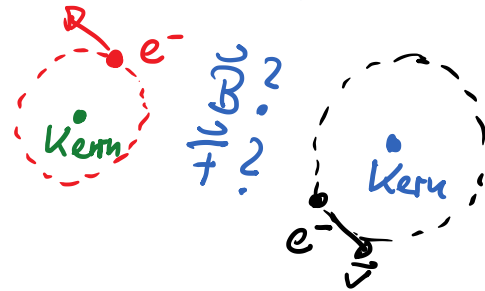
- B-Feld bzw. Kraft auf Eisennagel
- durchdringt Papier, Plastik, Aluminium und Kupfer
 - Abschirmung durch Eisen

Eisenring: Magnetische Kräfte



- Spule & Strom \rightarrow B-Feld
Kraft bleibt nach dem Abschalten
des Stroms
- \hookrightarrow Magnetische Kraft wird
erzeugt als Eigenschaft des
Eisens

- ein elektr. Strom erzeugt B-Feld
(Biot-Savart-Gesetz, Ampere'sches Gesetz,
Exp. von Oersted)
- ein B-Feld bewirkt Kraft auf
einen elektr. Strom
(Lorentzkraft, Faraday'sches Ind.-G.)
- in Materie: es müssen elektr. Ring-
ströme vorliegen



Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

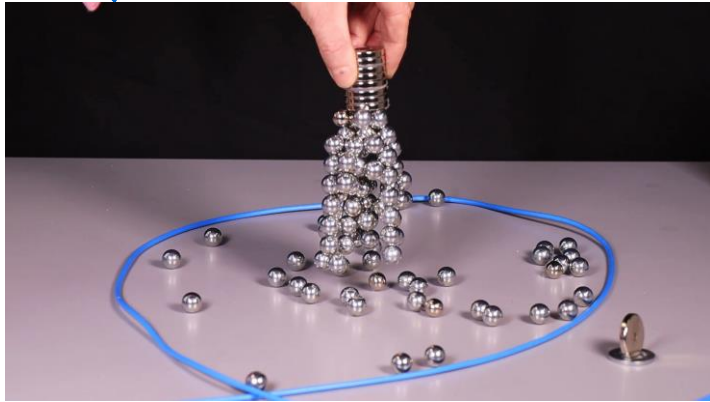
Prof. Dr. Matthias Kohl

25. Materie in Magnetfeldern,
Formen des Magnetismus

Magnete & Materie:

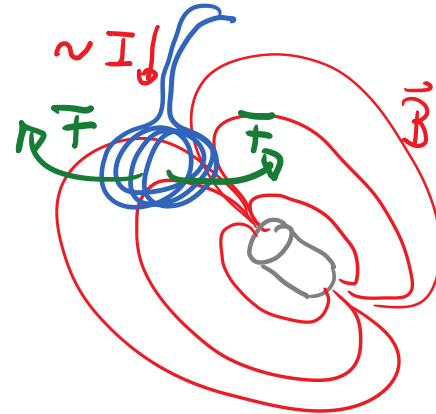
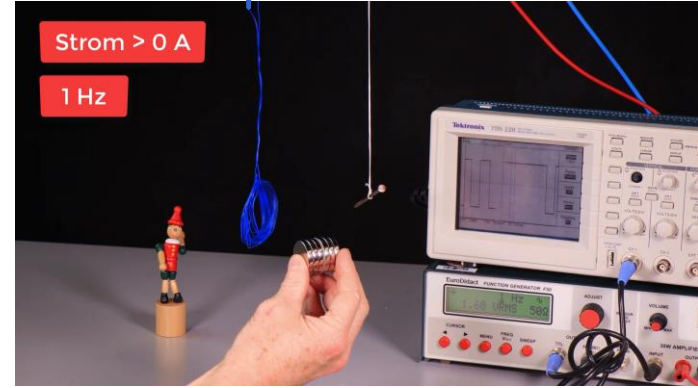
- Experimente in Kapitel 24

Beispiel:



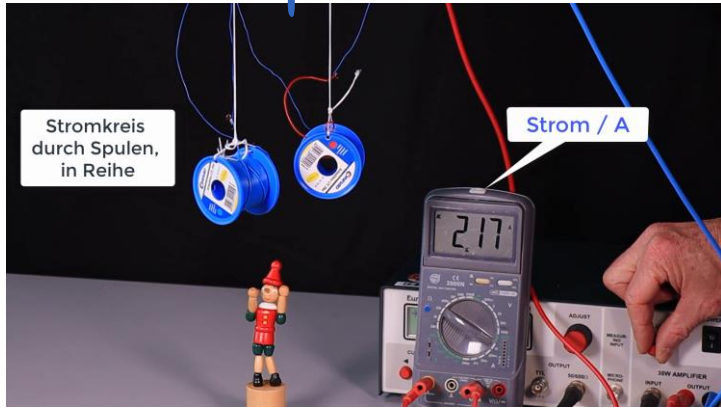
- Kraft / B -Feld wird verstärkt und weitergeführt

a) Kabelspule im Magnetfeld



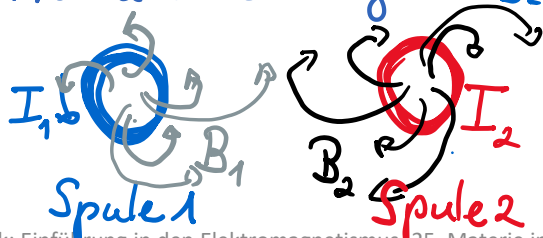
- Lorentzkraft
- Anziehung / Abstoßung
- Drehung
- Spule & Nagel verhalten sich ähnlich

b) Zwei Spulen mit Strom:



Beobachtung

- abhängig vom Strom
↳ Kraft, Drehmoment
- Verhalten wie zwei Magnete bzw. Magnet & Spule



Leiterschleife im \vec{B} -Feld: (siehe Kap. 11)

↳ Drehmoment $\vec{M} = \vec{p}_B \times \vec{B}$

mit magu. Moment $\vec{p}_B = I \cdot \vec{A} \cdot N \cdot \vec{u}$

Fläche \vec{A} \vec{u} Einheitsvektor
Wicklungs- \vec{u} zu Fläche
zahl

↳ pot. Energie $E_{\text{pot}} = -\vec{p}_B \cdot \vec{B}$

in Materie: Bewegung von e^-

↳ magnetische Momente

↳ Wechselwirkung zwischen mehreren e^-

Formen des Magnetismus:

i) Magnetische Momente in Atomen

• einfachste Modell

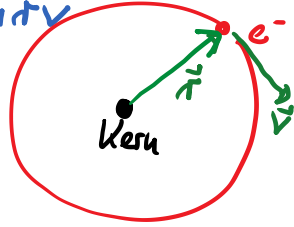
Elektron e^- auf Kreisbahn um Kern (+)

↳ Drehimpuls $L = |m \vec{r} \times \vec{v}| = m r v$

↳ magn. Moment

$$\mu_B = I \cdot A = I \cdot \pi r^2$$

\vec{L} & $\vec{\mu}_B$ \perp auf Fläche



↳ Strom auf der Kreisbahn

$$I = \frac{-e}{T} = \frac{-e}{2\pi r / v} \quad v = \frac{\text{Umfang}}{T}$$

$$\text{also } \mu_B = I \cdot A = \frac{-e \cdot v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = -\frac{1}{2} e v r \\ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot L$$

magn. Moment \sim Drehimpuls

Elektronen in Atomhüllen besitzen

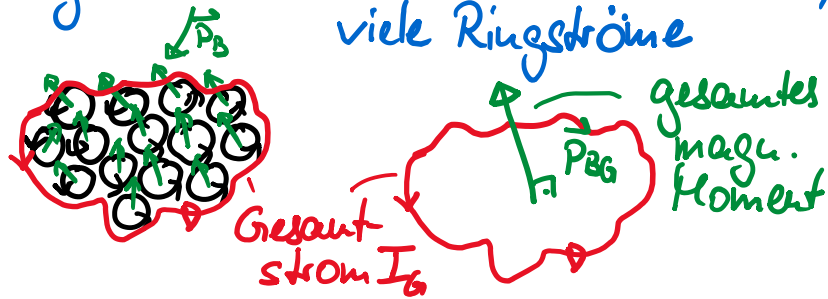
- Bahndrehimpuls
 - Eigendrehimpuls (Spin)
- } magu. Momente des e^- !

↳ Magnetismus der Atome

ii) Magnetische Momente von Festkörpern

- makroskopische Beschreibung

- magn. Momente der Atome addieren sich, viele Ringströme



↳ Definition:

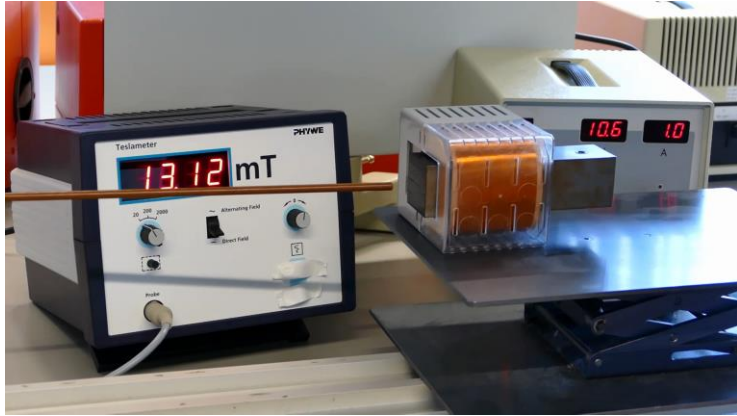
die Magnetisierung M ist das magn. Moment pro Volumen:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{p}_B}{dV}$$

• im äußeren B -Feld:

- ↳ Ausrichtung / Drehung der einzelnen (atomaren) magn. Momente
- ↳ gesamtes magn. Moment wird größer
- ↳ Magnetisierung M steigt

Experiment: Spule mit Eisenkern
 • Messung von B : Hall-Sensor



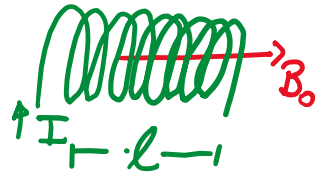
Beobachtung: Strom in Spule $I = 1,0 \text{ A}$

• B -Feld außerhalb: $B_0 = 1,8 \text{ mT}$

• mit Eisenkern Anstieg auf

$$B = 13,1 \text{ mT} \quad \triangleright$$

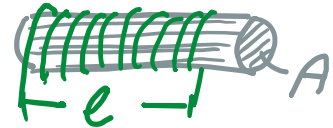
• Spule mit N Windungen
 im Inneren: $B_0 = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$



• Materie in der Spule

↳ Magnetisierung

$$M = \frac{p_B}{V} = \frac{p_B}{A \cdot l} = \frac{I \cdot N \cdot A}{A \cdot l} = I \cdot \frac{N}{l}$$



→ Magnetfeld wird verstärkt

$$B = B_0 + \mu_0 M$$

↳ Magnetfeld

$$B = B_0 + \mu_0 \cdot M$$

Magnetisierung:
meist experimentelle Größe

andere Schreibweise:

$$B = \mu_0 (H + M) \quad \text{mit } B_0 = \mu_0 H$$

- magnetische Feldstärke H , $[H] = 1 \frac{A}{m}$
Quelle von H : freie elektrische Ströme
unabhängig von Materie
- magnetisches Feld B , $[B] = 1T = 1 \frac{N}{A \cdot m}$
Quellen von B : freie Ströme + M
(Synonym für B : magn. Flussdichte)

• in vielen Stoffen: $M \sim H$

$$\hookrightarrow M = \chi_m \cdot H$$

magnetische Suszeptibilität χ_m
("chi")

$$\text{also } B = \mu_0 (H + M)$$

$$= \mu_0 (H + \chi_m \cdot H)$$

$$= \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot H$$

$$= \mu_0 \cdot \mu \cdot H \quad (= \mu \cdot B_0)$$

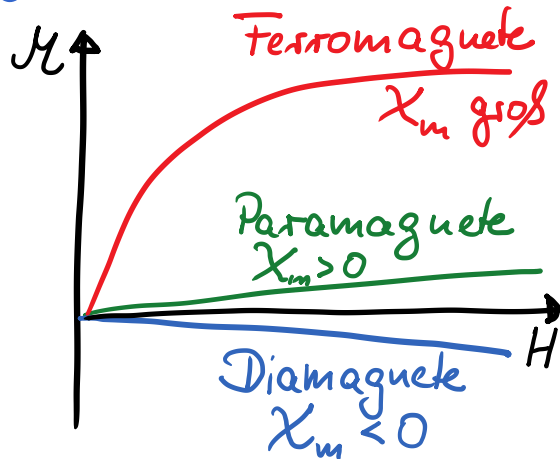
mit der Permeabilität $\mu = 1 + \chi_m$

↳ magnetische Eigenschaften von
Materie wird beschrieben durch
 χ_m und μ

Unterscheidung

- a) Diamagnete $\chi_m < 0$, klein
- b) Paramagnete $\chi_m > 0$, klein
- c) Ferromagnete $\chi_m > 0$, groß

Magnetisierung in Abh. von H



Stoffabhängigkeit:

Stoff	χ_m ($T=20^\circ\text{C}$)	
Stickstoff	$-0,0003 \cdot 10^{-6}$	} < 0 Diamagnete
Wasser	$-0,72 \cdot 10^{-6}$	
Wismut	$-14 \cdot 10^{-6}$	
Kupfer	$-9,8 \cdot 10^{-6}$	
Silber	$-2,6 \cdot 10^{-6}$	
Aluminium	$+ 2,3 \cdot 10^{-5}$	} Paramagnete
Kalzium	$+ 1,9 \cdot 10^{-5}$	
Wolfram	$+ 6,8 \cdot 10^{-5}$	
Platin	$+ 2,9 \cdot 10^{-5}$	
Sauerstoff	$+ 2,1 \cdot 10^{-5}$	
Eisen Cobalt/Nickel Ni ₂ Te ₁₄ B Legierungen	$500 - 10000$	} Ferromagnet

a) Diamagnetismus

- in Atomen & Molekülen ohne permanentes magn. Dipolmoment p_m
- im äußeren B -Feld / H -Feld:
Induktion $\rightarrow p_m$ entsteht
 \rightarrow Abschwächung von $B(H)$
- Energie im B -Feld höher

\hookrightarrow Diamagnete erfahren eine Kraft in Richtung des abnehmenden $B(H)$ -feldes

Beispiel: Wasser in Pflaume



Beispiel: pyrolytischer Graphit ist diamagnetisch



$$\chi_m = -4 \cdot 10^{-4}$$



\hookrightarrow abstoßende Kraft durch Permanentmagneten \rightarrow Schweben

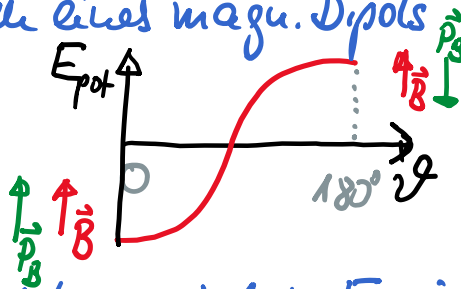
b) Paramagnetismus ($\chi_m > 0$, klein)

- in Materie: permanente Magnete (mit p_B), die nur schwach wechselwirken
- schwache Ausrichtung im äußeren H -(B -) Feld

→ Ordnung entsteht, Wärme steht dem entgegen

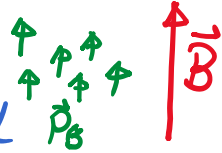
- Energie beim Drehen eines magu. Dipols

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p}_B \cdot \vec{B}$$
$$= -p_B \cdot B \cdot \cos\vartheta$$



↳ parallele Ausrichtung: niedrige Energie
antiparallel: hohe Energie

- ohne Wärme (Temperatur $T=0\text{K}$)
→ vollständige Ausrichtung aller elementarer Dipolmomente
Magnetisierung maximal



- Wärmeenergie ($T > 0\text{K}$)
→ chaotische Ausrichtung von p_B
Magnetisierung kleiner

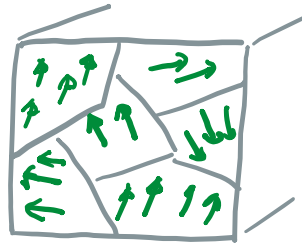


- für viele Stoffe: $\chi_m \sim \frac{1}{T}$ Curie-Gesetz

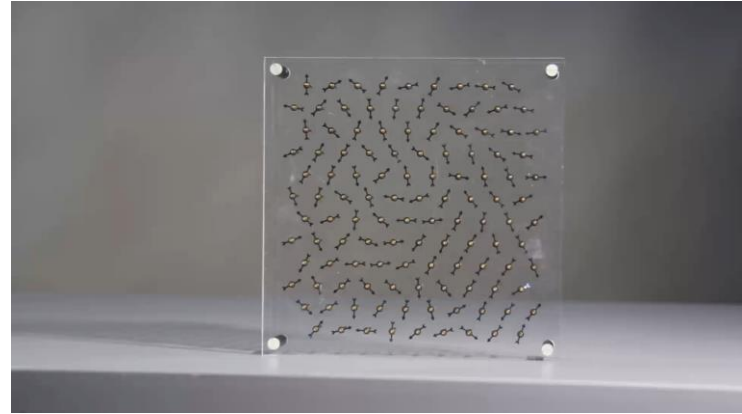
- im inhomogenen B -Feld:
Paramagnete werden in das Feld gezogen, da dort die Energie niedriger ist.

c) Ferromagnetismus

- Eisen, Kobalt, Nickel & Legierungen mit nicht aufgefüllten Elektronenschalen
- in Festkörpern: Teilvolumen mit ausgerichteten magh. Momenten
→ Weis'sche Bezirke



Modell in 2D: Kompass-Nadeln



- teilweise „Ordnung“
- Ausrichtung durch äußeres B
- Energie durch Schütteln → „Unordnung“

• Ferromagnete: Temperaturabhängigkeit

- es gilt näherungsweise

$$\chi = \frac{C}{T - T_c} \quad \text{für } T < T_c$$

mit der Curie-Temperatur T_c

Eisen: $T_c = 744^\circ\text{C}$

Nickel: $T_c = 372^\circ\text{C}$

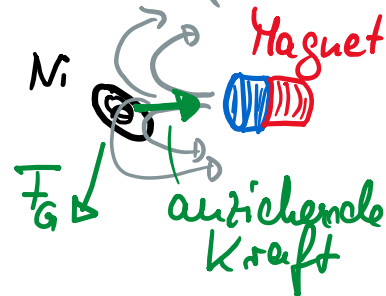
- für $T > T_c$: Ferromagnete werden zu Paramagneten, d.h. die Magnetisierung M wird klein

Beispiel: Ferromagnetismus von Nickel:



$T_{c, Ni} = 372^\circ\text{C}$

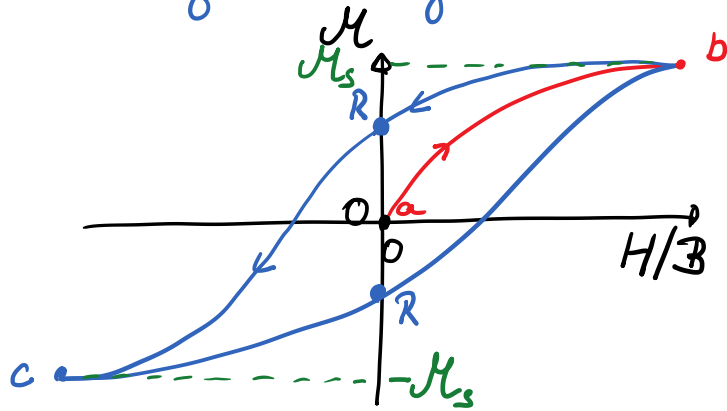
• 1 Euro: innere Teil mit hohem Ni-%



• für $T > T_{c, Ni}$:
 M wird klein, geringe Anziehung
• Abkühlung: Ni wird wieder ferromag.

Einbringen von Ferromagnet in
äußeres Magnetfeld:

- Ausrichtung / Umklappen von
Weiß'schen Bezirken
- Magnetisierung abh. von B



$a \rightarrow b$: Einschalten von B
→ Neumagnetisierung durch
Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke

Sättigungsmagnetisierung M_s : vollständige
Ausrichtung aller Weiß'schen Bezirke

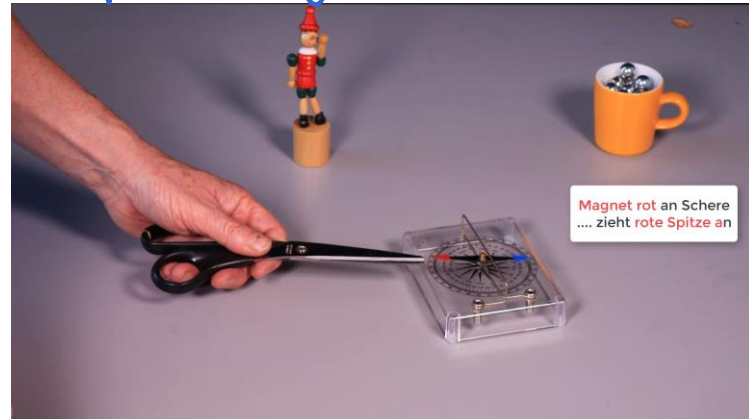
$b \rightarrow c$: Umkehrung von B
→ M wird kleiner

→ für $B=0$: teilweise Ausrichtung
der Weiß'schen Bezirke:

Restmagnetisierung / Remanenz R

• die Magnetisierung hängt vom „Vorzeichen“
ab

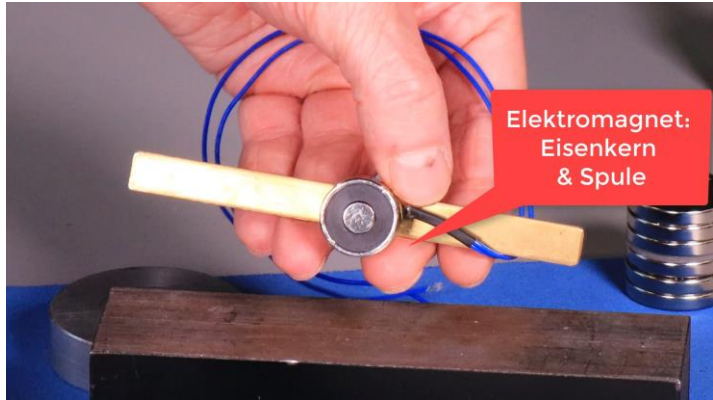
Beispiel: Magnetisierung einer Schere



Magnet rot an Schere
... zieht rote Spitze an

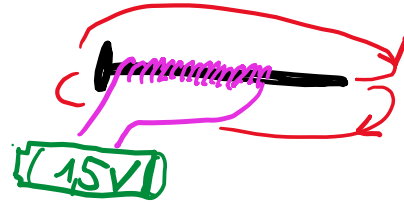
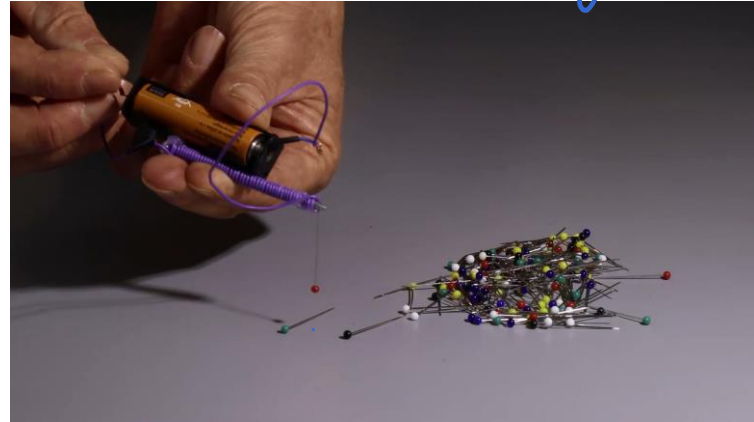


Anwendung: Elektromagnet



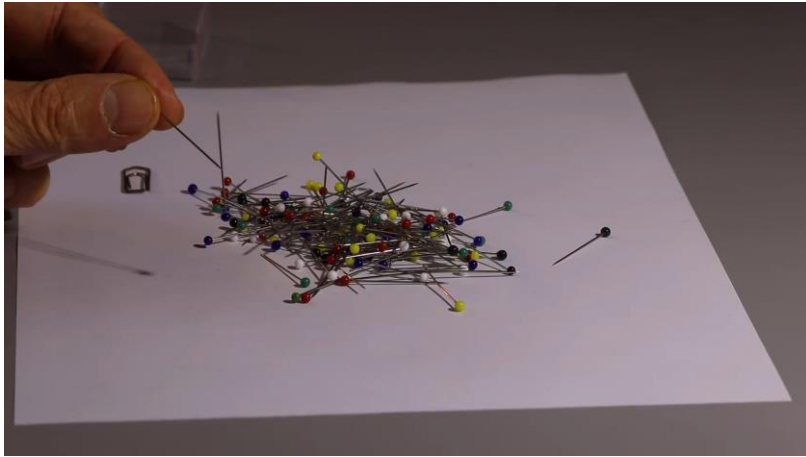
- Spule & Strom: B (H)-Feld
- Ferromagnet in Spule $\rightarrow \mu$
 \rightarrow starkes B

• einfachste Bauform: Nagel & Kabel



B -Feld ist stark,
wenn Strom fließt

Beispiel: Magnetisierung von Nadeln



- Anfangszustand: keine Magnetisierung
- durch Permanentmagnet: M entsteht in einer Nadel
- ... und Wirkung auf andere Nadeln

Kompass aus Nadel oder Nagel



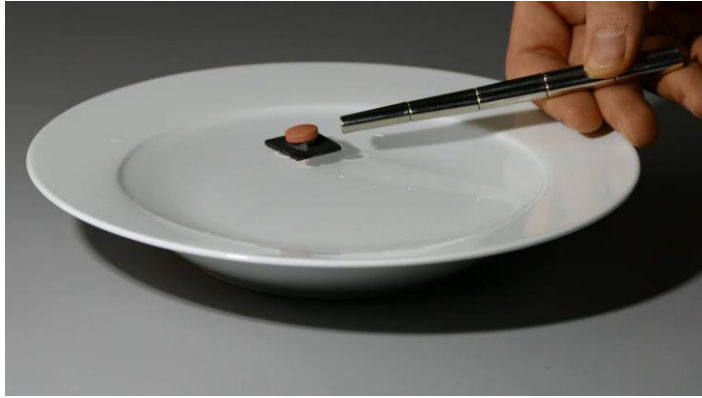
Kompass-Richtung

Nadel:
Magnetisierung durch
Permanentmagneten



- Magnetisierung
→ Ausrichtung im Erdmagnetfeld

Beispiel: Eisentablette
Cornflakes
& Permanentmagnet



Beispiel: Funktionelle Bildgebung mit Magnetresonanztomographie (fMRI)

... Kernspintomographie

- zur Darstellung von Hirnfunktionen



Signal nach
Fingerbewegung
im Motorcortex

BOLD-Kontrast:
"blood oxygenation
level dependent"

- Sauerstoffkonzentration ändert sich in aktiven Hirnregionen
 - Sauerstoff O_2 ist am Hämoglobin im Blut gebunden
 - desoxygeniertes Hämoglobin (Hb): ohne O_2 enthält Eisenatom mit vier ungepaarten Elektronen \rightarrow paramagnetisch
 - oxygeniertes Hämoglobin (oxy Hb): mit kovalenten Bindungen / gepaarte e^- \rightarrow diamagnetisch
- \hookrightarrow BOLD-Kontrast des fMRI basiert auf Änderung der magnetischen Eigenschaften von Hämoglobin

Physik: Einführung in den Elektromagnetismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

26. Die Maxwell-Gleichungen

Ziel: Beschreibung aller Phänomene des Elektromagnetismus mit wenigen Gleichungen

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

?

$$W_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$W_B = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

?

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\frac{d}{dt} \int \frac{q \cdot \vec{v}}{r^2}$$

?

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$$

?

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

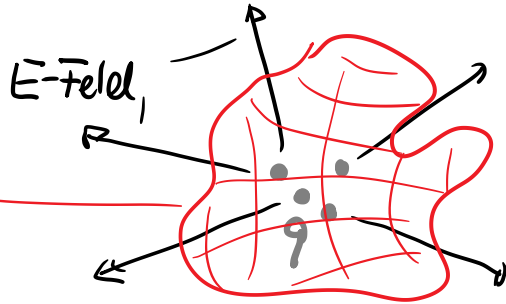
$$U_{ind} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

M1: Gauß'sches Gesetz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \leftarrow \text{eingeschlossene Ladung}$$

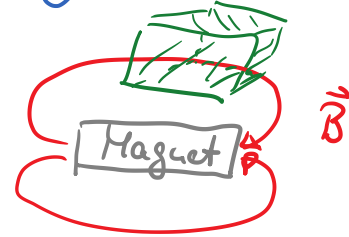
Integral über geschlossene Fläche



- Ladungen sind die Quellen der E-Felder

M2: Gauß'sches Gesetz für B-Felder

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



- es gibt keine „magnetischen Ladungen“ (magnetische Monopole)
- B-Feldlinien sind geschlossen

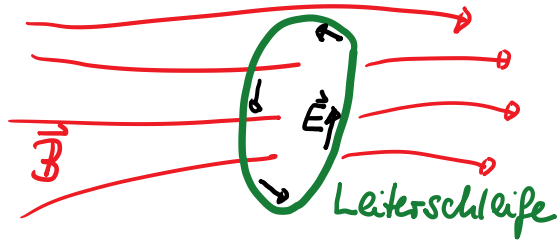
M3: Faraday'sches Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \Phi_m = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Integral von \vec{E}
entlang einer geschlossenen
Linie

zeitliche Änderung
Leit'sche Regel

magn. Fluß

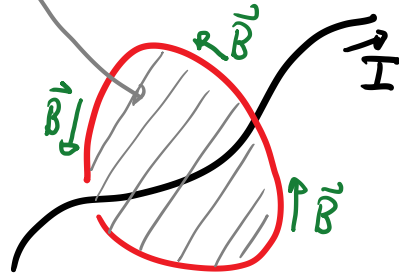


M4: Ampère'sches Gesetz ... mit Änderung

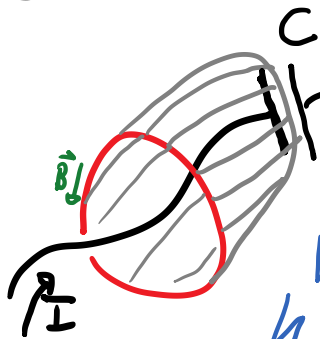
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Strom durch Fläche

geschlossenes
Integral entlang
einer Linie



Keine Festlegung der Fläche!



... Leiter mit
Kondensator C
→ Strom $I=0$, wenn die
Fläche zwischen den
Kondensatorflächen liegt

⚡ Widerspruch ⚡

Auflösung des Widerspruchs durch
Maxwell'schen Verschiebestrom $I_v = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$
mit elektr. Fluss $\Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_v) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Beispiel: Kondensator



$$I = \frac{dQ}{dt}$$

elektr. Fluss aus Gauß'schem Gesetz

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

geschlossene Fläche

$$I_v = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

→ Zunahme der Ladung ↔ Zunahme
des elektr. Flusses
der Strom $I + I_v$ ist nicht unterbrochen!

→ Maxwell-Gleichungen,
in Integralform

$$M1: \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{Gauß'sches Gesetz}$$

$$M2: \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{es gibt keine} \\ \text{magn. Monopole}$$

$$M3: \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{Faraday'sches} \\ \text{Induktionsgesetz}$$

$$M4: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ \text{Ampère'sches Gesetz, allgemein}$$

- hohe Symmetrie
- M1 & M2: nur \vec{E} oder \vec{B}
- M3 & M4: zeitliche Änderung,
Kopplung von \vec{E} & \vec{B}

Integralform \rightleftharpoons Differentialform

Beispiel Mechanik:

$$\vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt \quad \rightleftharpoons \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \\ = \frac{d}{dt} \vec{p} = m \frac{d}{dt} \vec{v}$$

oft einfacher
zu lösen!

gesucht: Maxwell-Gl. in
Differentialform

Vektoranalysis notwendig zur Umformung der Maxwell-Gl. in Differentialform

a) Gradientenoperator:

$$\text{grad} = \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ Nabla-Operator}$$

... Vektor mit den Ableitungen nach x, y, z

$$E\text{-Feld: } U = \Delta\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi, \frac{\partial}{\partial y}\varphi, \frac{\partial}{\partial z}\varphi \right)$$

$\vec{\nabla}$ wirkt auf Skalar $\varphi \rightarrow$ Vektor \vec{E}
gibt die Richtung der größten Steigung an

b) Divergenz

Die Divergenz eines Vektors \vec{a} ist:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{a} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \end{aligned}$$

c) Rotation:

Die Rotation eines Vektorfeldes \vec{a} ist

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y \\ \frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x \end{pmatrix}$$

und gibt die Stärke von Wirbeln an.

aus der Vektoranalysis:

Satz von Gauß: für ein beliebiges
Vektorfeld \vec{a} gilt

$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{A} = \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) dV$$

Int. über
geschlossene Fläche

Fläche

Integral über Vol.,
das von Fläche S
eingeschlossen wird

damit wird:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad M1$$

$$= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$m1$

Ladungs-
dichte ρ

und ebenso:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \cdot dV = 0 \quad M2$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$m2$

ebenfalls aus der Vektoranalysis:

Satz von Stokes: für ein Vektorfeld \vec{a} gilt

$$\oint \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \times \vec{a} \cdot d\vec{A}$$

Integral über geschlossenen Weg

Integral über Fläche, die durch geschl. Weg begrenzt wird

• damit wird aus M3:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int -\frac{d}{dt} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Int. über gleiche Fläche

• ebenso Umformung von M4:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\int \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{d}{dt} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

mit Strom $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$
Stromdichte \vec{j}
(Strom pro Fläche)

$$\hookrightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \vec{E} \quad (M4)$$

Maxwell-Gleichungen

Integralform:

Differentialform:

$$M1: \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$m1: \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$M2: \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$m2: \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$M3: \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$m3: \nabla \times \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

$$M4: \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$m4: \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \vec{E}$$

- „Schönheit“ in der Physik
 - wenige Gleichungen
 - Symmetrie
- \vec{E} - und \vec{B} -Felder gehören zusammen
„Vereinheitlichung“
- Elektromagnetismus ist mit den Maxwell-Gleichungen abgeschlossen

Prof. Dr. Matthias Kohl



Links zum Kurs:

1. Youtube – Kanal „Physik – Experimente & Formeln“

https://www.youtube.com/channel/UCg56i-Dp-TYQWJkgX8Ia-hw?view_as=subscriber

2. Lehreserver OLAT: Vorlesung, Script, Übungen

<https://olat.vcrp.de/url/RepositoryEntry/2377352328?guest=true&lang=de>

unter Hochschule Koblenz, Mathematik und Technik



Prof. Dr. Matthias Kohl

