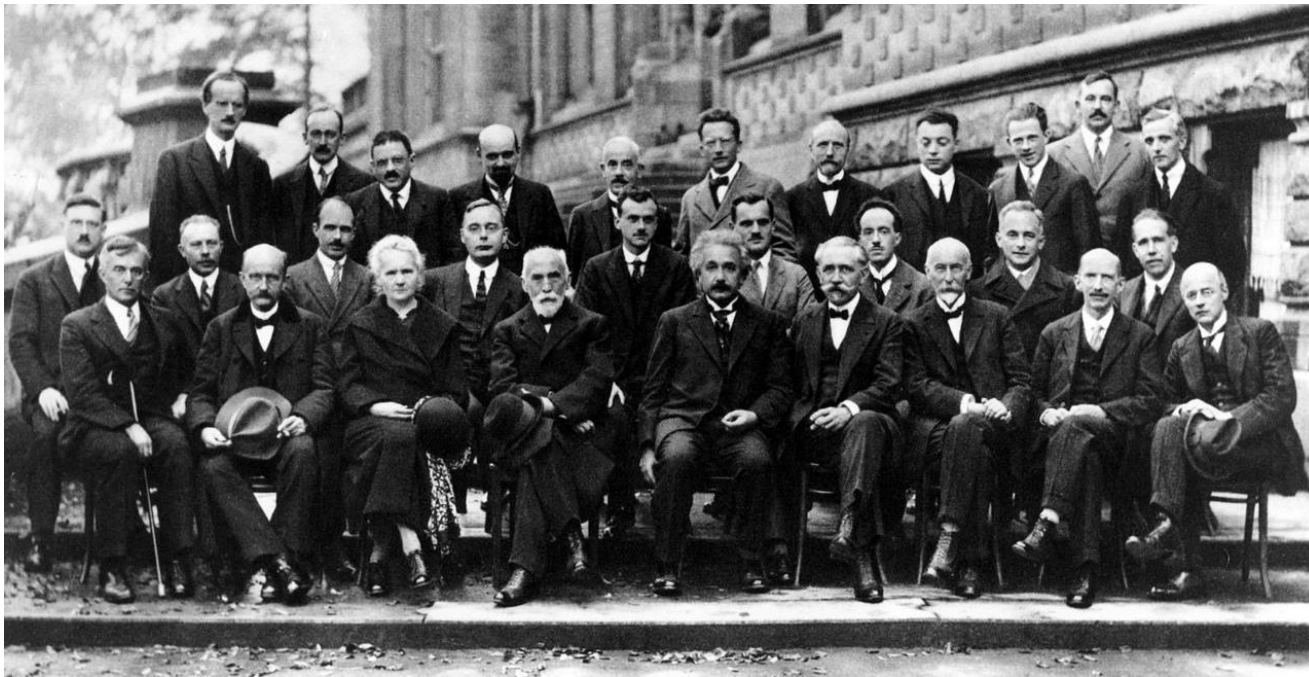


Einführung in die Moderne Physik Worum es geht!



Prof. Dr. Matthias Kohl

Einführung in die Moderne Physik: Worum es geht!

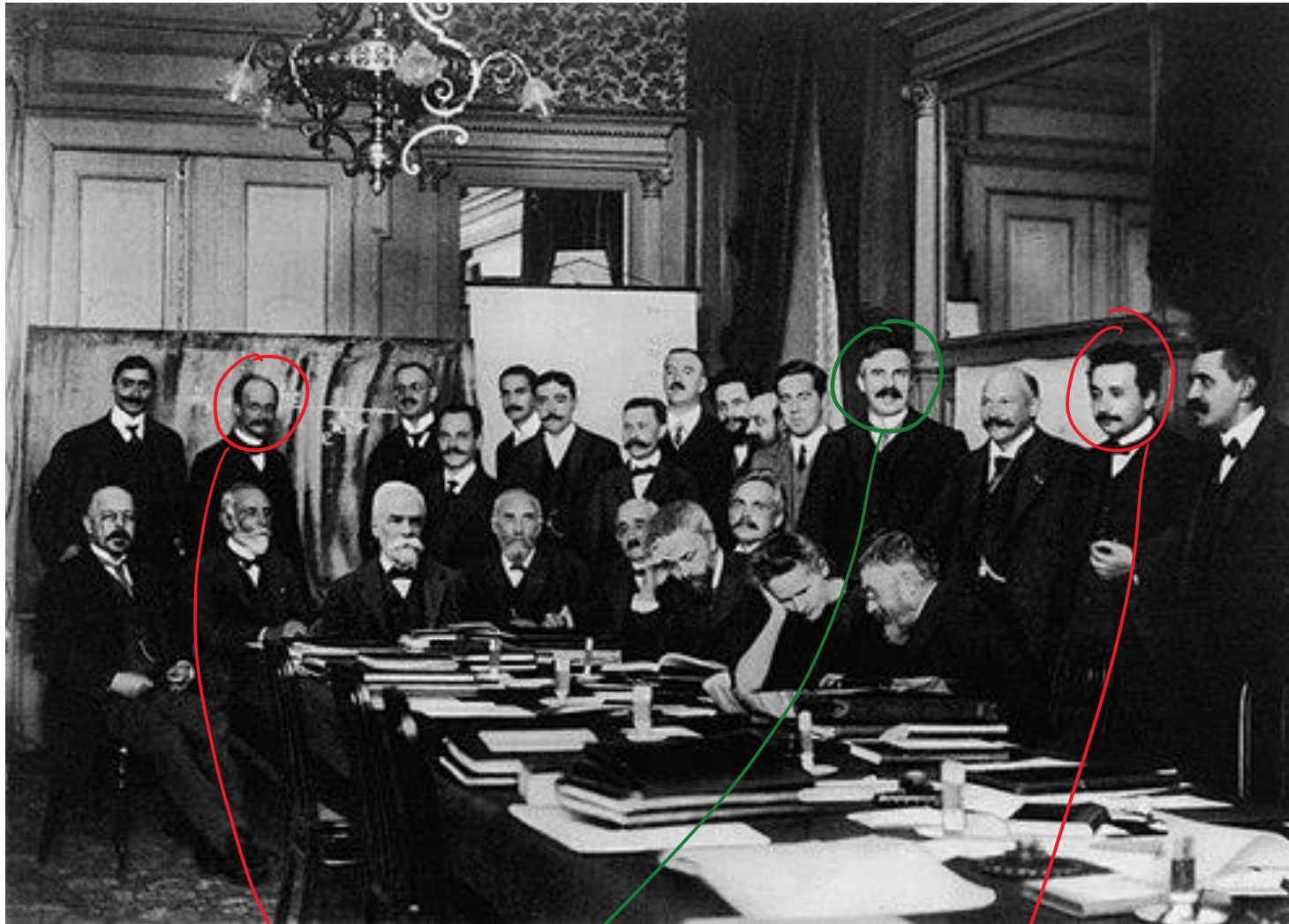
Klassische Physik {
Mechanik
Wärmelehre
Elektromagnetismus
Optik

Moderne Physik
ab 1900 {
Atome, Kerne,
Moleküle
Quantenphysik
.....
Relativitätstheorie

↳ Physik
des Mikrokosmos

des Makrokosmos

Solvay - Konferenz 1911



Stehend von links nach rechts: Robert Goldschmidt, Max Planck, Heinrich Rubens, Arnold Sommerfeld, Frederick Lindemann, Maurice de Broglie, Martin Knudsen, Friedrich Hasenöhl, Georges Hostelet, Édouard Herzen, James Jeans, Ernest Rutherford, Heike Kamerlingh Onnes, Albert Einstein, Paul Langevin
Sitzend von links nach rechts: Walther Nernst, Marcel Brillouin, Ernest Solvay, Hendrik Antoon Lorentz, Emil Warburg, Jean-Baptiste Perrin, Wilhelm Wien, Marie Curie, Henri Poincaré

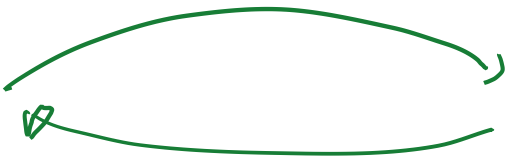
Solvay - Konferenz 1927



Stehend von links nach rechts: A. Piccard, É. Henriot, P. Ehrenfest, É. Herzen, Th. Donder, Erwin Schrödinger, J. Verschaffelt, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, R. H. Fowler, L. Brillouin

zweiten Reihe sitzend von links nach rechts: P. Debye, M. Knudsen, W. L. Bragg, H. Kramers, Paul Dirac, Arthur Holly Compton, L.-V. de Broglie, Max Born, Niels Bohr

ersten Reihe sitzend von links nach rechts: I. Langmuir, Max Planck, Marie Curie, Hendrik Antoon Lorentz, Albert Einstein, P. Langevin, Ch. Guye, Ch. Th. Wilson, O. Richardson

• Teilchen  Welle
Dualismus

Licht ~ Photon
Elektron

- Aufbau der Materie
 - Atome: Elektronenhülle
Kerne
 - Moleküle
 - Festkörper
- ... Quantenmechanik

Einführung in die **Moderne Physik**

Planck'sches Strahlungsgesetz, Wärmestrahlung

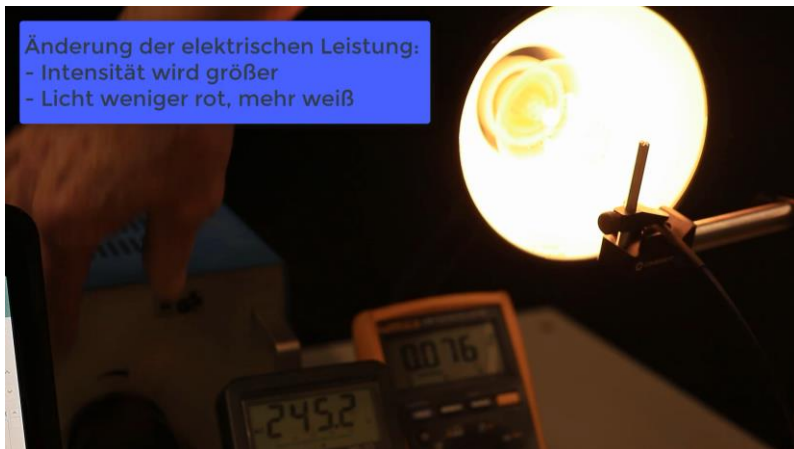
Prof. Dr. Matthias Kohl

"Geburtsstag" der modernen Physik:
14.12.1900 Max Planck hält Vortrag
über Strahlungsgesetz und
Quantenhypothese

→ Licht als Teilchen

Annäherung an Thema: Experiment

• Strahlung einer Glühbirne als
Funktion der Leistung



Beobachtung:

• Strahlung / Licht
ist kontinuierlich,



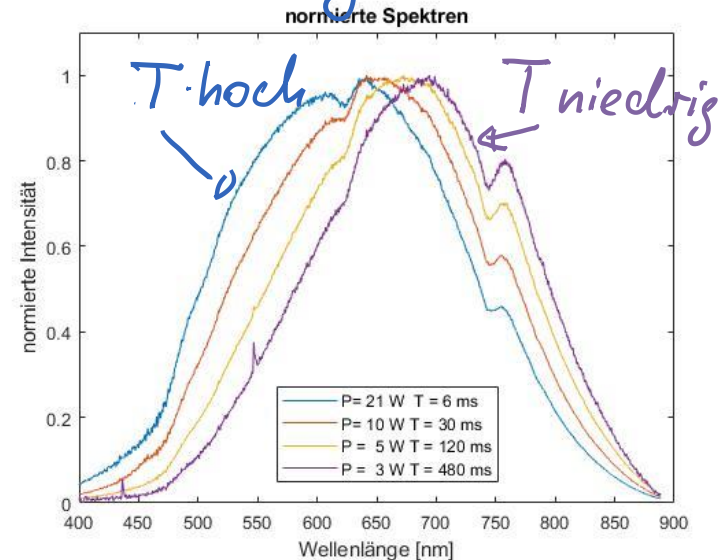
• Spektrum verschiebt sich:
hohe elektrische Leistung

→ hohe Temp.

→ mehr Licht

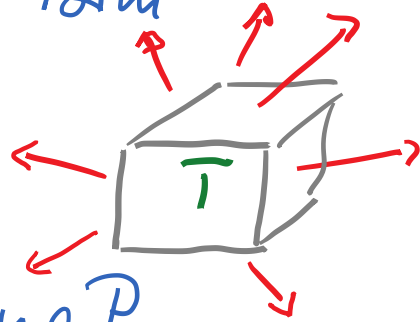
Int. um Faktor
80 größer

→ mehr blau,
also kurze
Wellenlängen



Beschreibung der Wärmestrahlung:

- jeder Körper einer Temperatur T strahlt Energie ab in Form elektromagnetischer Wellen



- die abgestrahlte Leistung P ist abhängig:

$$P \sim A \text{ Fläche}$$

$$P \sim T^4 \quad (T \text{ in K, nicht } ^\circ\text{C})$$

$$P \text{ abhängig von Oberfläche,} \\ \text{Emissionsgrad } e \quad 0 \leq e \leq 1$$

$$\hookrightarrow \boxed{P = e \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4} \quad \text{Stefan-Boltzmann-Gesetz}$$

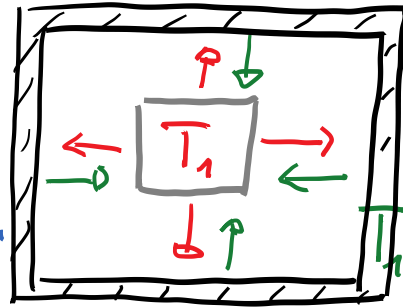
mit der Stefan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

- empirisch, aus Experimenten
- allgemein gültig, für jeden Körper

Emission und Absorption von Wärme:

- zwei Körper gleicher Temperatur T_1 :

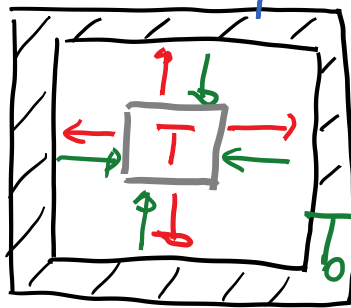


Emission und Absorption müssen gleich sein, da sonst ein Körper wärmer würde
↳ Emissionsgrad = Absorptionsgrad

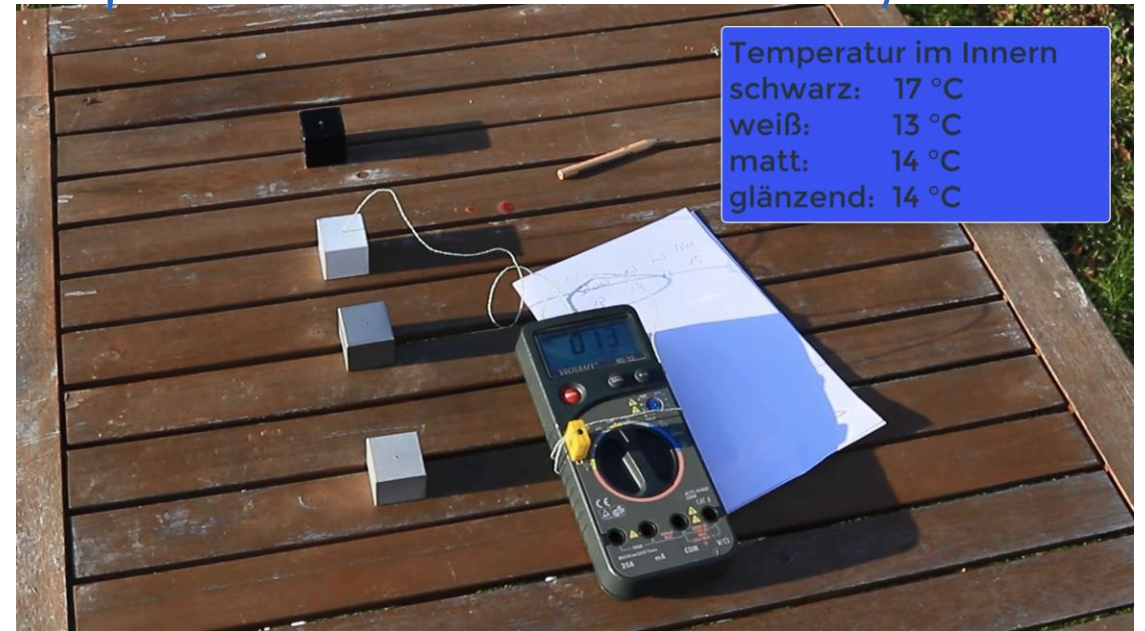
- zwei Körper unterschiedlicher Temp:

$$\Delta P = e \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_0^4)$$

↗ entspricht Abgabe & Aufnahme von Energie



Experiment: Sonne als Strahlquelle

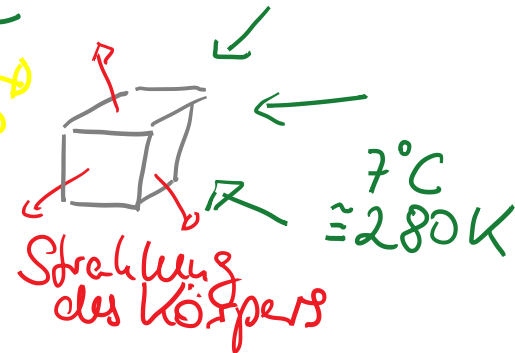


Temperatur im Innern
schwarz: 17 °C
weiß: 13 °C
matt: 14 °C
glänzend: 14 °C

- Außentemperatur: 7°C

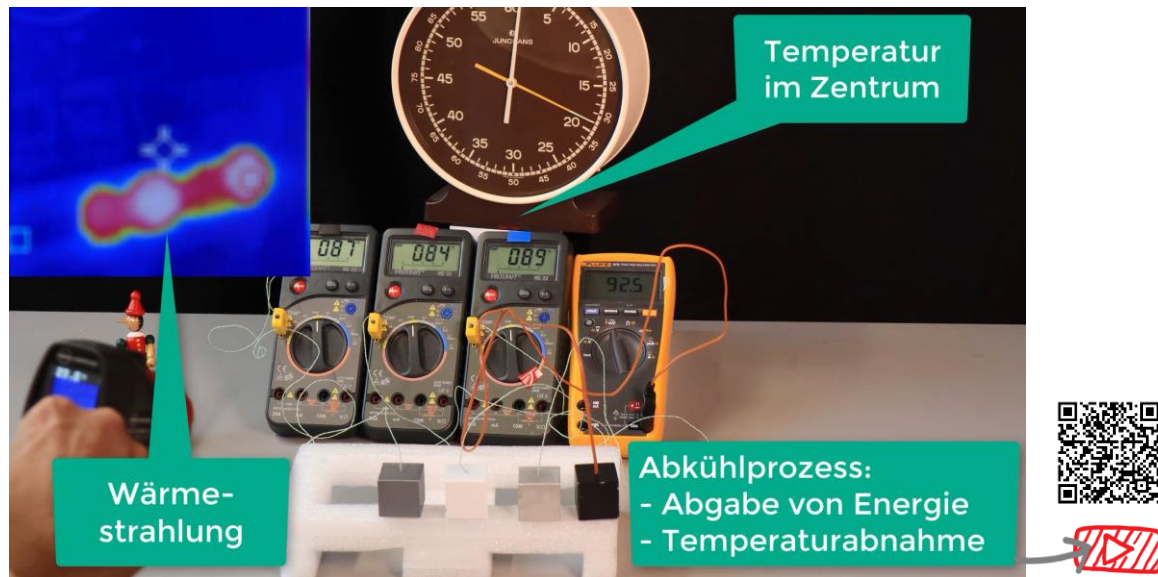
☺
6000 K

- Gleichgewicht der Strahlung: T abhängig von Oberfläche

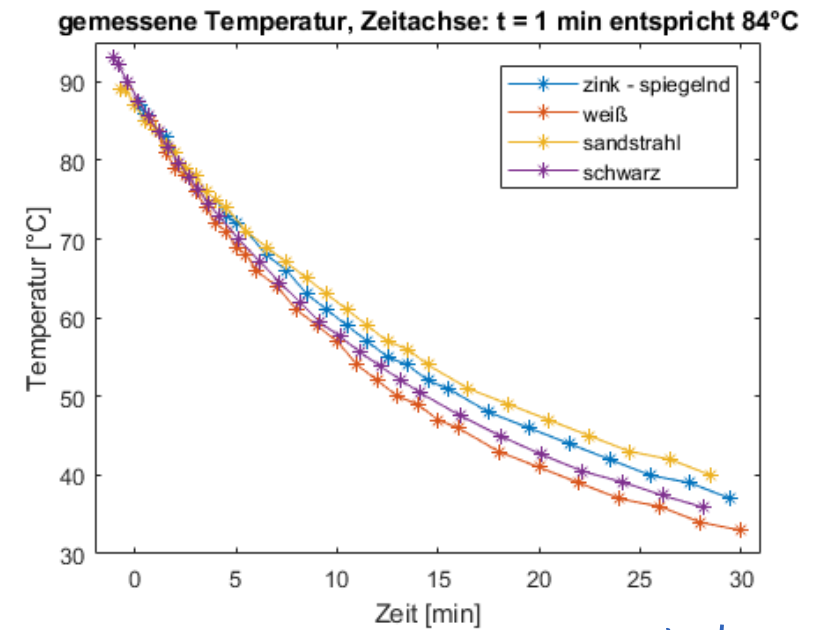


Strahlung und Temperatur hängen
zusammen:

Experiment: Wärmestrahlung
gleiche Klötze: schwarz, weiß, spiegelnd,
metall
welcher kühlt am schnellsten?

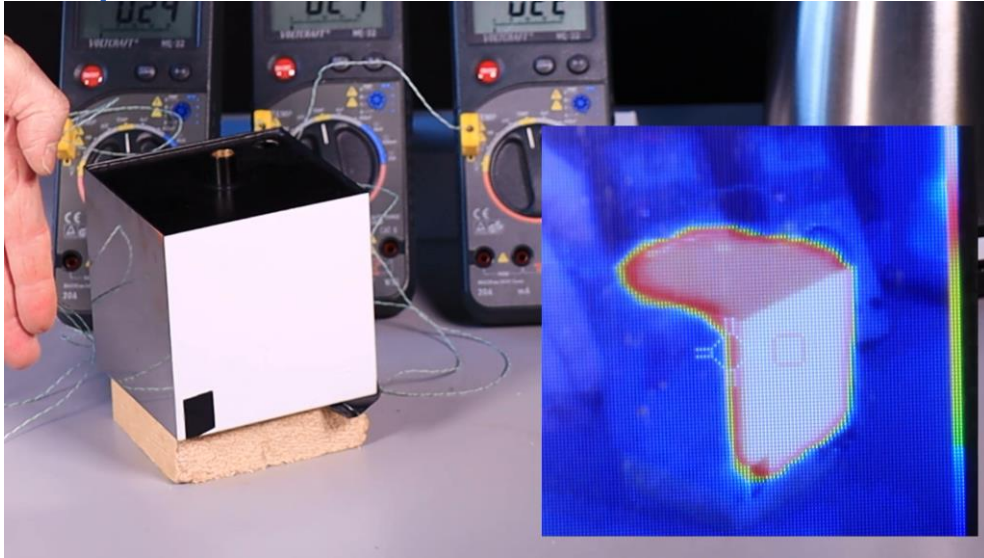


↳ große Strahlung $\equiv$ schnelles Abkühlen



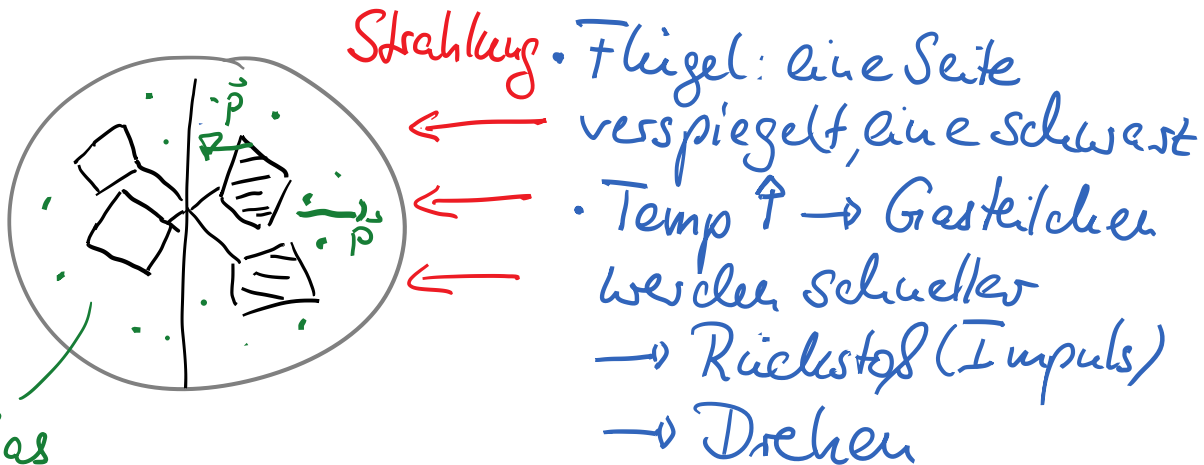
↳ weißer und schwarzer Klotz
- strahlen am stärksten!
- kühlen am schnellsten!

Experiment: Leslie-Würfel



- Würfel mit heißem Wasser
 - Oberflächentemperatur ist gleich
 - Wärmestrahlung hängt von Oberfläche ab !
 - weiß & schwarz: starke Strahlung
 - matt, verspiegelt: geringe Strahlung

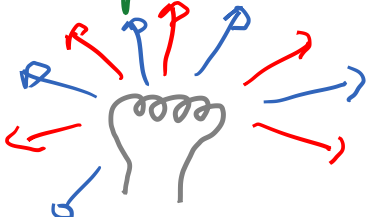
Experiment: Lichtmühle/Wärmemühle



- Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$P = e \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$$

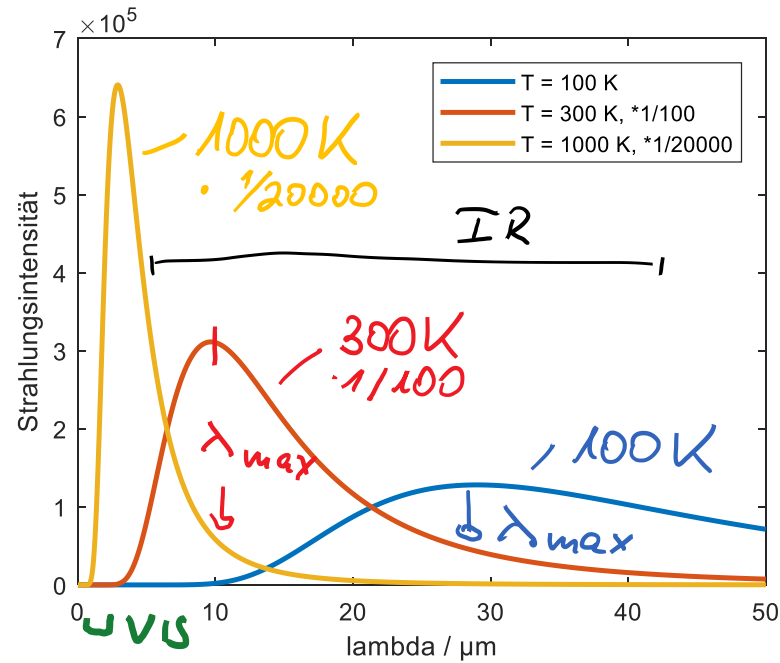
↑ gesamte Strahlungsleistung
keine Aussage über Spektrum!

aber: Farbe (Spektrum) 
abh. von T

↳ Planck'sches Strahlungsgesetz

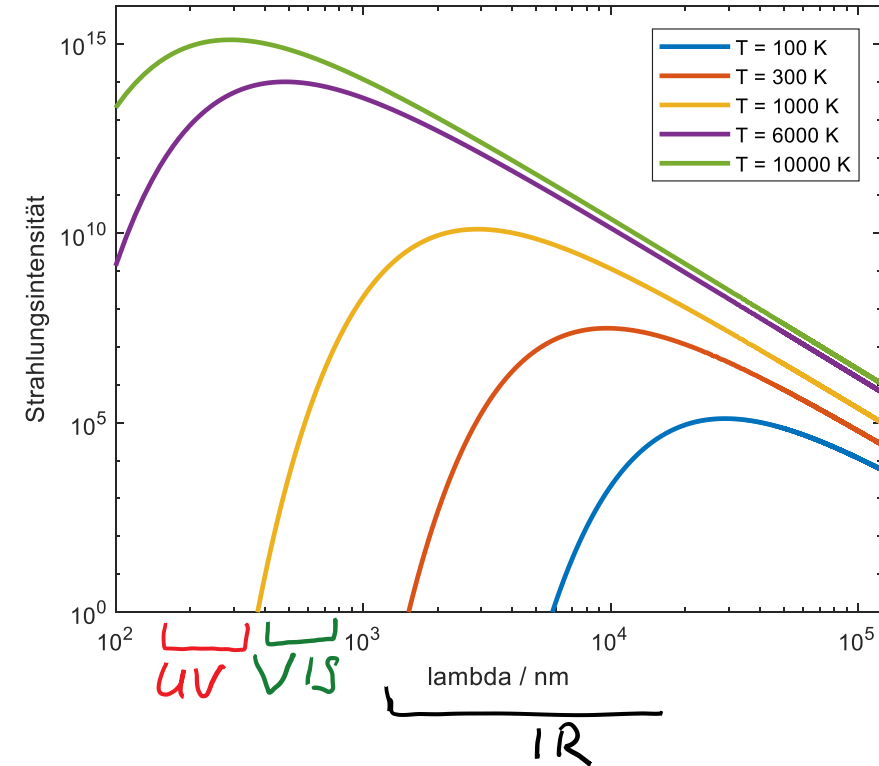
Spektrum der Wärmestrahlung

- im Experiment (Ende 19. Jahrhundert)



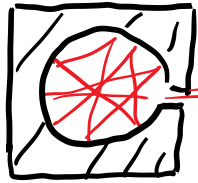
- kontinuierlich
- vor allem im infraroten Bereich
- sichtbar (VIS) nur für hohes T
- Maximum verschiebt sich

Doppelt-Logarithmische Darstellung



Max Planck: theoretische Beschreibung
des experimentellen Spektrums

- Annahme: Hohlraum-/Schwarzkörper
Offen mit kleiner Öffnung



Strahlung tritt aus

- Annahme: Strahlung wird in kleinsten
Einheiten der Energie, den Photonen
(Quanten) ausgesandt

$$E = h \cdot \nu$$

Energie des
Photons
(Teilchen)

Frequenz
der Strahlung (Welle)
Konstante

mit Planck'scher Konstante (Wirkungs-
quantum)

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

- Modell: Strahlungsmode
siehe Literatur, z.B. Demtröder: Exp. Phy 2

↳ Planck'sches Strahlungsgesetz:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \left(\frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B T}} - 1} \right)$$

↑
T geht ein!

Intensität, die pro
Fläche im Bereich λ
abgestrahlt wird

c - Lichtgeschw.
 k_B - Boltzmann-K.

- Planck nannte h als „Hilfsgröße“,

Planck'sches Strahlungsgesetz:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda \cdot k_B T}\right)} - 1}$$

- durch Integration kann gezeigt werden:

$$P \sim \int_0^\infty I d\lambda \sim T^4 \quad \text{Stefan-Boltzmann-Gesetz}$$

- das Maximum von $I(\lambda, T)$ bei $\lambda_{\max}$:

$$\lambda_{\max} = \frac{2,89 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T} \quad \text{Wien'sches Verschiebungsgesetz}$$

$\uparrow$
in K

Beispiel:

- Zimmertemperatur $T \approx 300 \text{ K}$:

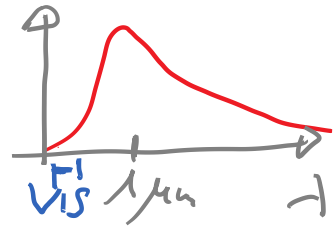
$$\lambda_{\max} = \frac{2,89 \text{ mm} \cdot \text{K}}{300 \text{ K}} \approx 0,01 \text{ mm} = 10 \mu\text{m}$$

↳ Maximum im Infrarotbereich

- Halogenlampe $T \approx 3000 \text{ K}$

$$\lambda_{\max} \approx 1 \mu\text{m}$$

wenig Strahlung im VIS



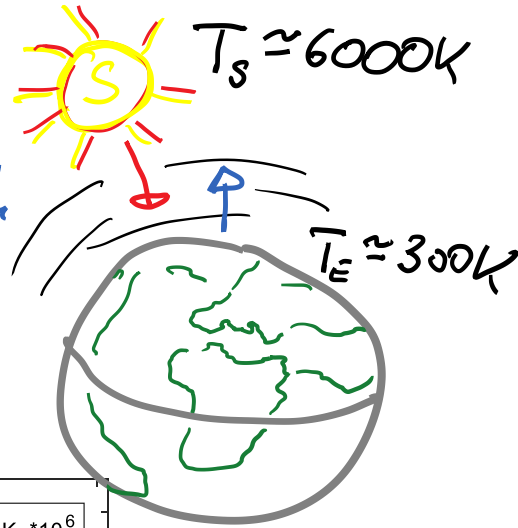
- Sonnenstrahlung: gemessen wird

$$\lambda_{\max} \approx 480 \text{ nm}$$

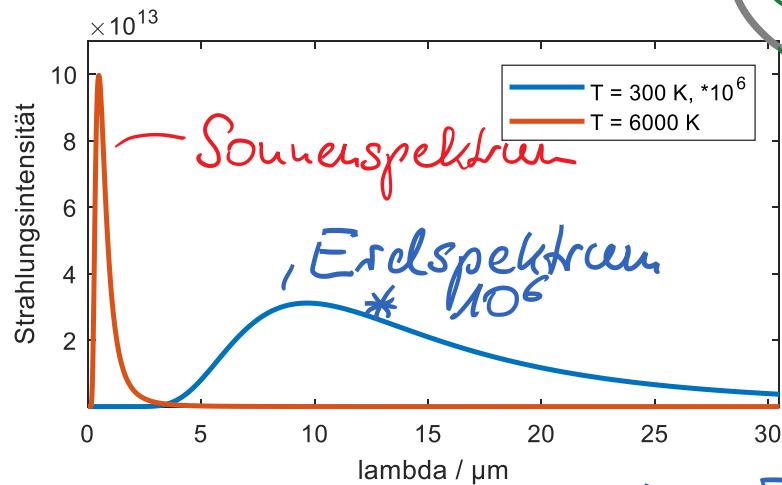
→ Sonnenoberfläche hat $T_s \approx 6000 \text{ K}$

Beispiel Treibhauseffekt durch CO_2

• Sonne: $\lambda_{\text{max}} \approx 480 \text{ nm}$ $T_s \approx 6000 \text{ K}$



Strahlung wird durch
Atmosphäre trans-
mittiert



• Erde sendet vor allem Infrarotstrahlung
aus, die von Atmosphäre reflektiert
und absorbiert wird

Plancks Hypothese:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

$$c = \lambda \cdot \nu$$

Wellenbild des Lichts:



E-Feld / B-Feld beschreiben Licht

Teilchenbild des Lichts:



mit Geschw. c und Energie $E = h\nu$

Planck'sche Konstante (Wirkungsquantum)
bestimmt kleinste Energieinheit des Lichts

Dualismus

Beispiel und Abschätzung:

Photon : $E = h \cdot \nu$ $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

a) Laserpointer mit Leistung $P = 1 \text{ mW}$
und $\lambda = 620 \text{ nm}$ (rot)

Photonenanzahl pro Sekunde n :

$$\begin{aligned} n &= \frac{\text{Leistung}}{\text{Photonenenergie}} \\ &= \frac{P}{h \cdot \nu} = \frac{P}{h \cdot \frac{c}{\lambda}} \\ &= \frac{1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 620 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &= 3,12 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{s}} \quad (\text{Photonen pro Sekunde}) \end{aligned}$$

Photonenenergie E :

$$\begin{aligned} E &= h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \\ &= 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

Herleitung des Planck'schen Strahlungsgesetzes

Prof. Dr. Matthias Kohl

Herleitung der Strahlungsformel
nach Einstein/Planck (1917):

$$u(\nu) \cdot d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot h\nu^3 \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \cdot d\nu$$

↑ Strahlungsdichte im Bereich ν bis $\nu + d\nu$

Ansatz:

- Thermodynamik/Boltzmann-Vert.

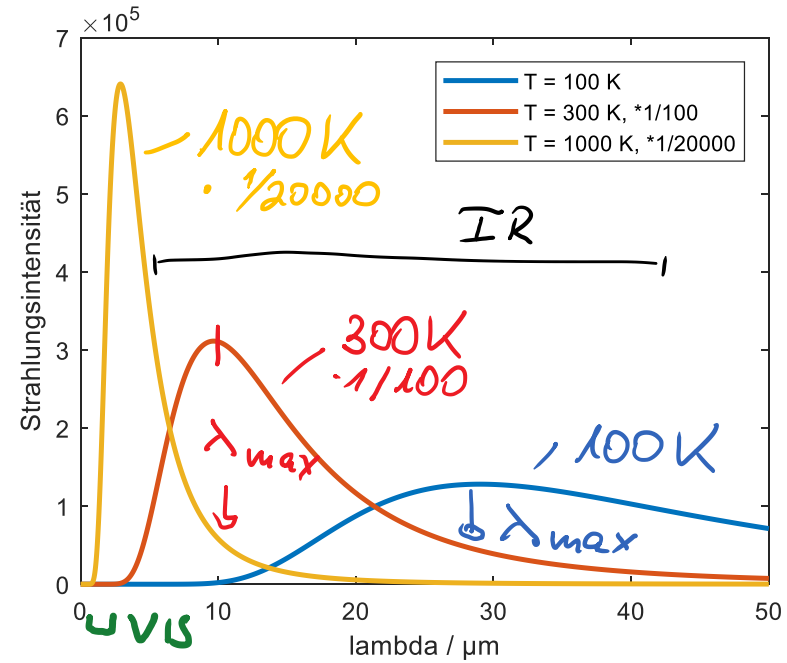
$$n_2/n_1 = e^{-(E_2 - E_1)/(k_B T)}$$

& Gleichverteilungssatz

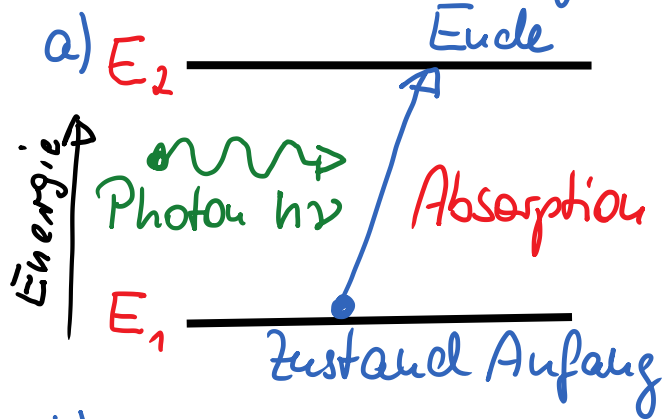
- Optik: Licht als e.-m. Welle mit ν, λ
oder Photon mit $E = h \cdot \nu$

„Hilfsgröße“ nach Planck

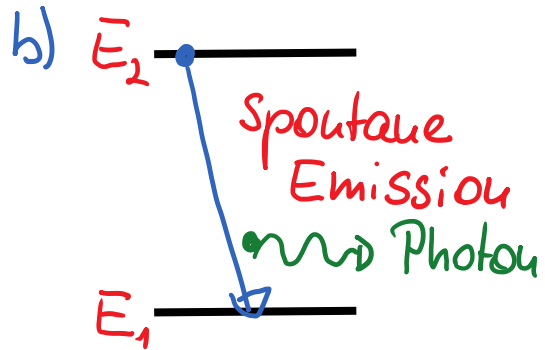
- diskrete Energieniveaus in Atomen
(→ Bohr'sches Modell)



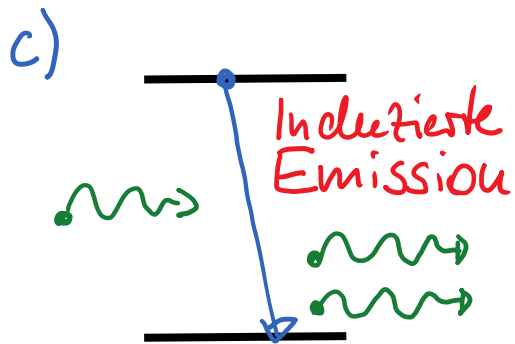
- für ein 2-Energieniveau System:



Absorption eines Lichtquants, Energieübertragung $\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu$
Photon verschwindet

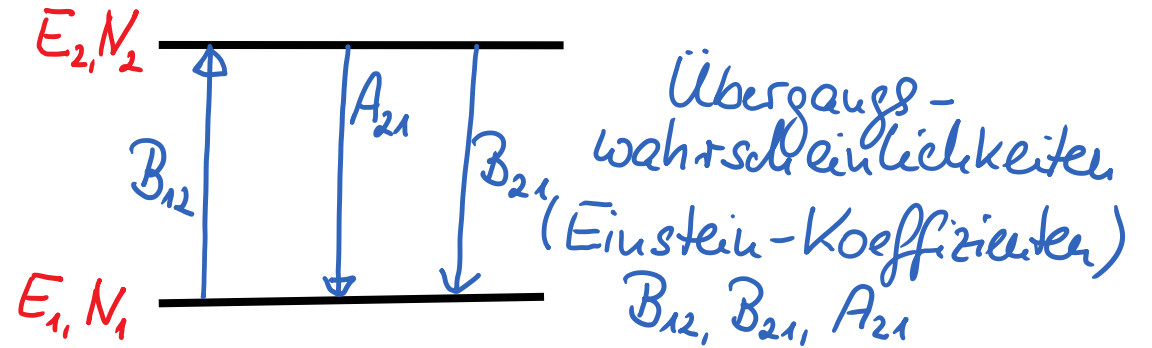


→ Lichtquant / Photon entsteht mit $h\nu = E_2 - E_1$, statistisch nach Lebensdauer τ ; Emission in alle Raumrichtungen



Lichtquant erzeugt aus der Energie $\Delta E = E_2 - E_1$ ein zweites Lichtquant, das die gleiche Richtung und Phase hat (Kohärent)

- Annahme: N zwei-Niveau Atome
 N_1 mit E_1 , N_2 mit E_2 , $N = N_1 + N_2$
thermisches Gleichgewicht zwischen Strahlung und Atomen



→ Strahlungsfeld $u(\nu)$

Frequenzspektrum nach Planck

a) Absorption von 1 nach 2:

Rate der Übergänge

$$dN_{12} = N_1 \cdot u(\nu) \cdot B_{12} \cdot dt$$

↑ Wahrscheinlichkeit
für Prozeß pro Zeit dt

b) Spontane Emission

$$dN_{21}^s = N_2 \cdot A_{21} \cdot dt$$

c) induzierte Emission

$$dN_{21}^i = N_2 \cdot u(\nu) \cdot B_{21} \cdot dt$$

Gleichgewicht: $dN_{12} = dN_{21} = dN_{21}^s + dN_{21}^i$

$$\hookrightarrow N_1 \cdot u(\nu) \cdot B_{12} = N_2 \cdot A_{21} + N_2 \cdot u(\nu) \cdot B_{21}$$

$$\hookrightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{u(\nu) B_{12}}{A_{21} + u(\nu) \cdot B_{21}}$$

∇ im Gleichgewicht beschreibt die Boltzmann-Verteilung die Besetzung

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} \quad \text{mit } \Delta E = E_2 - E_1 = h\nu$$

$$\hookrightarrow e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} = \frac{u(\nu) \cdot B_{12}}{A_{21} + u(\nu) B_{21}}$$

$$e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} (A_{21} + u(\nu) \cdot B_{21}) = u(\nu) \cdot B_{12}$$

$$\hookrightarrow u(\nu) (B_{12} - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \cdot B_{21}) = e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \cdot A_{21}$$

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{+\frac{h\nu}{k_B T}} - B_{21}}$$

• experimentelle Bedingung:

für $T \rightarrow \infty$ wird $u(\nu) \rightarrow \infty$

$$\hookrightarrow B_{12} = B_{21}$$

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \cdot \frac{1}{e^{+\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

- experimentelle Beobachtung:

(*)

für kleine ν , d.h. $h\nu \ll k_B T$

$$u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \cdot k_B T$$

mit $e^x \approx 1 + x$ für kleines x

$$\hookrightarrow \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \frac{k_B T}{h \cdot \nu}$$

und damit wird

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi}{c^3} \cdot h \nu^3$$

$$\hookrightarrow u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \cdot h \nu^3 \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Planck'sches
Strahlungsgesetz

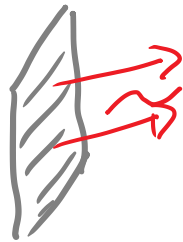
(*) $u(\nu) \sim \nu^2$ kann auch aus der Berechnung der Moden e.-m. Wellen in einem Hohlraum gefolgert werden.

Planck-Gesetz: Schreibweise

a) Intensität im Bereich zwischen λ und $\lambda + d\lambda$

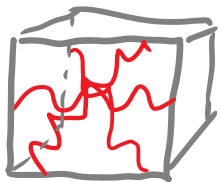
$$I(\lambda, T) \cdot d\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \cdot d\lambda$$

Abstrahlung von einer Fläche



b) Strahlungsdichte im schwarzen Körper
zwischen ν und $d\nu$

$$u(\nu, T) \cdot d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot h\nu^3 \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \cdot d\nu$$



Faktor 8 im Hohlraum,
2 Polarisierungen

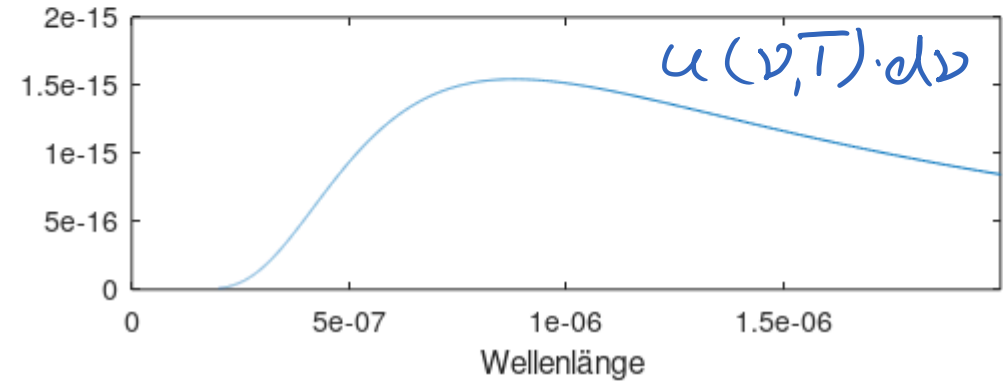
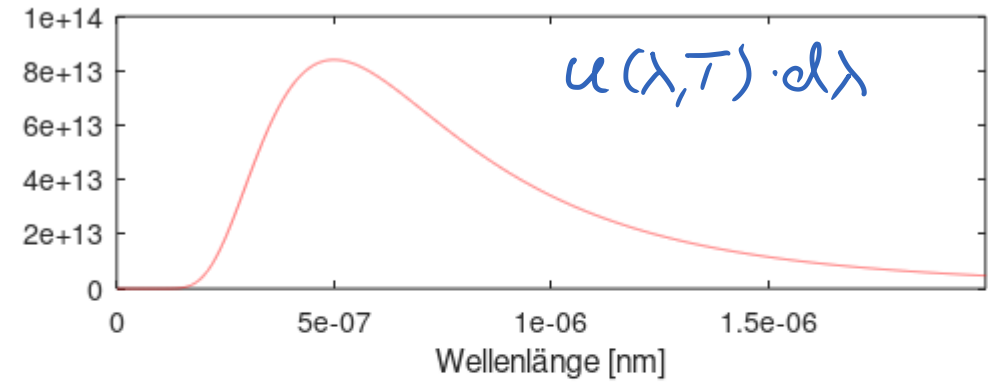
Umrechnung von λ - in ν - Abhängigkeit

mit $c = \lambda \cdot \nu$ oder $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{c}{\lambda} \right) = -\frac{c}{\lambda^2} = -\frac{\nu^2}{c}$$

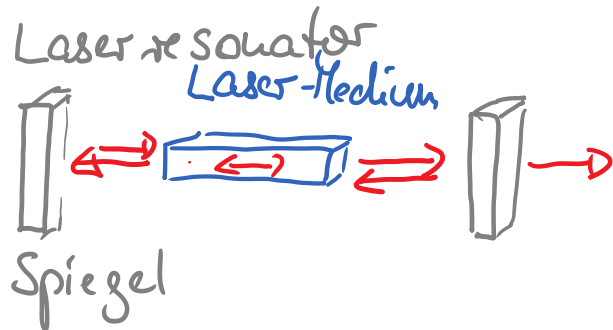
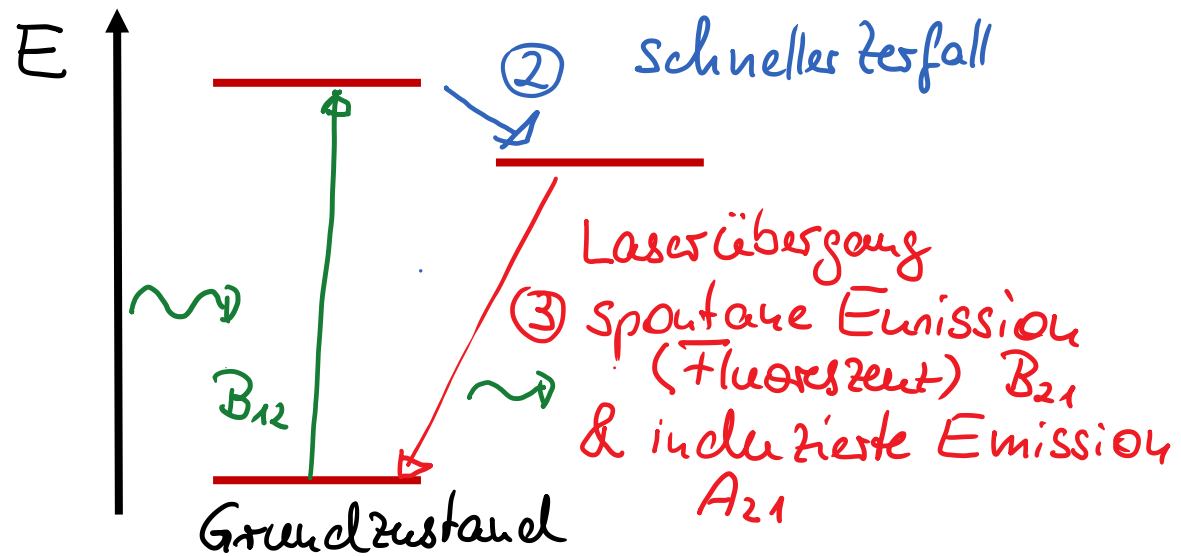
$$\begin{aligned} \text{daher } \frac{c^2}{\lambda^5} \cdot d\lambda &= -\frac{c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{c}{\nu^2} \cdot d\nu \\ &= -\frac{c^3}{c^5/\nu^5} \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot d\nu \\ &= \frac{\nu^3}{c^2} \cdot d\nu \end{aligned}$$

$$T = 5800 \text{ K}$$



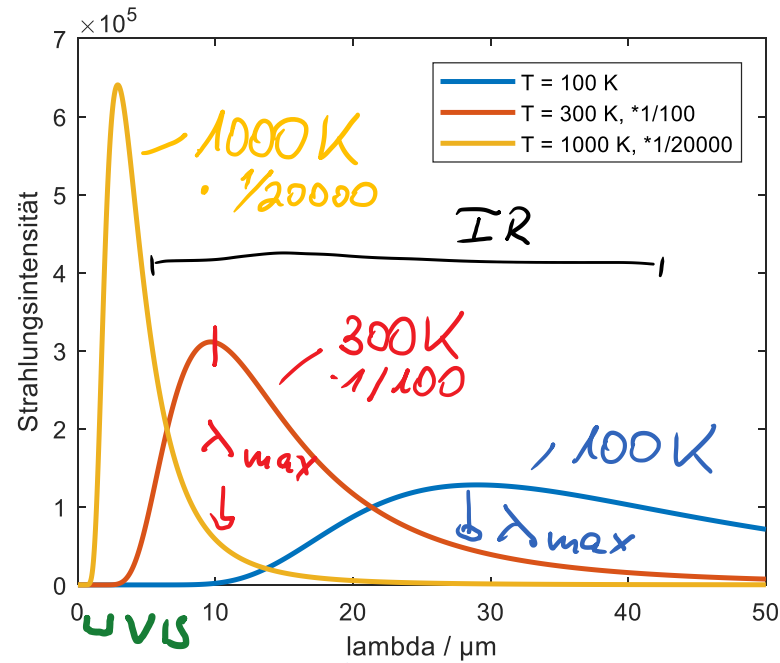
Anmerkung: Laser & Energieniveaus

Beispiel: 3-Niveau-Laser



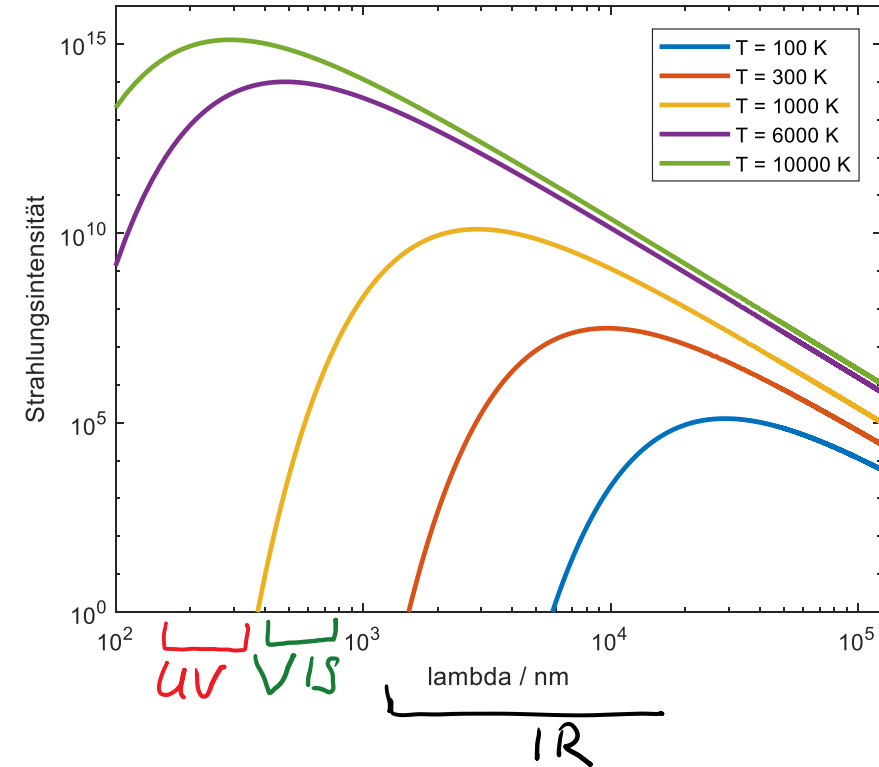
Spektrum der Wärmestrahlung

- im Experiment (Ende 19. Jahrhundert)



- kontinuierlich
- vor allem im infraroten Bereich
- sichtbar (VIS) nur für hohes T
- Maximum verschiebt sich

Doppelt-Logarithmische Darstellung



Einführung in die **Moderne Physik**

Der Photoeffekt

Prof. Dr. Matthias Kohl

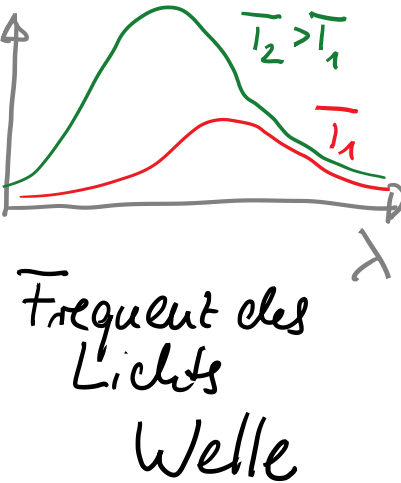
Hintergrund:

Planck'sches Strahlungsgesetz (1900)

Annahme: $E = h \cdot \nu$

Energie des
Lichtquants
Teilchen

"Hilfsgröße" h

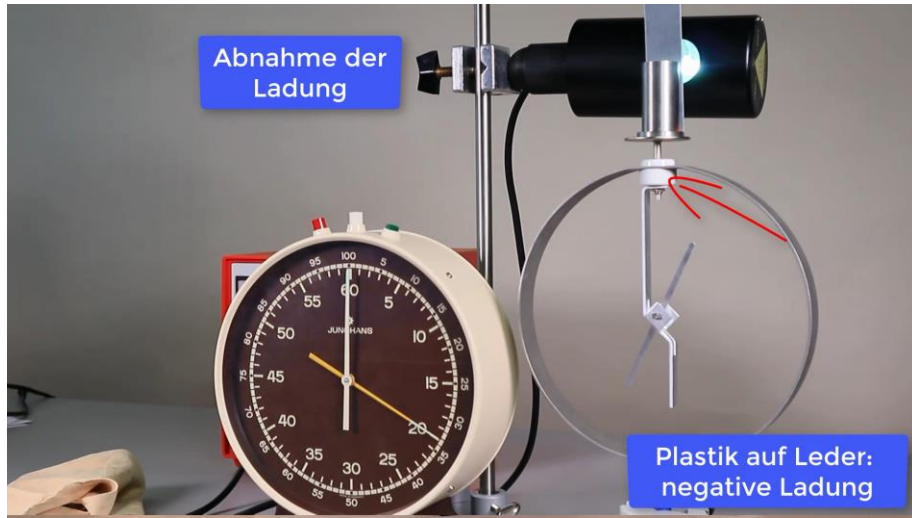


Planck führte h ein zur theoretischen Beschreibung der experimentellen Spektren der Wärmestrahlung

gesucht: experimenteller Hinweis auf den Teilchencharakter von Licht

↳ Experiment von Hallwachs (1888):
Licht löst Ladung von Metallen

Experiment:



- Quecksilberlampe ($\lambda = 313\text{nm}, 365\text{nm} \dots 546\text{nm} \dots$)
 - Zink wird geladen, Ladung im Elektroskop
 - Reibung: Fell & Plastik $\rightarrow -q$ (Elektronen)
Fell & Glas $\rightarrow +q$
- Beobachtung: negative Ladung wird durch Bestrahlung weniger;
positive Ladung bleibt

$\rightarrow$ Elektronen werden durch Licht aus dem Metall gelöst

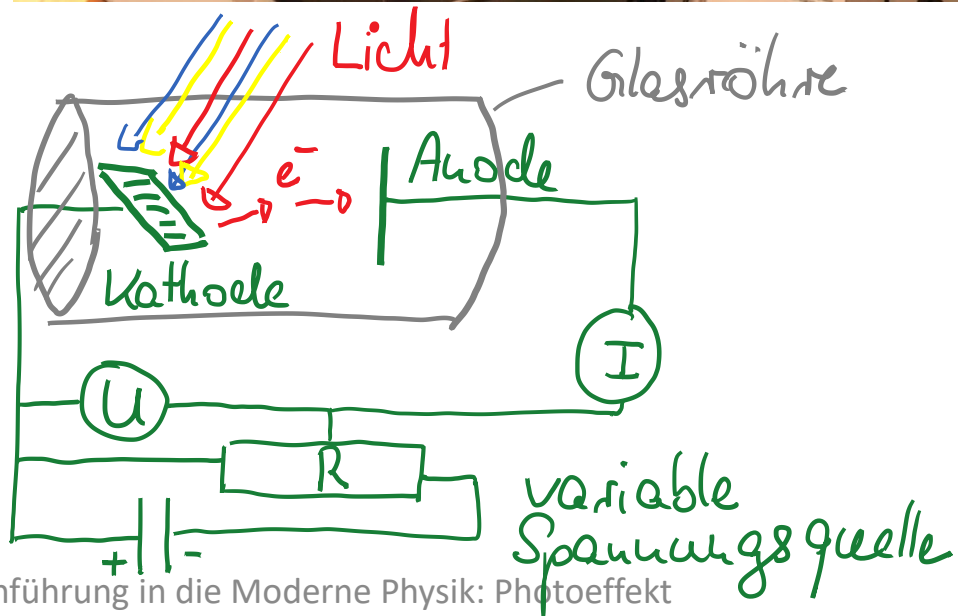
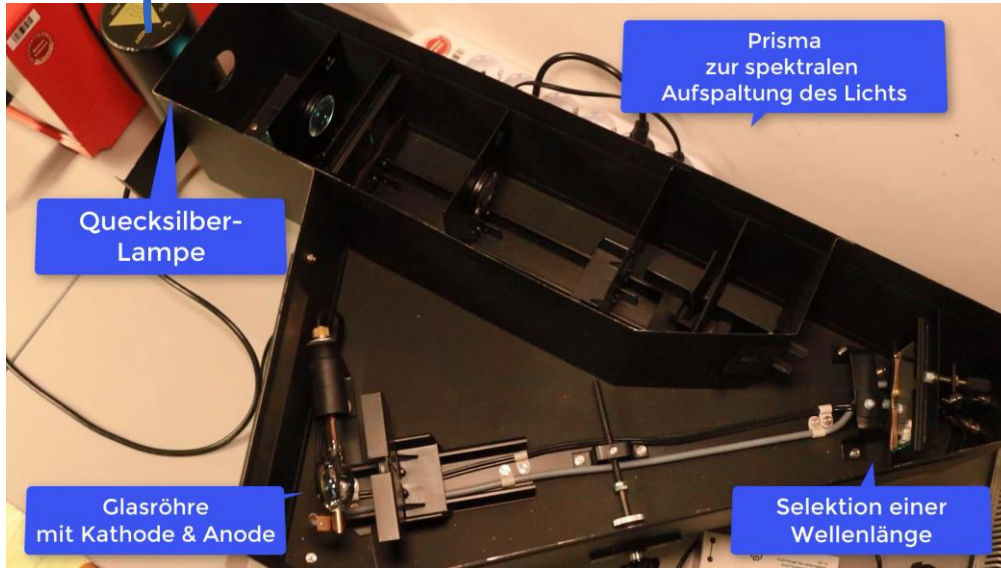
$\hookrightarrow$ Energie notwendig, die aus dem Licht kommt

Annahme: hohe Lichtintensität
 $\rightarrow$ viele e^- werden gelöst

⚡ falsch ⚡
unvollständig

Photoelektrischer Effekt:

• Aufbau

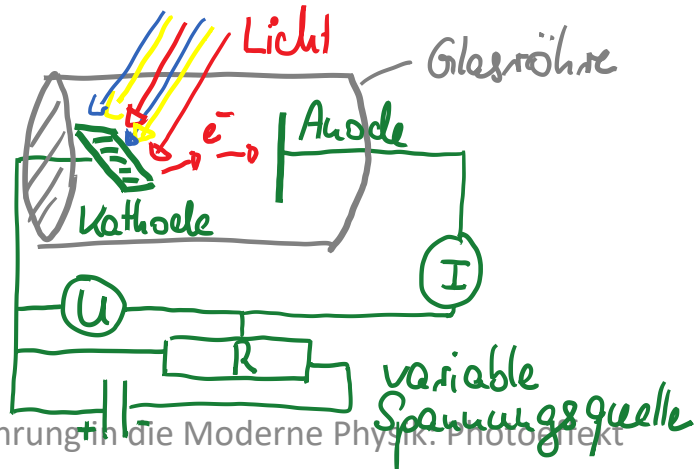
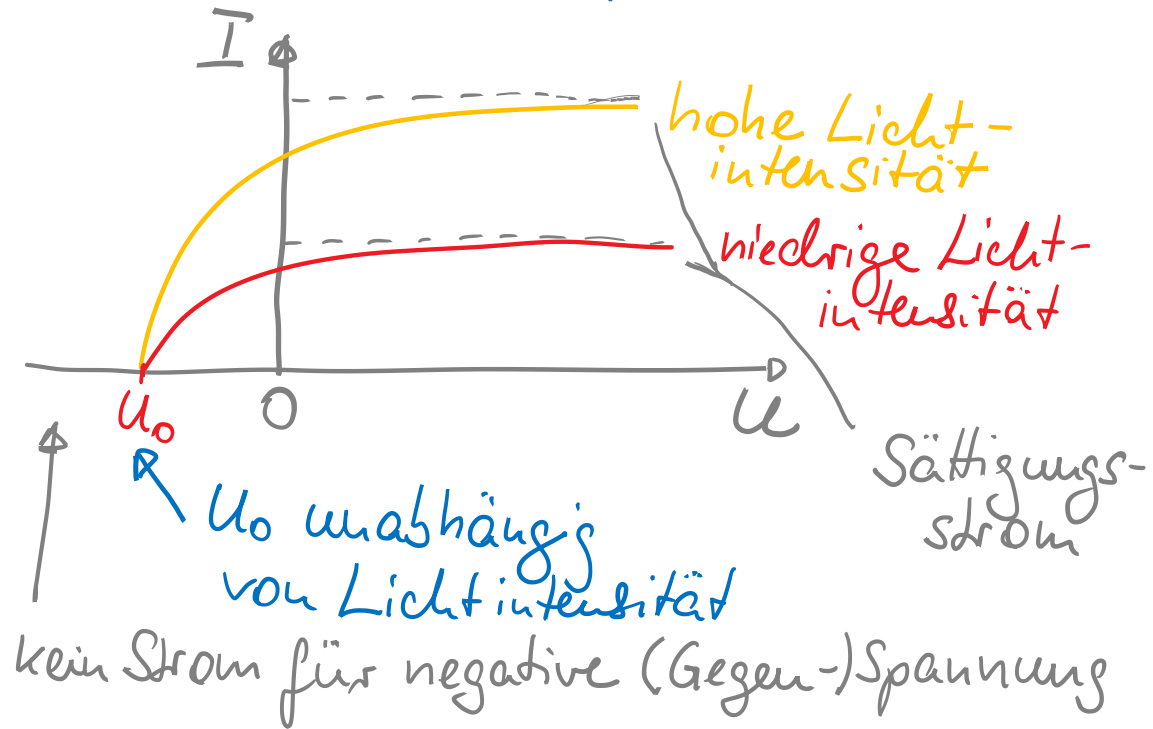


- Lichteinfall auf Kathode (Metall)
- Messung: Strom I als Funktion von
 - Lichtintensität
 - Frequenz / Wellenlänge
 - Spannung U

Licht überträgt Energie auf e^-
→ Spannung wird überwunden
→ Strom entsteht



gemessene Kennlinie von Strom
als Funktion der Spannung U



- positive Spannung: e^- werden zur Anode beschleunigt
→ Sättigung für hohes U
- Sättigungsstrom ist proportional zur Lichtintensität
- negative Spannung: e^- werden von Anode abgestoßen / abgebremst
- nur e^- mit kinetischer Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2 \geq e \cdot U_0$$

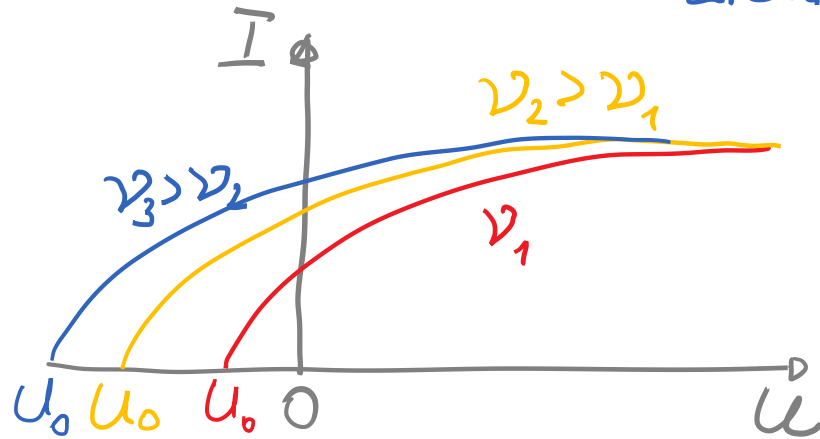
erreichen die Anode

Elementarladung
 m_e : Elektronenmasse

⚡ Licht als Welle: hohe Intensität
→ hohes E-Feld / Energie

⚡ Warum sollte es U_0 geben?

Kennlinie $I(U)$ für unterschiedliche Lichtfrequenzen



Einstein (1905): • Licht tritt in kleinsten Einheiten auf (Photon, Quant) mit Energie $E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$

- ein Photon schlägt ein e^- aus Kathode, das genügend E_{kin} hat, um zur Anode zu gelangen, wenn

$$\left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right)_{max} = e U_0 = h \nu - W_a$$

Photonen-energie $\nearrow$ $\nwarrow$ Auslösearbeit

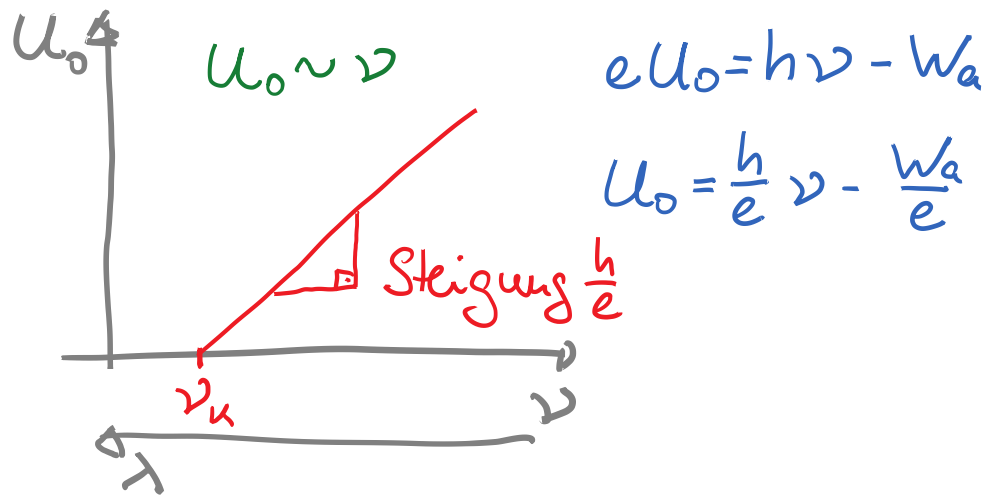
- dabei wird die Gegenspannung U_0 überwunden
- Auslösearbeit ist materialabhängig

	W_a [eV]
Kalium	2,2
Natrium	2,3
Zink	4,3
Wolfram	4,5

- Photonenenergie abh. von Frequenz /
Wellenlänge
 $E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$

↳ hohe Frequenz / kleine Wellenlänge
→ mehr Energie → größere Gegen-
spannung kann überwunden werden

→ U_0 abh. von ν



↳ aus Messungen von $U_0(\nu)$ kann
bei bekanntem e h bestimmt werden!

- für $\nu < \nu_k$: Energie des Photons zu
klein, um e^- aus Kathode zu lösen

Photoeffekt → Bestätigung der
Photonenhypothese
→ Messung von h !

Einführung in die **Moderne Physik**

Die Sonne bringt es an den Tag: Was verrät Licht über Atome?

Prof. Dr. Matthias Kohl

Grundfrage: woraus besteht Materie

• Aufbau, Teile, Bausteine

ατομος - griechisch:
das Unteilbare

↳ Atom als kleinste Einheit

Demokrit (460-370 v.u.z.):

„Nur scheinbar hat ein Ding eine Farbe,
nur scheinbar ist es süß oder bitter.
In Wirklichkeit gibt es nur Atome
und leeren Raum.“

↗ gibt es das?

etc. etc.

↗ wie viele Sorten?
wie groß? Form?

Solvay - Konferenz 1913

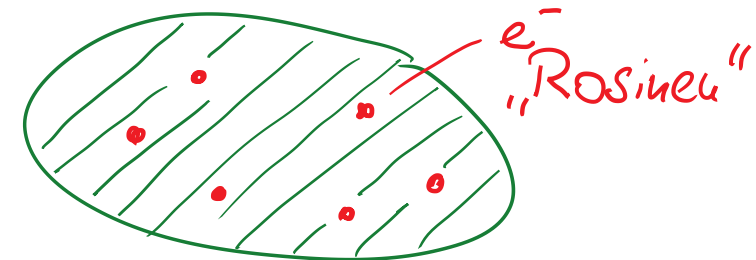


VERSCHAFFELT	LAE	RUBENS	GOLDSCHMIDT	HERZEN	LINDEMANN	de BROGLIE	POPE	GRUNEISEN	HOSIELET		
HASENGHRIJL	JEANS	BRAGG	Mme. CURIE	SOMMERFELD	EINSTEIN			KNUDSEN	LANGVIN		
NEBNST	RUTHERFORD	WIEN	J.J. THOMSON	WARBURG	LORENTZ	BRILLOUIN	BARLOW	KAMERLINGH ONNES	WOOD	GOLY	WEISS

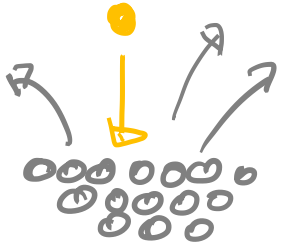
Rutherford-Modell

Thomson: Rosinenkuchen-Modell

- Atome aus positiv geladener Substanz
- Elektronen e^- eingebettet
- nach außen neutral

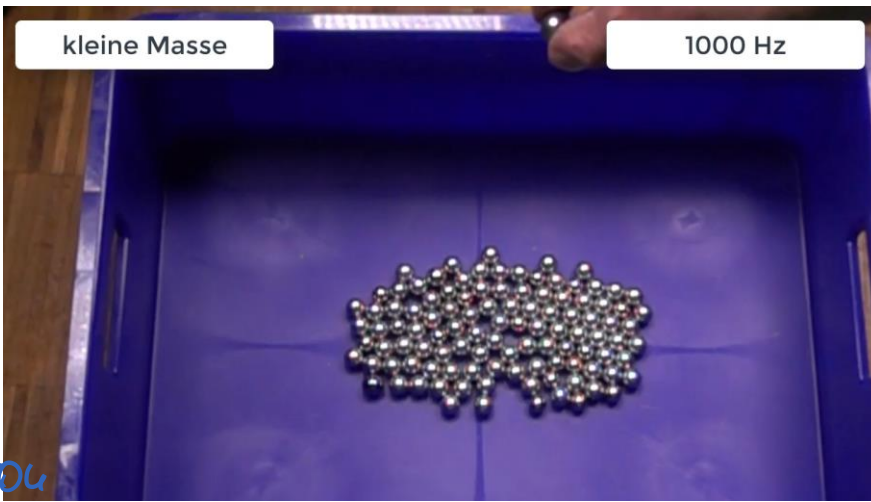


Stoß:



abhängig von

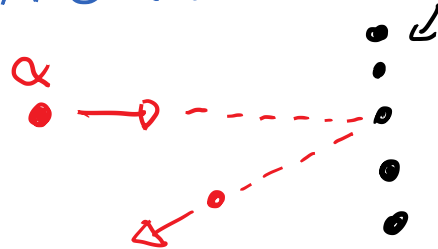
- Massen, Energie, ... Wechselwirkung



Rutherford: Streuexperimente von α -Teilchen (He-Kerne) an Goldfolien
... jedes 1/8000te α -Teilchen wird zurückgestoßen

Interpretation: Stoß mit sehr kleinem Atomkern ($\sim 10^{-15}$ m)

↳ Thomson-Modell ist falsch

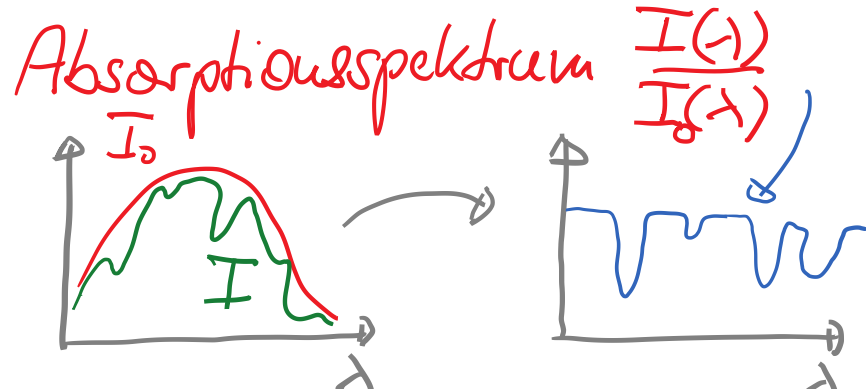
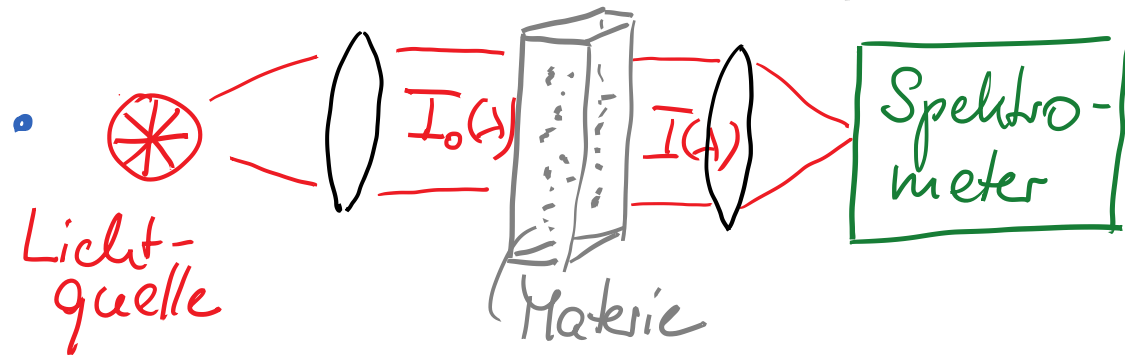
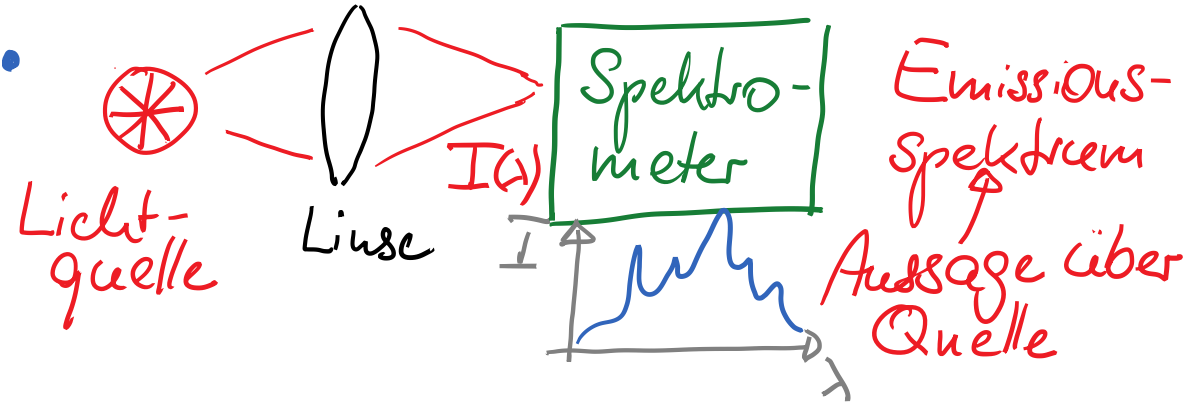


↳ Suche nach neuem Atommodell
- e^- um einen kleinen Kern

Werkzeug zur Untersuchung der Atome: Spektren, Optik, Farbe

Spektrale Untersuchung:

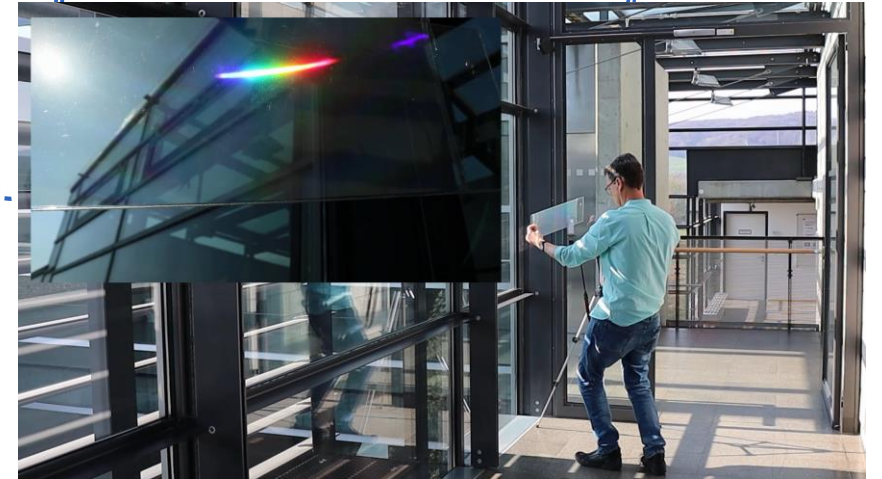
Intensität $I(\lambda)$



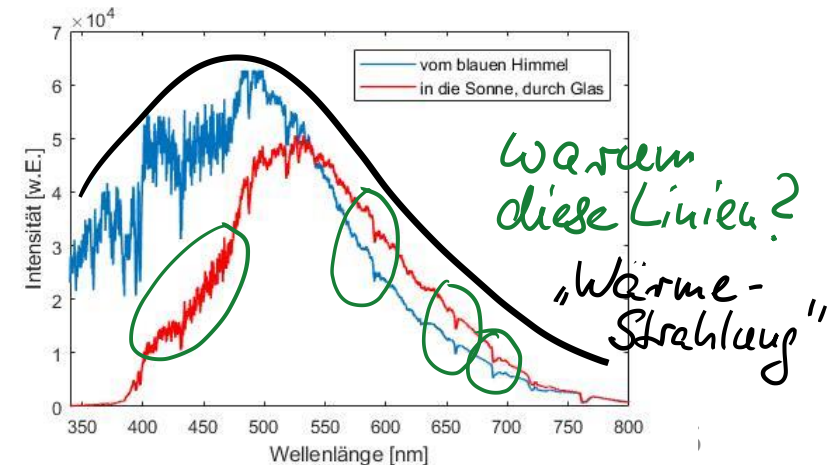
- Absorption und Emission:
 - charakteristisch für Gase
 - Spektrallinien bei bestimmten λ (ν)
- „Fingerabdruck“

- Sonnenspektrum: Emissionsspektrum

- Wärme-strahler
- Kontinuier-lich

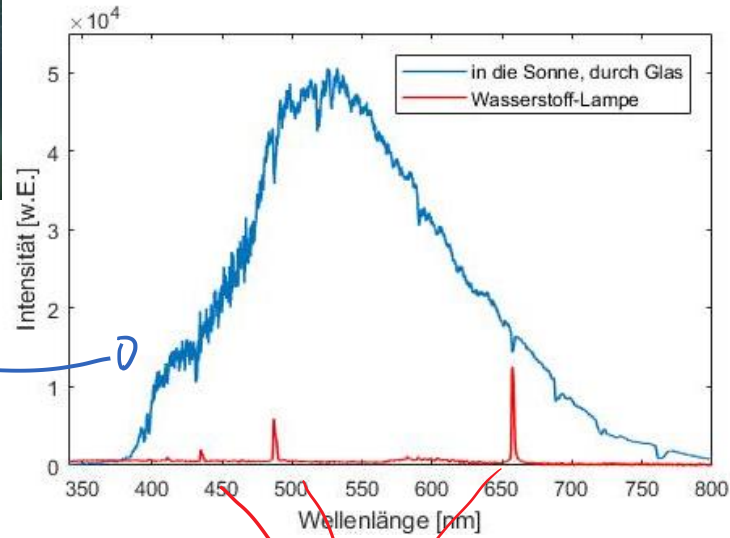


gemessenes Spektrum



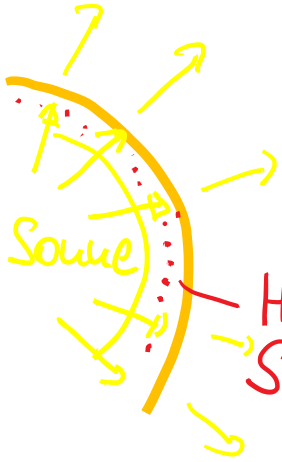


Sonnenpektrum



Spektrale Fingerabdruck stimmt überein?

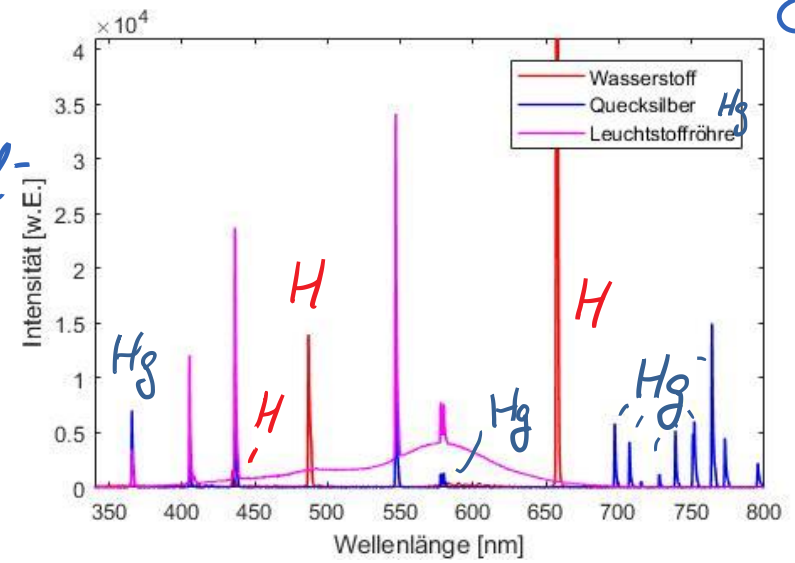
H-Lampe
Emissionsspektrum



H in äußerer
Sonnenatmosphäre → Absorptionsspektrum

• jedes Element zeigt charakteristische Strahlung

Leuchtstoff-
lampe mit
Hg-Anteil



• für Wasserstoff H:



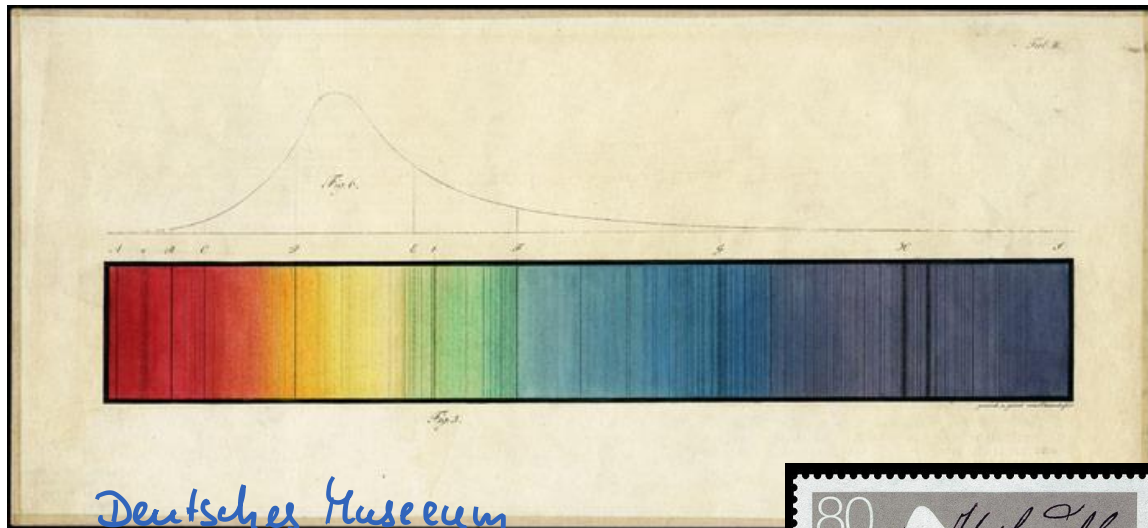
$\lambda_\epsilon = 397 \text{ nm}$
 $\lambda_\delta = 410 \text{ nm}$
 $\lambda_\gamma = 434 \text{ nm}$
 $\lambda_\beta = 486 \text{ nm}$

$\lambda_\alpha = 656,3 \text{ nm}$

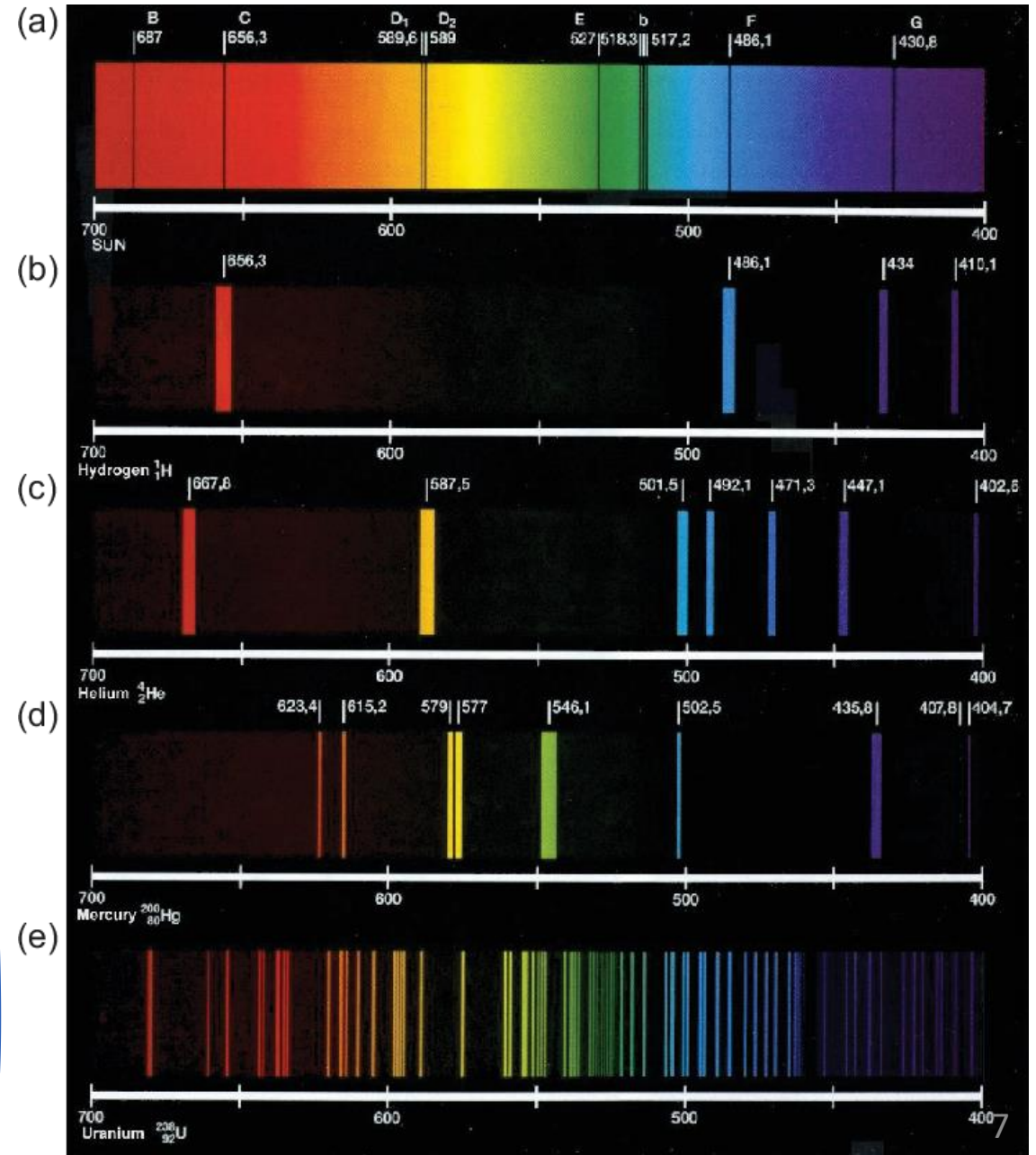
Warum bei
diesen Wellenlängen?
Ordnung?

- Bunsen & Kirchhoff: Spektroskopie eines Brands $\rightarrow$ Entdeckung von Strontium & Barium

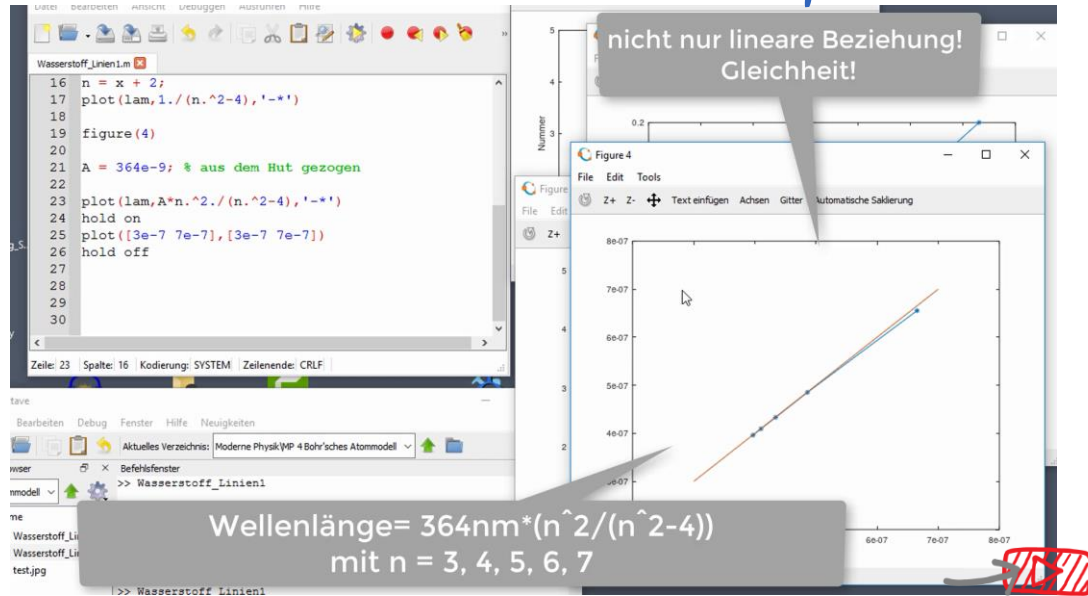
- Sonnenspektrum: Fraunhofer-Linien



200. Geb. von
Fraunhofer
1987



Wasserstoff-Emissionsspektren:
Welche Ordnung steckt dahinter?
Ansatz: nicht nachdenken, ausprobieren?



↳ die Wellenlängen des H-Atoms bei 656, 486, 434, 410 & 397 nm lassen sich beschreiben durch

$$\lambda = A \cdot \frac{n^2}{n^2 - 2^2}$$

mit $A = 364 \text{ nm}$
 $n = 3, 4, 5, 6, 7$ } Balmer-Serie

Ende des 19. Jahrhunderts

- Messung der Atomspektren vieler Elemente
- gute Beschreibung durch

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

mit $n_2 > n_1$
 n_1 & $n_2: 1, 2, 3, 4, \dots$

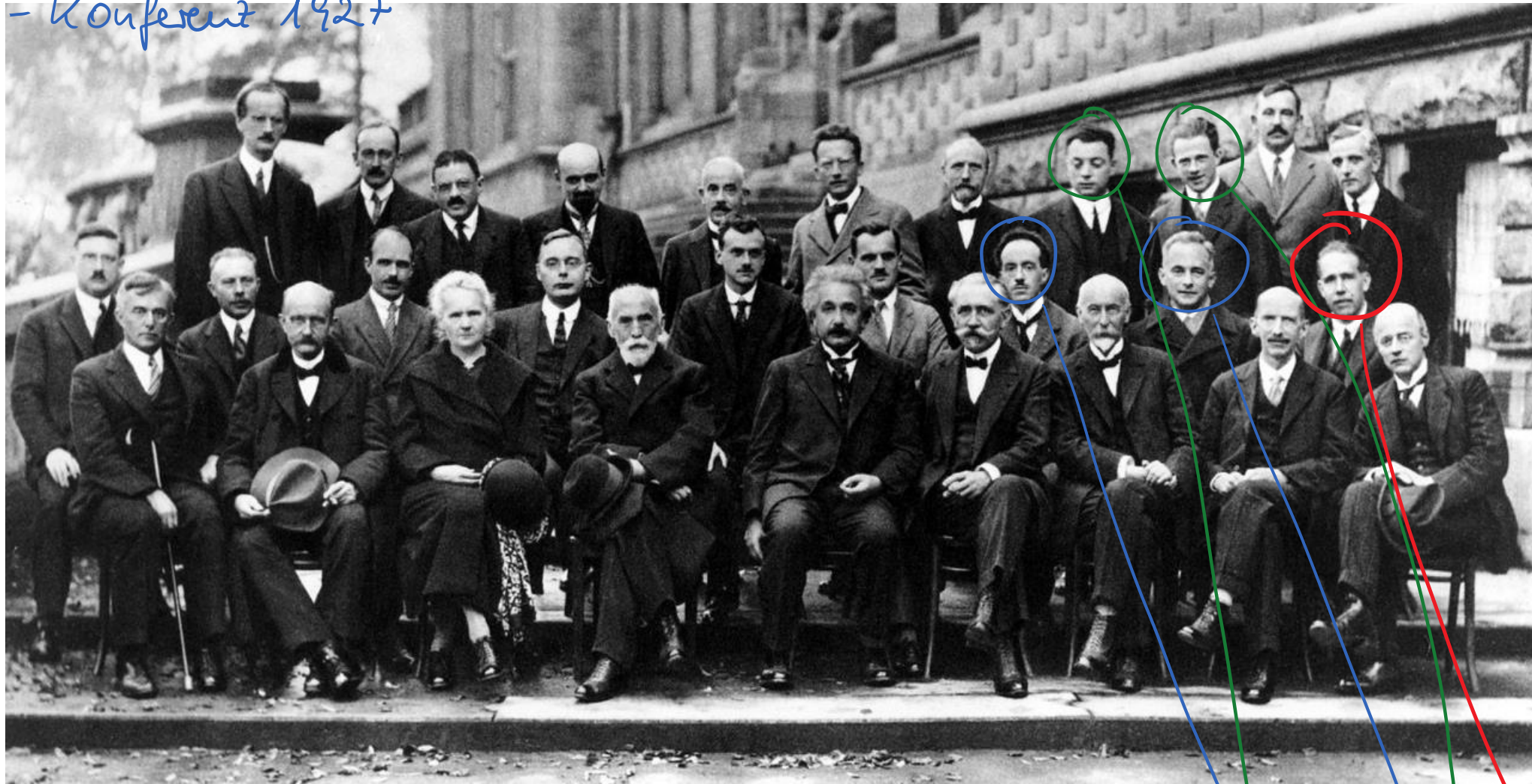
Rydbergkonstante
 $R = 10,97 \mu\text{m}^{-1} = \frac{4}{A}$

Kernladungszahl

• Wasserstoff: $Z = 1$

↳ Bohr'sches Atommodell

Solvay - Konferenz 1927



Stehend von links nach rechts: A. Piccard, É. Henriot, P. Ehrenfest, É. Herzen, Th. Donder, Erwin Schrödinger, J. Verschaffelt, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, R. H. Fowler, L. Brillouin

zweiten Reihe sitzend von links nach rechts: P. Debye, M. Knudsen, W. L. Bragg, H. Kramers, Paul Dirac, Arthur Holly Compton, L.-V. de Broglie, Max Born, Niels Bohr

ersten Reihe sitzend von links nach rechts: I. Langmuir, Max Planck, Marie Curie, Hendrik Antoon Lorentz, Albert Einstein, P. Langevin, Ch. Guye, Ch. Th. Wilson, O. Richardson

Einführung in die **Moderne Physik**

Das Bohr'sche Atommodell

Prof. Dr. Matthias Kohl

Grundfrage: woraus besteht Materie

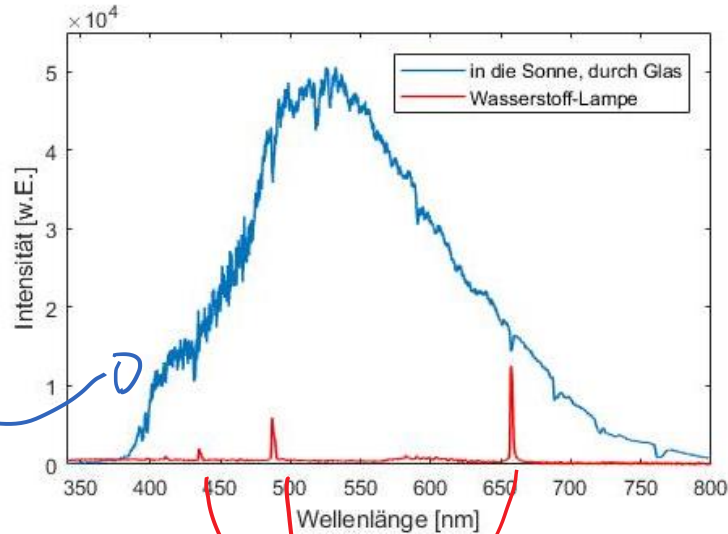
• Aufbau, Teile, Bausteine

$\alpha\tau\omicron\mu\omicron\varsigma$ - griechisch:
das Unteilbare

↳ Atom als kleinste Einheit



Sonnenspektrum



Spektrale Fingerabdruck
stimmt überein!

- Lampe
Emissionsspektrum

• gute Beschreibung durch

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

mit $n_2 > n_1$

n_1 & $n_2: 1, 2, 3, 4, \dots$

Rydbergkonstante

$$R = 10,97 \mu\text{m}^{-1} = \frac{4}{A}$$



Niels Bohr

Bohr'sches Atommodell:

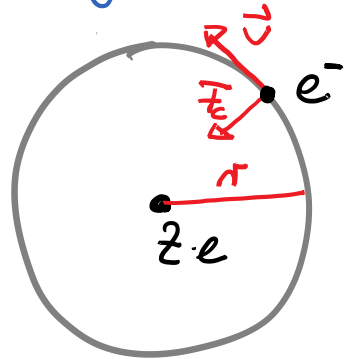
- Ziel: Beschreibung des Atomspektrums
- Basis: Coulomb-Kraft & Mechanik,
Analogie: Sonne — Erde
Proton — Elektron

1. Postulat: im Atom bewegen sich Elektronen auf Kreisbahnen mit diskreten Energien E_n

Coulomb-Kraft:

Kernladung: $z \cdot e$
stabile Bahn, wenn

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \cdot e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$$



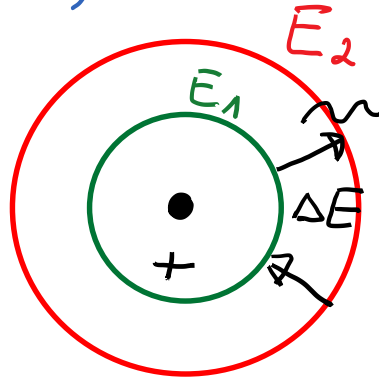
- e^- hat Geschw. v
→ Elektrodynamik: beschleunigte Ladung strahlt Energie ab
→ nach der klassischen Physik müsste e^- Energie verlieren, langsamer werden und in den Kern stürzen
Widerspruch, da Atome stabil sind!

2. Postulat: die Bewegung auf den Kreisbahnen ist strahlungslos,

beim Übergang zwischen Zuständen E_1 und E_2 wird ein Photon emittiert oder absorbiert mit

$$h \cdot \nu = \Delta E = E_1 - E_2$$

Planck'sche Hypothese



3. Postulat: der Drehimpuls eines Elektrons nimmt auf einer Bahn nur diskrete Werte an:

$$\text{Drehimpuls } L = m_e \cdot v \cdot r = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$
und $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ("h-quer")
 $= 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

• Warum sollte es nur bestimmte Bahnen geben?

Drehimpuls ist quantisiert

↳ Bohr'sche Postulate

↳ Energieniveaus,
Bahnradien
von Wasserstoff

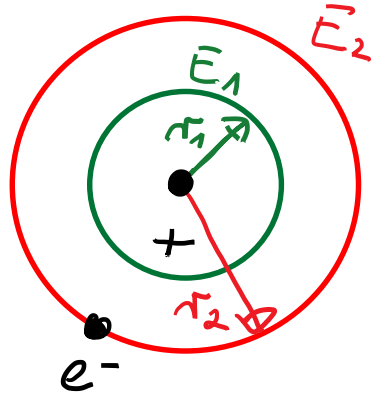
Berechnung der Energieniveaus:

H-Atom:

- potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Bindung



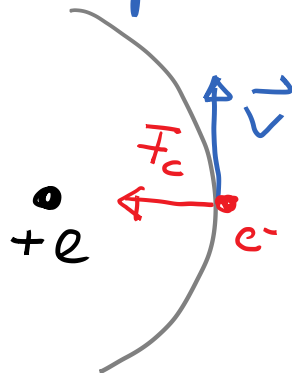
- Gesamtenergie $E_G = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$

$$E_G = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Masse des e^-

- Coulomb-Kraft = Zentripetalkraft

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r} \quad \textcircled{\text{I}}$$



$$\hookrightarrow \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} E_{\text{pot}}$$

$$\hookrightarrow E_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2} E_{\text{pot}} \quad \textcircled{\text{II}}$$

↑ Gesamtenergie einer Bahn abhängig vom Bahnradius
(aus der Mechanik bekannt für Gravitation, Virial-Theorem)

a) Bestimmung der Bahnradien:
mit 3. Bohr'schen Postulat:

Drehimpulsquantisierung

$$L = \underbrace{m_e v r}_{\text{auf Kreisbahn}} = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar$$

$$\hookrightarrow v = \frac{n \cdot \hbar}{m_e r}$$

$$v^2 = \frac{n^2 \cdot \hbar^2}{m_e^2 r^2}$$

aus (I) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$

$$\hookrightarrow v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \cdot \frac{1}{m_e}$$

Gleichsetzen von v^2 :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \cdot \frac{1}{m_e} = \frac{n^2 \cdot \hbar^2}{m_e^2 r^2}$$

$\hookrightarrow$ Bestimmung von r :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar^2} \cdot m_e$$

$$r = \underbrace{4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{m_e e^2}}_{\text{Konstanten}} \cdot n^2$$

Konstanten

$\hookrightarrow$ der Bahnradius des e^- im H-Atom:

$$\boxed{r = a_0 \cdot n^2}$$

mit dem Bohr-Radius $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$
 $= 0,053 \text{ nm}$

• r ist quantisiert durch $n = 1, 2, 3, \dots$
also nur bestimmte Bahnen möglich

• $r \sim n^2$: hohes $n \leftrightarrow$ große Bahn

b) Bestimmung der Energien:

$$\textcircled{\text{II}} \quad E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

mit $r = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \cdot n^2$ wird dies:

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= -\frac{m_e e^4}{32 \pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{E = -E_0 \cdot \frac{1}{n^2}} \quad n=1,2,3,4,\dots$$

Bindung

- die Energie ist quantisiert
- die Bindung nimmt mit $\frac{1}{n^2}$ ab
- $E_0 = 13,6 \text{ eV}$

c) Spektren des H-Atoms:

Bohr'sches Postulat: $\Delta E = E_2 - E_1 = h \cdot \nu$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \nu &= \frac{1}{h} \cdot (E_2 - E_1) \\ &= \frac{1}{h} \cdot (-E_0) \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \\ &= \frac{m_e e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot h^3 / (4\pi^2) \cdot \epsilon_0^2} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ &= \frac{m_e e^4}{8 h^3 \epsilon_0^2} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \end{aligned}$$

oder als Wellenlänge ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} &= \frac{m_e e^4}{8 h^3 \epsilon_0^2 \cdot c} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ &= R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \end{aligned}$$

mit der Rydberg-Konstante

$$R = \frac{m_e e^4}{8 h^3 \epsilon_0^2 \cdot c} = 10,97 \mu\text{m}^{-1}$$

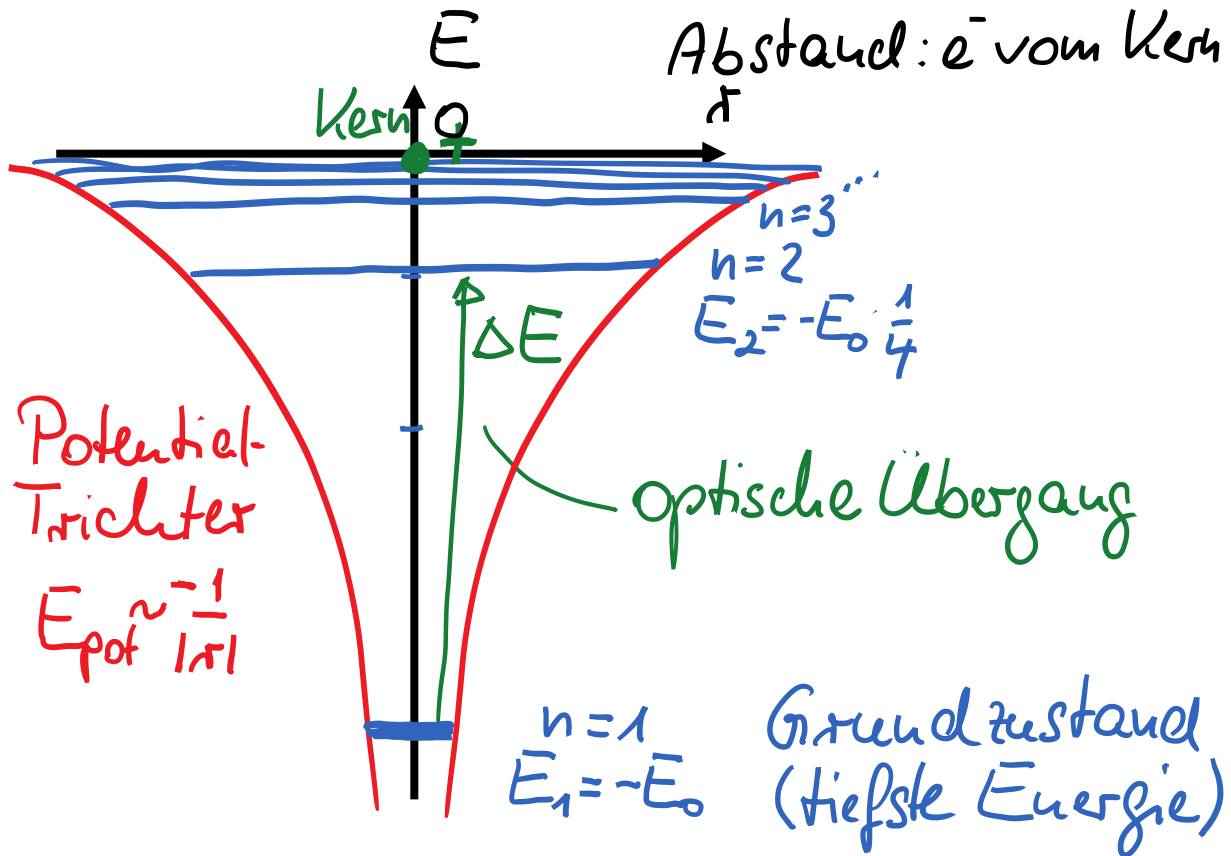
$$n_1 \text{ \& } n_2 = 1, 2, 3, \dots$$

- λ hängt von zwei ganzen Zahlen ab
- $\lambda \rightarrow$ experimentelle Überprüfung

$$\hookrightarrow E = -E_0 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$c = \lambda \nu$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$



- e^- fällt nicht in den Atomkern

- Grundzustand: $n=1$

Bindungsenergie $E_0 = 13,6 \text{ eV}$

- optischer Übergang von $n_1 \rightarrow n_2$

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Wellenlänge der Emission oder Absorption

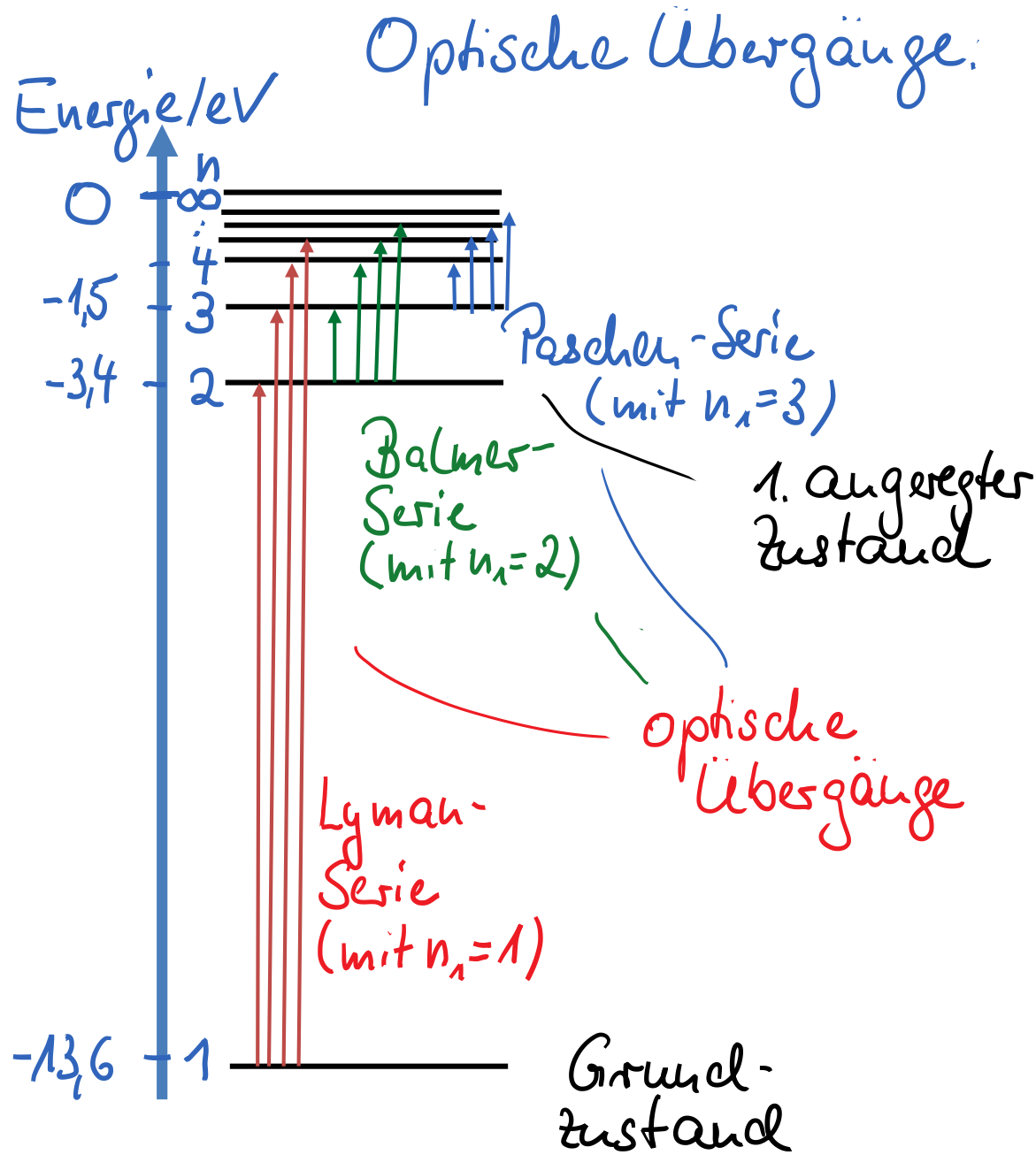
- Ionisierung des H-Atoms:

von $n=1 \rightarrow n=\infty$

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = R \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty} \right) = R$$

$$\lambda_\infty = \frac{1}{R} = \frac{1}{10,97 \mu\text{m}^{-1}} = 91 \text{ nm}$$

UV-Licht



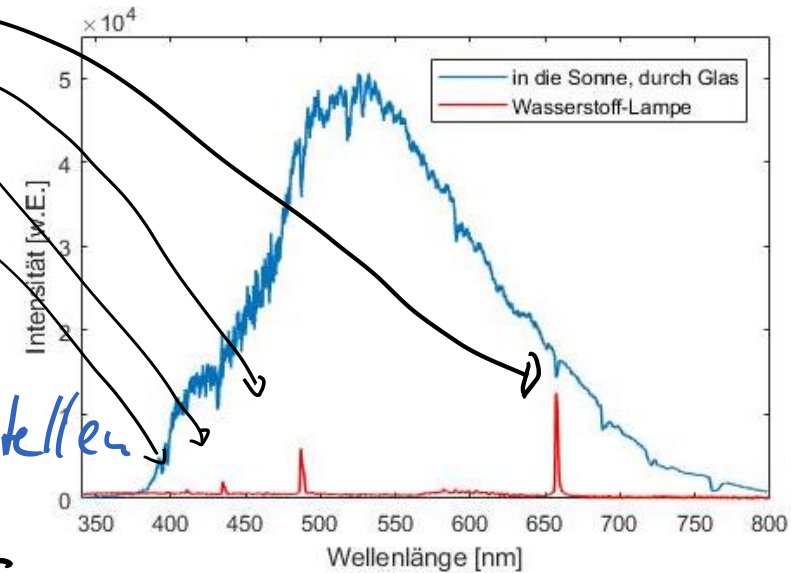
• im sichtbaren Spektralbereich

Balmer-Serie: $n_1=2$

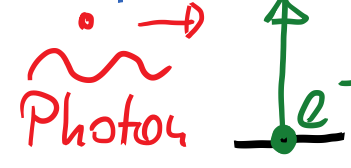
mit $\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$ und $R = 10,97 \mu\text{m}^{-1}$

n_1	$\lambda [\text{nm}]$
3	656
4	486
5	434
6	410
7	397

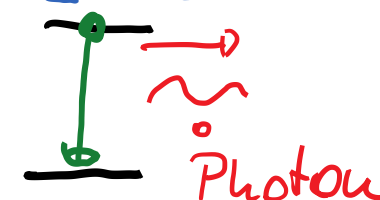
Bestätigung der experimentellen Spektren



Absorption:



Emission:



Heutige Bedeutung des Bohr'schen Atommodells:

- erste Erklärung der Atomspektren mit guter Übereinstimmung von Modell und Beobachtung für H
- Quantisierung der Energien
- schlechte Erklärung für große / schwere Atome

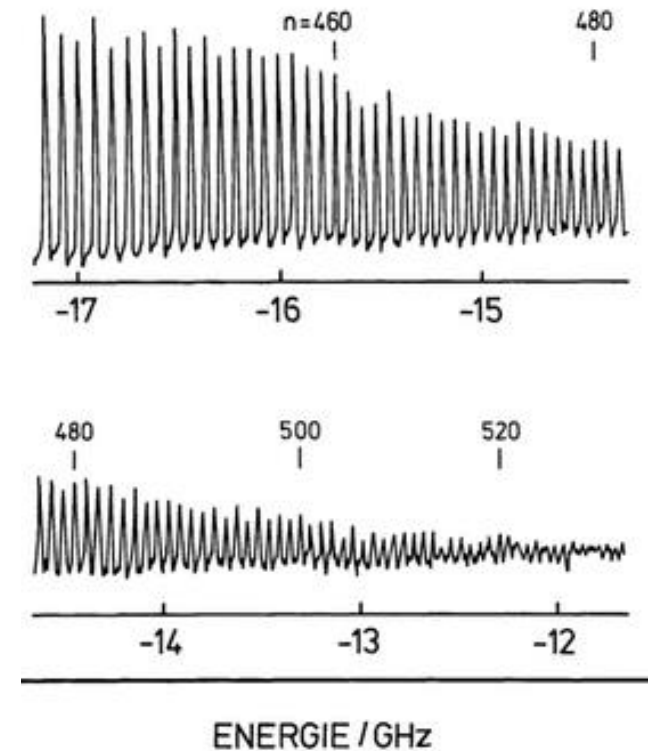
↳ neue Beschreibung notwendig durch Quantenmechanik;
Bohr'sche Modell ist falsch

eigenes Experiment:

Rydbergatom
mit $n > 500$

$$r \sim n^2$$

↳ Atomradius
ca. 250.000x
größer!



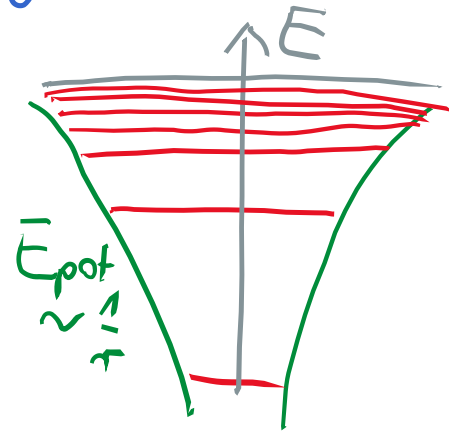
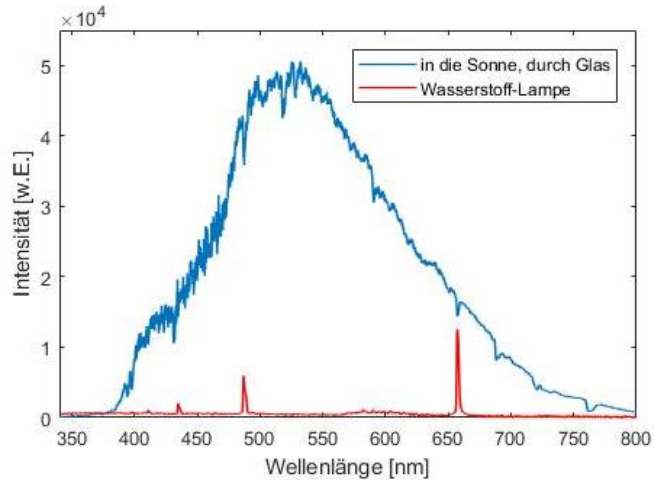
Spectroscopy of Rydberg Atoms at $n=500$: Observation of Quasi-Landau Resonances in Low Magnetic Fields J. Neukammer, H. Rinneberg, K. Vietzke, A. König, H. Hieronymus, M. Kohl, H. -J. Grabka, and G. Wunner Phys. Rev. Lett. 59, 2947 – Published 28 December 1987

Einführung in die **Moderne Physik**

Franck-Hertz-Versuch, Grenzen des Bohr-Models

Prof. Dr. Matthias Kohl

- Gibt es die Energieniveaus wirklich?



Erklärung optischer Spektren

- Warum ist das Bohr-Modell falsch?

Bohr-Modell:

- e^- auf Kreisbahnen

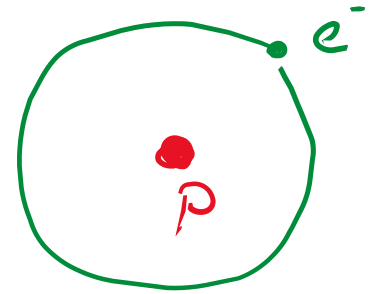
$$L = n \cdot h/2\pi$$

mit $n=1,2,3,\dots$ Hauptquantenzahl

$$\left. \begin{aligned} E &= -E_0 \cdot \frac{1}{n^2} \\ r &= a_0 \cdot n^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{m_e e^4}{32 \pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \\ &= 13,6 \text{ eV} \end{aligned}$$

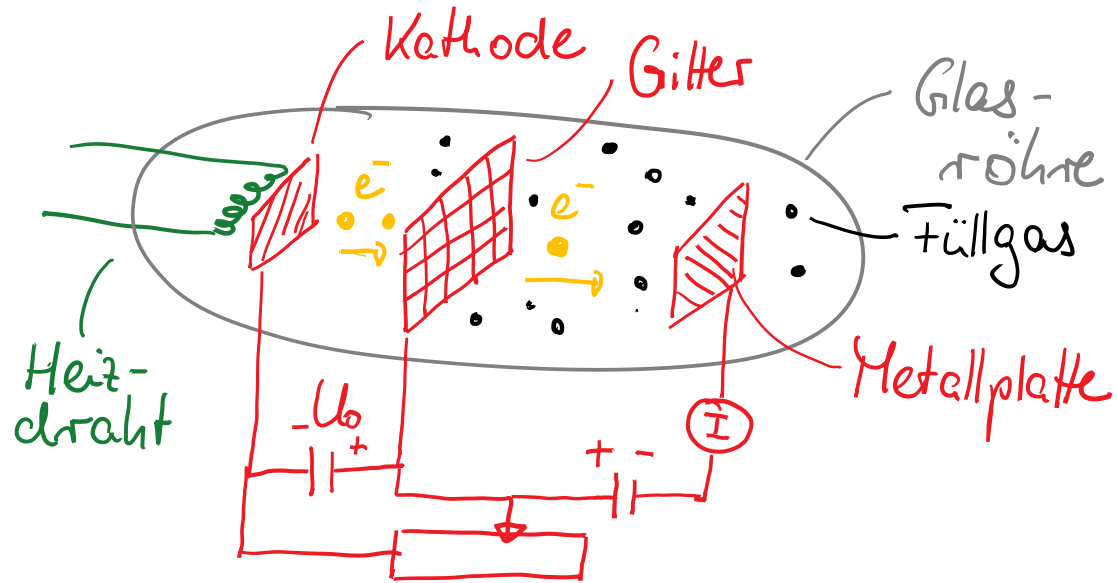
$$\begin{aligned} a_0 &= 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \\ &= 0,053 \text{ nm} \end{aligned}$$



- für H-Atom
- Energieniveaus sind quantisiert!

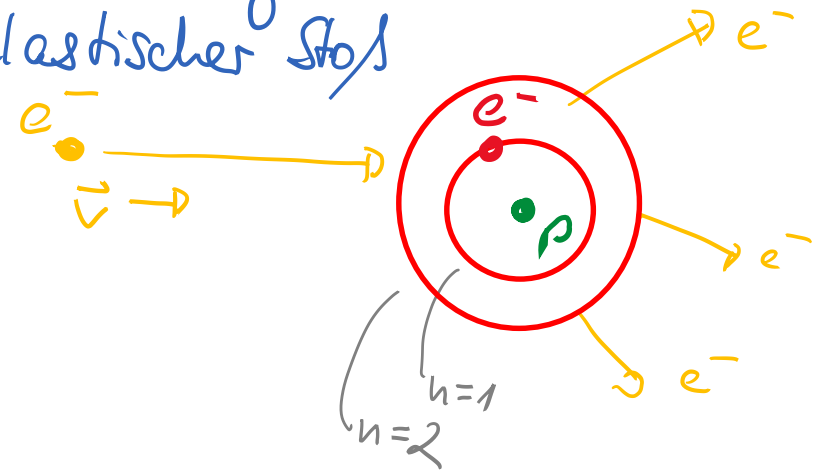
Franck-Hertz-Versuch:

- direkter Nachweis der quantisierten Energieniveaus in der Atomhülle

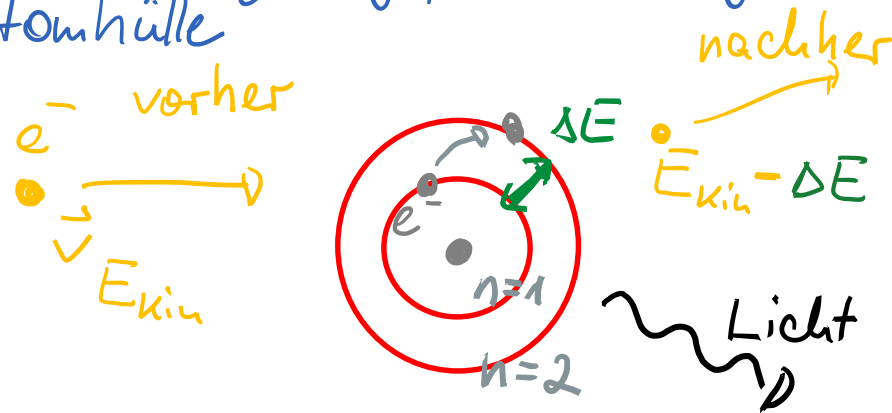


- Heizdraht, Kathode wird erhitzt
→ e^- treten aus
- Gitter mit positiver Spannung U_0
→ e^- werden beschleunigt

- e^- fliegen durch Gitter
- Bremsung durch Gegenspannung auf Metallplatte
- e^- stoßen mit Füllgas (z.B. Wasserstoff, Neon oder Quecksilber)
- Stoß zwischen e^- und Atom abhängig von Energie
 - * kinetische Energie klein
↳ elastischer Stoß



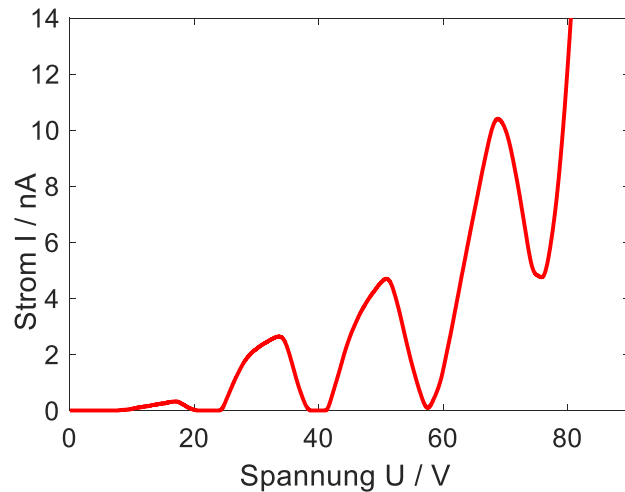
* kinetische Energie groß: Anregung der Atomhülle



- Anregung der Atomelektronen von n_1 auf $n_2 \rightarrow$ Energieaufnahme
 $\rightarrow$ kinetische Energie der Stoelektronen wird kleiner
- Rückfall des angeregten Atoms in Grundzustand unter Strahlungsabgabe (Fluoreszenzlicht)
 $\rightarrow$ Nachweis der Anregung

- kinetische Energie kleiner
 $\rightarrow e^-$ erreicht nicht mehr die Metallplatte $\rightarrow$ kleinerer Strom
 $\rightarrow$ höhere Beschleunigungsspannung U_0 notwendig

Experiment: Franck-Hertz-Versuch mit Ne-Gas



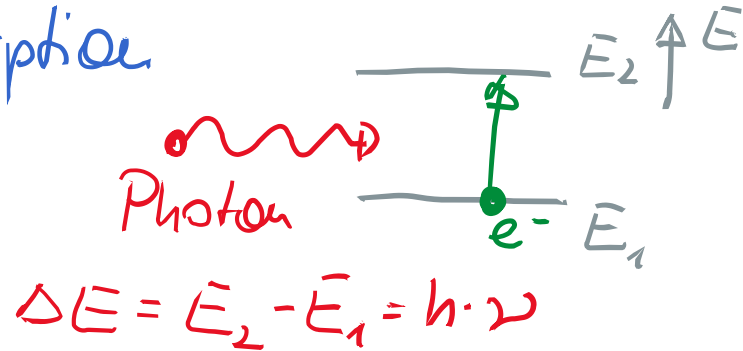
Beobachtung:
- Fluoreszenz
- Strom
als Fkt. der
Spannung

→ Energieübertragung in Stufen!

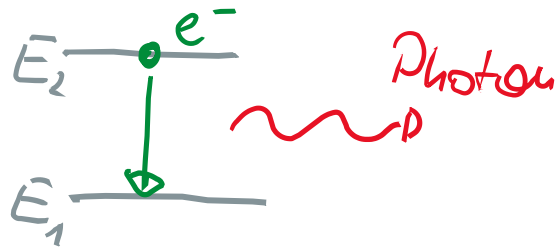
↳ Quantisierung der Energieniveaus im Atom

Allgemein: Wechselwirkung von Licht/Photon mit Atom

• Absorption



• Emission



• Fluoreszenzangeregung und -Emission

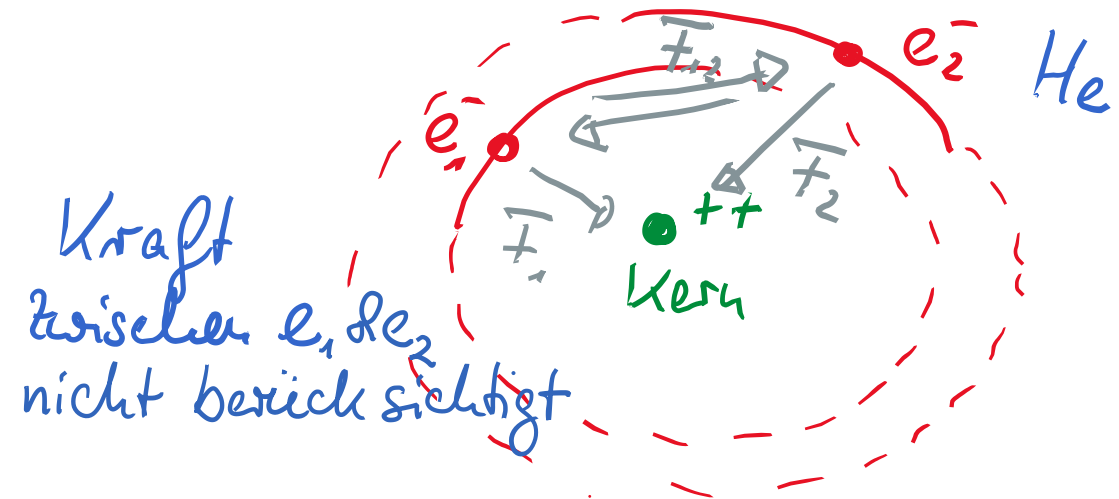


• Bohr-Modell für H-Atom

• Für schwerere Atome:

- Kernladungszahl $Z > 1$

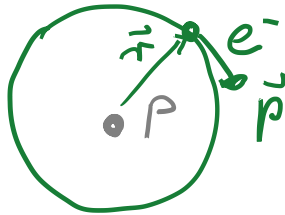
- mehrere e^- : $E_n = -Z^2 \cdot \frac{E_0}{n^2}$



↳ Bohr-Modell nur grobe Näherung

Interpretation der Bohr'schen Postulate:

- e^- auf Kreisbahn
- $\Delta E = E_2 - E_1 = h \cdot \nu = h \frac{c_0}{\lambda}$
- Drehimpuls auf Kreisbahn



$$L = p \cdot r = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

↑ Quantisierung in Einheiten von $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

mit der de Broglie-Gleichung: $p = \frac{h}{\lambda}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow L &= p \cdot r = \frac{h}{\lambda} \cdot r \\ &= n \cdot \frac{h}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{r}{\lambda} = \frac{n}{2\pi} \quad \text{oder}$$

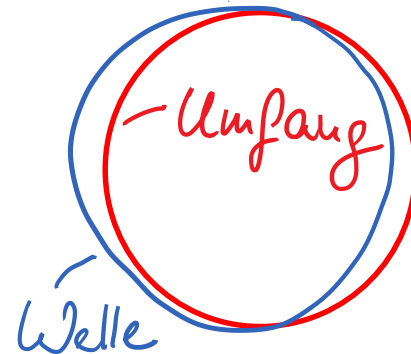
$$\underbrace{2\pi r}_{\text{Bahnumfang}} = n \cdot \lambda$$

Bahnumfang

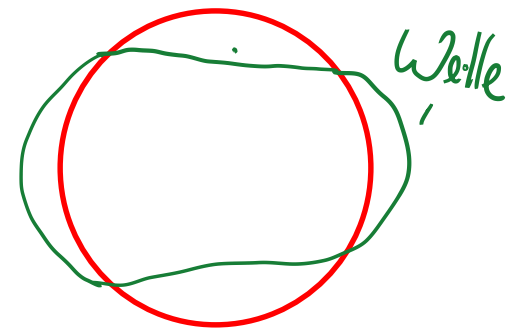
die de Broglie-Wellenlänge des e^- ist so, daß ein Vielfaches von ihr dem Umfang entspricht

→ es bilden sich stehende Wellen auf der Bahn aus

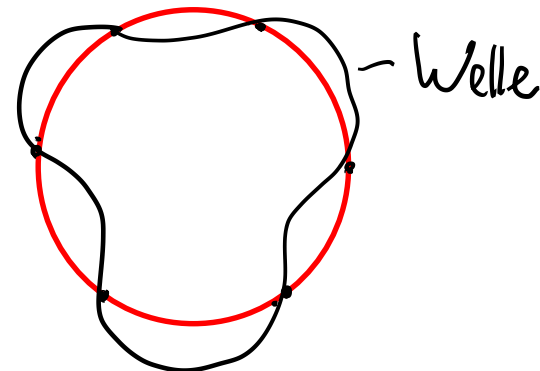
$$n=1: 2\pi r = 1 \cdot \lambda$$



$$n=2: 2\pi r = 2 \cdot \lambda$$



$$n=3: 2\pi r = 3 \cdot \lambda \quad \text{etc.}$$



Einführung in die **Moderne Physik**

Welle-Teilchen- Dualismus

Prof. Dr. Matthias Kohl

Welle - Teilchen - Dualismus:

- abhängig vom Experiment zeigen "Dinge"
 - Eigenschaften, die mit Wellen oder Teilchen verbunden werden
- Licht
— Elektronen
— Atome (Menschen?)

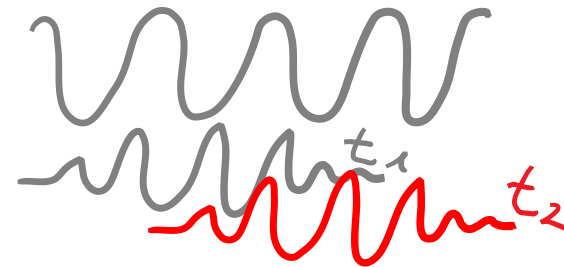
• Welle

Wellengleichung

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{df^2}{dt^2} = 0$$

in 1D Mechanik

$$v_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$



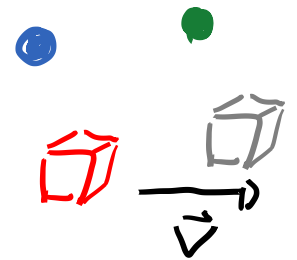
$$\begin{aligned} \text{Energie} &\sim v^2 \\ &\sim f^2 \\ &\sim \omega^2 \\ &\sim v_{ph}^2 \end{aligned}$$

Interferenz

• Teilchen

Form, Größe

$$m, v$$



Mechanik

$$\text{Energie} = \frac{1}{2} m v^2$$

existiert auch für $v=0$

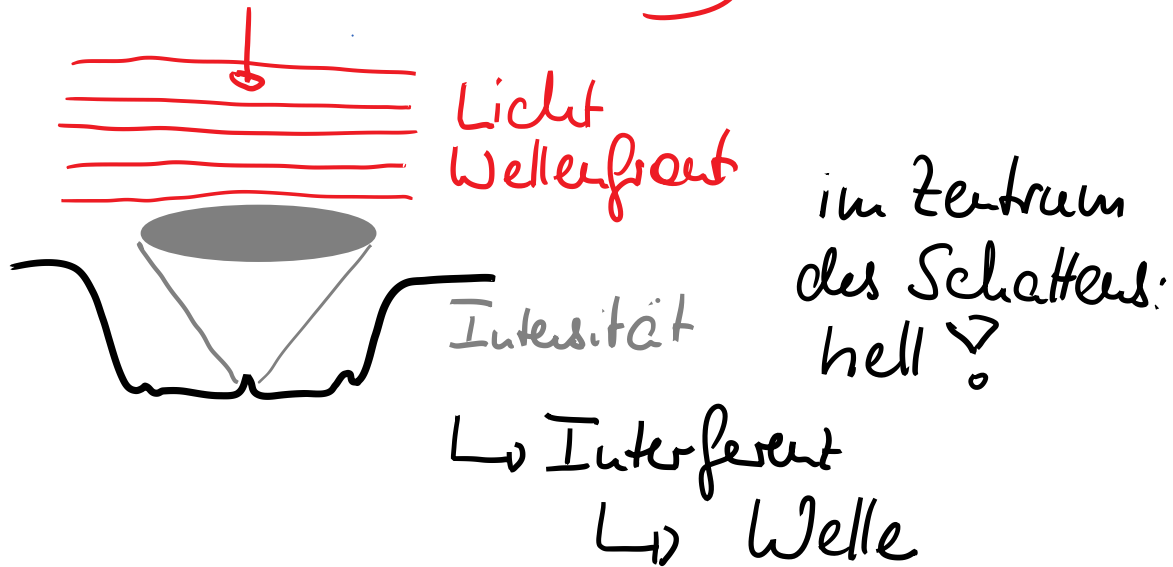
a) Licht: Welle oder Teilchen?

- Newton: „Teilchen“
- Huygens, Fresnel, Young: „Welle“

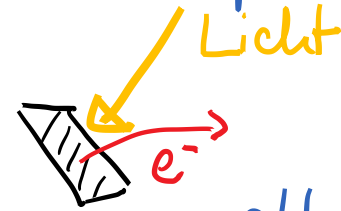
• Interferenz

Spalt / Doppelspalt
Farben der Seifenblasen

Welle !



• Photoeffekt



Licht schlägt e^-
aus Kathode
abhängig von Freq. ν } Teilchen

Übertragung von Energie in
Einheiten / Quanten von $E = h \cdot \nu$
 $= h \cdot \frac{c}{\lambda}$

mit Planck'schem
Wirkungsquantum $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

↳ Teilchen

- weitere Bestätigung der Teilchennatur von Licht: Compton - Effekt:

- Streuung von Röntgenstrahlung an der Elektronenhülle von Atomen

Photon $E = h \cdot \nu$

Streu photon $E' = h \cdot \nu'$

Beobachtung: ν bzw. λ ändert sich abhängig vom Streuwinkel, aber unabhängig vom Atom

- Erklärung und Beschreibung analog zum mechanischen Stoß
- Energie und Impulserhaltung

- großer Streuwinkel $\vartheta \rightarrow$ gemessen wird großes $\Delta \lambda$
- Beschreibung durch Photon (Rechnung siehe Literatur)

$$\Delta E = E' - E = h \cdot c_0 \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e \cdot c_0} \cdot (1 - \cos \vartheta)$$

Comptonwellenlänge des Elektrons $\lambda_c = \frac{h}{m_e \cdot c_0} = 0,00243 \text{ nm}$

Stoß $\left\{ \begin{array}{l} \Delta E \\ \Delta p \end{array} \right.$ Impulsänderung

mit dem Ansatz für den Impuls des Photons $p = \frac{h}{\lambda}$

Verallgemeinerung:
de Broglie postuliert (1924)

Materie (Atome, e^- ...) hat Teilchen-
und Wellencharakter, wobei
immer gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Energie } E = h \cdot \nu \\ \text{Impuls } p = \frac{h}{\lambda} \end{array} \right\} \text{de Broglie-} \\ \text{Gleichungen}$$

ν & λ eines „Teilchens“

↳ Interferenz muß
beobachtbar sein!

Abschätzung von ν & λ

•  $m = 100 \text{ g}$
 $v = 100 \text{ km/h}$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 0,1 \text{ kg} \cdot \left(27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 38,6 \text{ J}$$

$$\hookrightarrow \nu = \frac{E}{h} = \frac{38,6 \text{ J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 5,8 \cdot 10^{34} \text{ Hz}$$

sehr groß

$$\hookrightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{0,1 \text{ kg} \cdot 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2,4 \cdot 10^{-34} \text{ m}$$

sehr klein

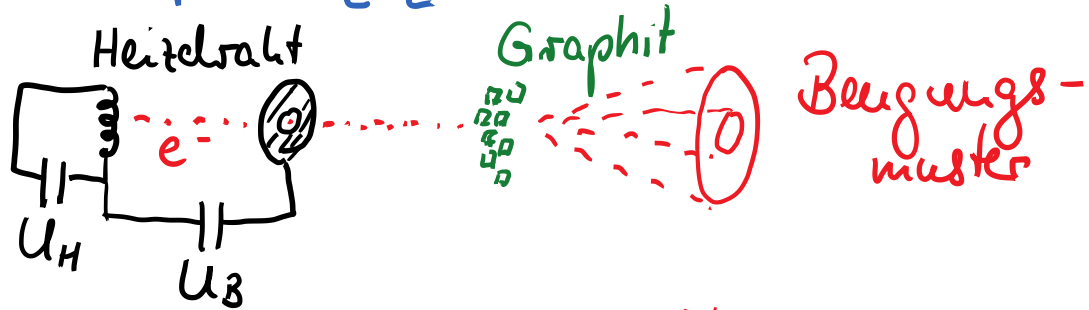
→ nicht meßbar!

•  $m = 100 \text{ kg}$
 $v = 4 \text{ km/h}$ } → $\lambda = 6 \cdot 10^{-36} \text{ m}$
 $\nu = 9 \cdot 10^{36} \text{ Hz}$

↳ für makroskopische Objekte:
 λ & ν nicht meßbar
Wellennatur spielt keine Rolle

- de Broglie - Wellenlänge eines Elektrons: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v_e}$$



e^- werden durch U_B beschleunigt

$$\hookrightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = e U_B$$

$$m_e v_e = \sqrt{2 m_e E_{kin}} = \sqrt{2 m_e e U_B}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_e e U_B}} \sim \frac{1}{\sqrt{U_B}}$$

mit $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_e e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U_B}} = 1,226 \text{ nm} \cdot \frac{1}{\sqrt{U_B}} \leftarrow \text{in V}$$

$U_B [\text{V}]$	$\lambda [\text{nm}]$
1	1,22
100	0,122
10000	0,0122

Experiment: Elektronenbeugung an Graphit



Fluoreszenzringe abhängig von

- λ , also U_B
- Atomabstände

Anwendung: Elektronenmikroskopie

- Lichtmikroskop: $\lambda \approx 400 - 700 \text{ nm}$
begrenzt die Ortsauflösung
- Elektronenstrahl mit $\lambda \approx 0,1 \text{ nm}$
↳ hohe Auflösung / kleine Objekte können
sichtbar gemacht werden

Anmerkung: in der Optik wurde
gezeigt, dass Licht einen Impuls hat

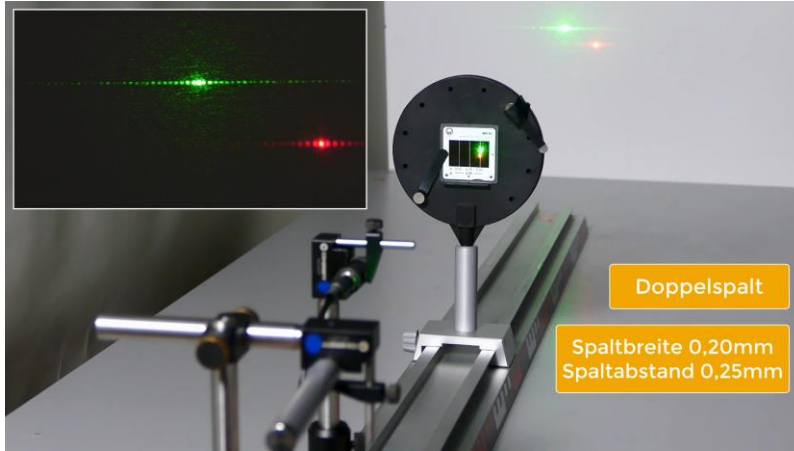
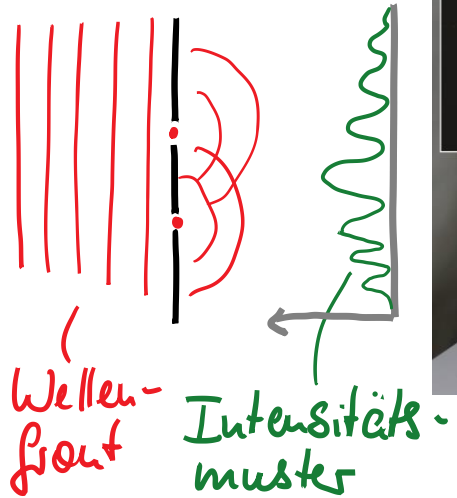
$$p = \frac{\text{Energie}}{c_0} \quad (\rightarrow \text{Strahlungsdruck})$$

$$\text{mit } E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c_0}{\lambda} \quad \text{also}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{!}$$

• Doppelspalt-Experiment:

- mit Licht:

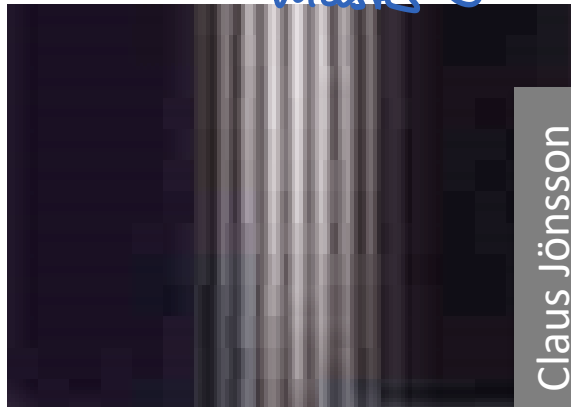


- mit Elektronen:

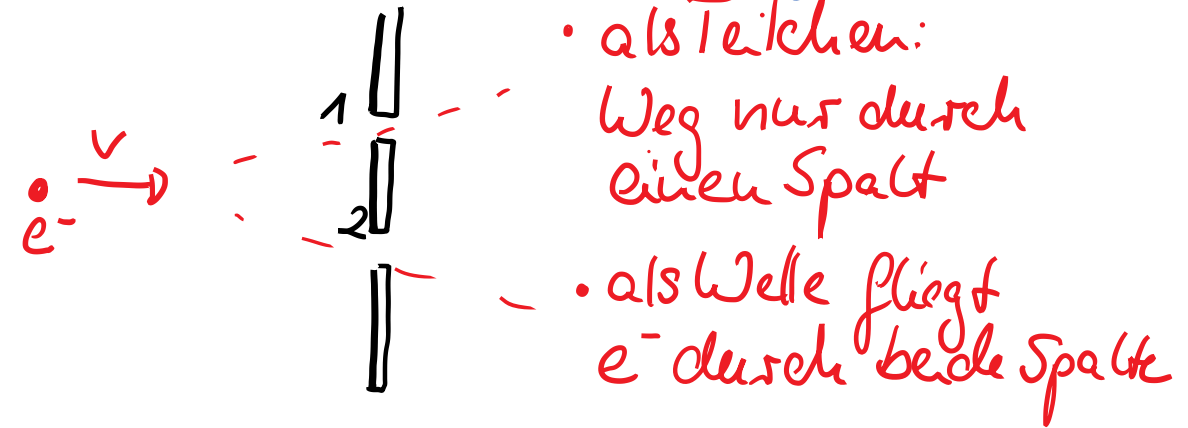
Interferenzmuster
am Doppelspalt

↳ Welle

beobachtetes Beugungsmuster



• Problem: wie ist der Weg?



• Problem: wie groß ist ein e^- ?

Teilchen

Welle  oder 

• Problem: was ist die Amplitude?
(e.-m. Welle: E- und B-Feld)

↳ Quantenmechanik

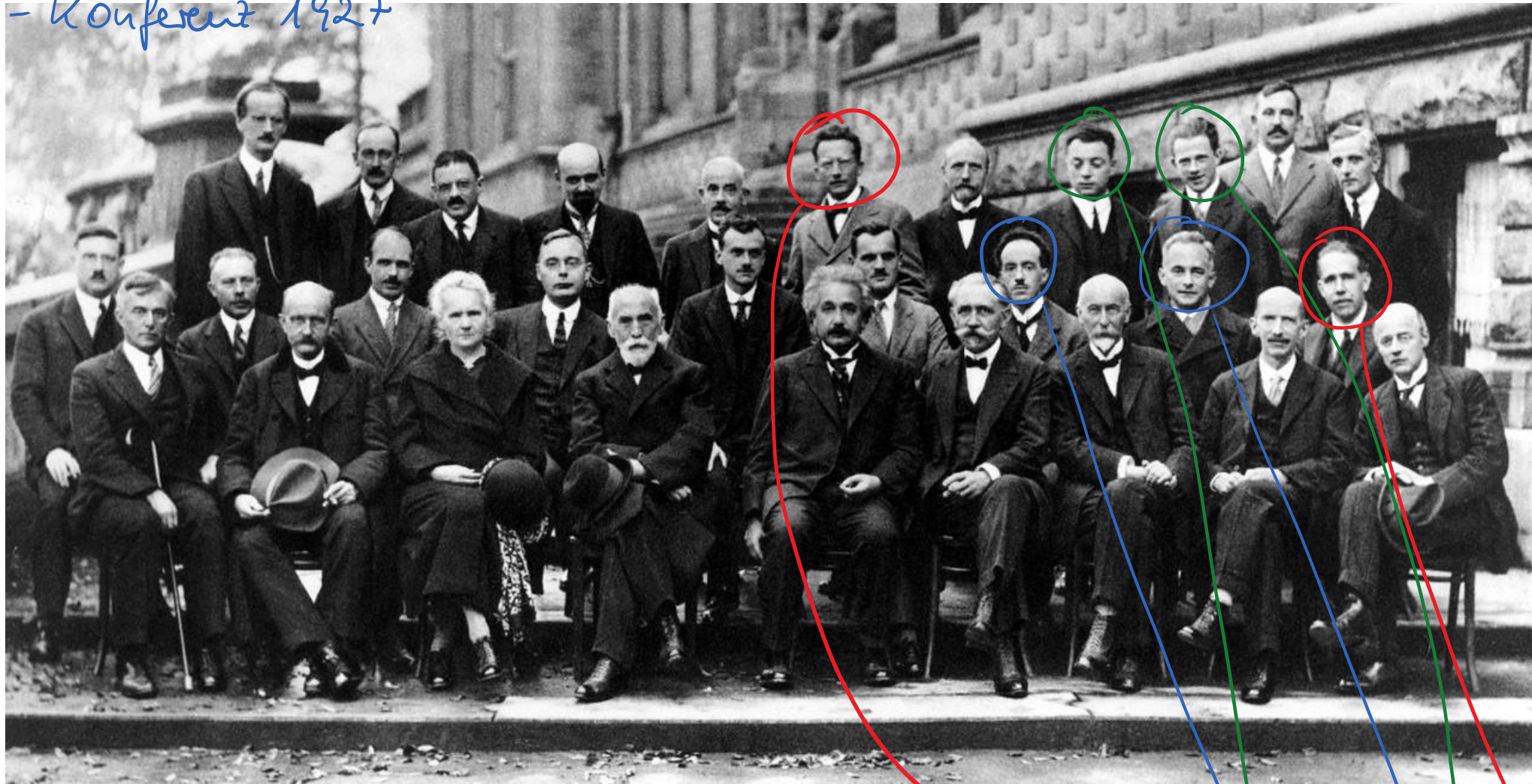
Heisenberg'sche Unschärferelation

Einführung in die **Moderne Physik**

Die Schrödinger - Gleichung

Prof. Dr. Matthias Kohl

Solvay - Konferenz 1927



Stehend von links nach rechts: A. Piccard, É. Henriot, P. Ehrenfest, É. Herzen, Th. Donder, Erwin Schrödinger, J. Verschaffelt, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, R. H. Fowler, L. Brillouin

zweiten Reihe sitzend von links nach rechts: P. Debye, M. Knudsen, W. L. Bragg, H. Kramers, Paul Dirac, Arthur Holly Compton, L.-V. de Broglie, Max Born, Niels Bohr

ersten Reihe sitzend von links nach rechts: I. Langmuir, Max Planck, Marie Curie, Hendrik Antoon Lorentz, Albert Einstein, P. Langevin, Ch. Guye, Ch. Th. Wilson, O. Richardson

Dualismus von Welle & Teilchen:

- „Teilchen“ zeigen Interferenzeffekte

→

$$\left. \begin{aligned} E &= h \cdot \nu \\ p &= \frac{h}{\lambda} \end{aligned} \right\} \text{de Broglie-Gleichungen}$$

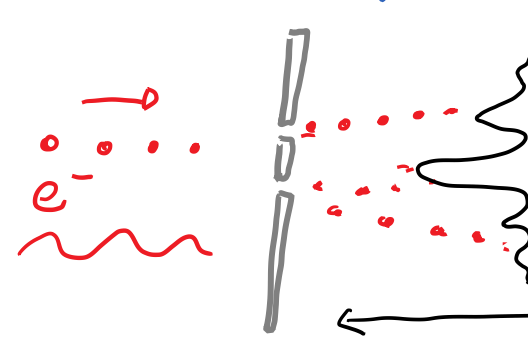
- klassische Welle:

- Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0$
partielle Ableitungen nach x & t ,

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k},$$

f ... Druck, Wasserhöhe, E-Feld
B-Feld,

Problem: Interferenz von e^- am Doppelspalt



Intensitätsverteilung
der e^- nach
dem Doppelspalt

→ was ist „ f “ für e^- ?
Welche Gleichung

↳ Schrödinger-Gleichung

E. Schrödinger postulierte eine partielle Differentialgleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + E_{\text{pot}} \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)$$

2. Ableitung
nach Ort

potentielle Energie
des Teilchens

1. Abl. nach
Zeit

Wellenfunktion $\psi(x,t)$ des Teilchens
„psi“

- $i = \sqrt{-1}$: komplexe Einheit
- was soll $\psi(x,t)$ sein? Einheit?
kann ψ imaginär sein?
wie ist ψ messbar?

Ziel: Berechnung von ψ für gegebenes
 E_{pot} sowie mögliche Energiezustände

Wellenfunktion ψ beschreibt Teilchen:

Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall dx

zu finden: $P(x) dx = |\psi(x,t)|^2 dx$
 $= \psi^* \cdot \psi \cdot dx$

wobei ψ^* das konjugiert komplexe von ψ ist und daher reell.

(Allgemein: für jede komplexe Zahl z
ist $z^* \cdot z = (a-ib) \cdot (a+ib) = a^2 + b^2$ reell)

↳ Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t) \cdot \psi(x,t)$$

Was für
ein Wort? ▽

$\psi(x,t)$ - also abh. von Ort und Zeit

↳ Separation in

$$\psi(x,t) = \underbrace{\psi(x)}_{\text{abh. von Ort}} \cdot \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{abh. von Zeit}}$$

abh. von Ort & Zeit

stehende Welle

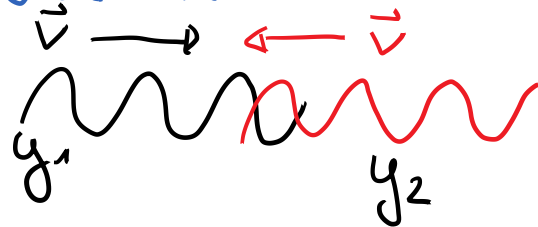
Mechanik: Stehende Welle (in 1D)

(Kap. 12 in Vorlesung Schwingungen und Wellen)

Zwei Wellen mit gleichem ω & $\pm k$

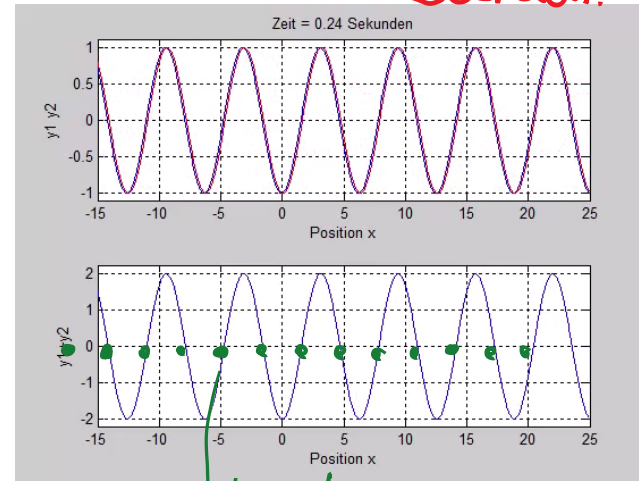
$$y_1 = y_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$y_2 = y_0 \sin(\omega t + kx)$$



Überlagerung:

$$y = y_1 + y_2 = 2y_0 \cdot \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{Zeitabh.}} \cdot \underbrace{\cos(kx)}_{\text{Ortsabh.}}$$



Knoten

Beispiel: Seilwelle mit Reflexion



• mit $\psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned} \text{wird } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) &= i\hbar \psi(x) \cdot (-i\omega) e^{-i\omega t} \\ &= \hbar \omega \psi(x) e^{-i\omega t} \\ &= \underbrace{E}_{\text{Energie des Teilchens}} \cdot \psi(x) \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Energie des Teilchens

Einsetzen in die Schrödinger-Gl.

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + E_{\text{pot}} \psi(x,t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) \\ &= E \cdot \psi(x) \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

$\psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$

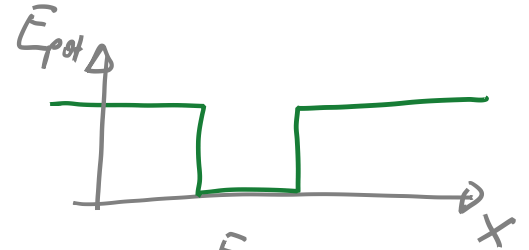
↳ zeitunabhängige Schrödinger-Gl.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + E_{\text{pot}} \psi(x) = E \psi(x)$$

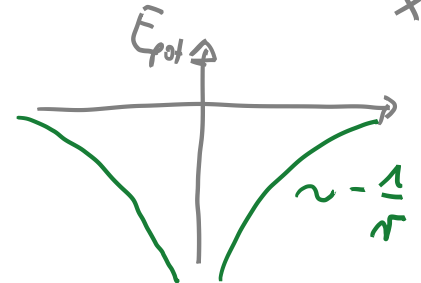
Ziel: für gegebenes Potential (E_{pot}) soll die mögliche Energie E berechnet werden sowie $\psi(x)$

Beispiele:

• Potentialtopf



• Coulomb-Potential im Atom



$|\psi(x)|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\hookrightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \quad \text{Normierung}$$

„Jedes einzelne Teilchen gibt es nur 1-mal.“

Einführung in die **Moderne Physik**

Teilchen im Potentialtopf Schrödinger - Gleichung

Prof. Dr. Matthias Kohl

Dualismus von Welle & Teilchen:

$$\left. \begin{aligned} E &= h \cdot \nu \\ p &= \frac{h}{\lambda} \end{aligned} \right\} \text{de Broglie-Gleichungen}$$

E. Schrödinger postulierte

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + E_{\text{pot}} \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)$$

↑
Wellenfunktion $\psi(x,t)$ des Teilchens
"psi"

↑
potentielle Energie
des Teilchens

• mit $\psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}$

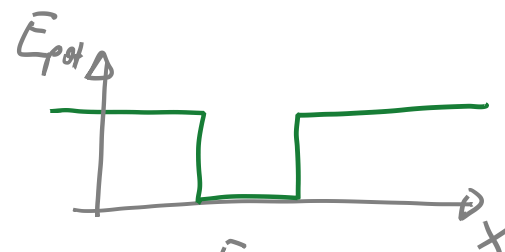
↳ zeitunabhängige Schrödinger-Gl.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + E_{\text{pot}} \psi(x) = E \psi(x)$$

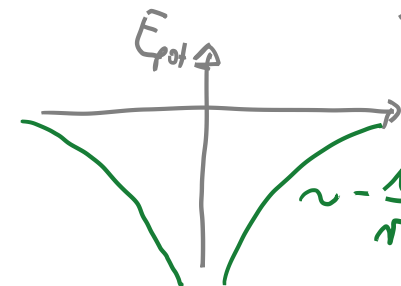
Ziel: für gegebenes Potential (E_{pot}) soll die mögliche Energie E berechnet werden sowie $\psi(x)$

Beispiele:

• Potentialtopf



• Coulomb-Potential im Atom



$|\psi(x)|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\hookrightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \quad \text{Normierung}$$

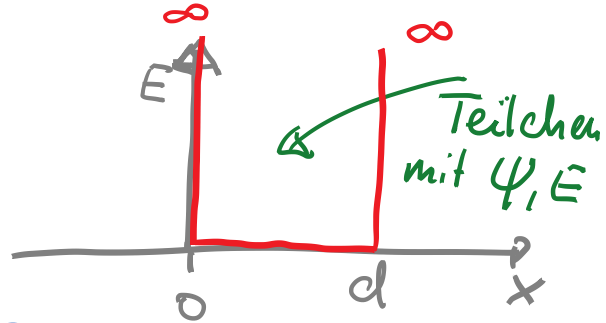
"Jedes einzelne Teilchen gibt es nur 1-mal"

Prinzip des Formalismus am Beispiel
des Kastenpotentials:
„Potentialtopf“

mit

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \infty \text{ für } x < 0 \\ &= 0 \text{ für } 0 \leq x \leq d \\ &= \infty \text{ für } x > d \end{aligned}$$

- Teilchen ist nur im Topf, da sonst $E_{\text{pot}} = \infty$
 $\hookrightarrow \psi(x) = 0$ außerhalb ($x < 0$ & $x > d$)
 $\hookrightarrow \psi(0) = \psi(d) = 0$ ← Randbedingung
 wie bei stehender Welle auf Seil



- innerhalb des Topfes ist $E_{\text{pot}} = 0$ und daher die zeitunabh. Schrödinger-Gl

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = E \cdot \psi(x)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m \cdot E}{\hbar^2} \psi(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2 \cdot \psi(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit } k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot E \quad (*)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\psi(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)$$

Konstanten, die aus den
Randbedingungen bestimmt werden können

$$\begin{aligned} \text{a) für } x=0: \quad 0 &= \psi(0) = A \cdot \sin(k \cdot 0) + B \cdot \cos(k \cdot 0) \\ &= B \end{aligned}$$

b) für $x=d$: $0 = \psi(d) = A \cdot \sin(k \cdot d)$
 $\hookrightarrow k \cdot d = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots = n \cdot \pi \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$

$$\left. \begin{aligned} k &= n \cdot \frac{\pi}{d} \quad \text{oder} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{d}{\pi} = \frac{2d}{n} \end{aligned} \right\} \text{Quantisierung von } k \text{ \& } \lambda$$

mit Quantenzahl $n=1, 2, 3, \dots$

• $n=0$: formal eine Lösung, aber $\lambda = \infty$
 und $\psi(x) = A \cdot \sin(0 \cdot x) = 0$
 also kein Teilchen im Kasten, da $|\psi|^2 = 0$

Bestimmung der quantisierten Energien
 aus (*) $k^2 \stackrel{!}{=} \frac{2m}{\hbar^2} \cdot E$ mit $k = n \frac{\pi}{d}$

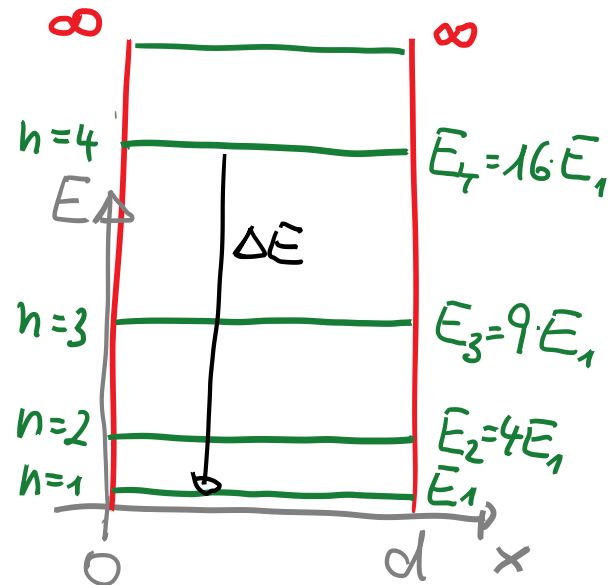
$$\hookrightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot k_n^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\pi^2}{d^2} \cdot n^2$$

• mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\hookrightarrow E_n = \frac{h^2}{8md^2} \cdot n^2 = E_1 \cdot n^2$$

mit der niedrigsten Energie $E_1 = \frac{h^2}{8md^2}$
 (Grundzustand)

$\hookrightarrow$ Folgerung: E_n ist immer > 0 !
 kein Zustand mit $E=0$!



• diskrete Zustände
 mit $E_n = E_1 \cdot n^2$

• Übergänge zwischen
 E_n & E_m

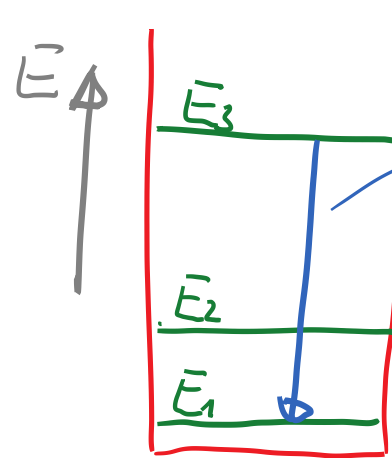
$$\Delta E = E_1 (n^2 - m^2) = h \cdot \nu$$

Beispiel: Elektron im Potentialtopf
mit Größe $d = 0,1 \text{ nm}$

Vergleich: Bohr'scher Radius im H-Atom
 $a_0 = 0,053 \text{ nm}$
 $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

• Energien: $E_1 = \frac{h^2}{8m_e d^2}$

$$= \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1 \cdot 10^{-10})^2 \text{ m}^2}$$
$$= 6,04 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$
$$= 37,7 \text{ eV} \quad (1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$
$$E_2 = 4 \cdot E_1 = 150 \text{ eV}$$
$$E_3 = 9 \cdot E_1 = 340 \text{ eV}$$



Übergang von $E_3 \rightarrow E_1$
 $\Delta E = (340 - 37,7) \text{ eV} = 302 \text{ eV}$
 $= 4,8 \cdot 10^{-17} \text{ J}$

dies entspricht einer Wellenlänge eines Photons:

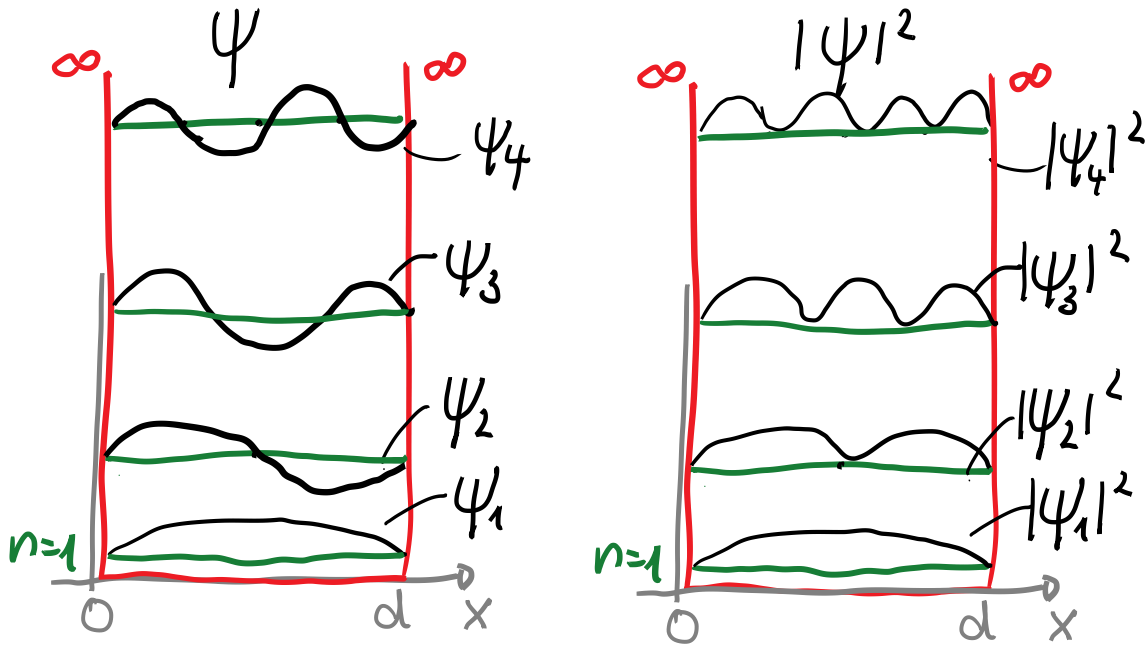
$$\Delta E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

$$\hookrightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E}$$
$$= \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,8 \cdot 10^{-17} \text{ J}} = 4,2 \text{ nm}$$

Wellenfunktionen:

$$\psi_n(x) = A \cdot \sin(k_n x) \quad \text{mit } k_n = n \cdot \frac{\pi}{a}$$

$|\psi|^2 \sim$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit



... entspricht den Moden einer schwingenden Saite / eines Seils



- aus der Normierung $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ ergibt sich $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ unabhängig von n

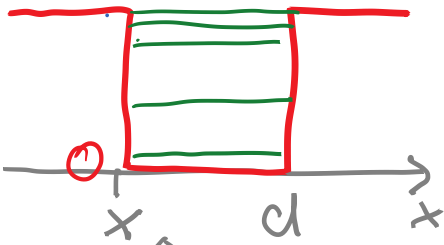
Lo

welchen Einfluß hat das Potential auf

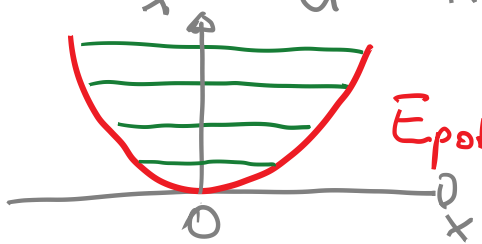
- Energien / Quantisierung
- Wellenfunktionen

Begründung für die Schrödinger - Gl.:

- Erfolg gibt Recht!
- Übereinstimmung Theorie - Experiment

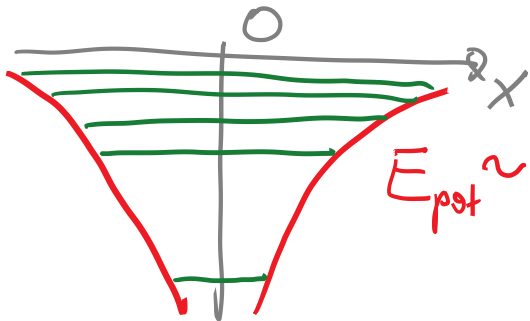


endlicher Pot.-Topf



harmonischer Oszillator

$$E_{\text{pot}} \sim x^2$$



Coulomb-Potential

$$E_{\text{pot}} \sim -\frac{1}{x}$$

→ H-Atom