

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

1. Einleitung

Physik

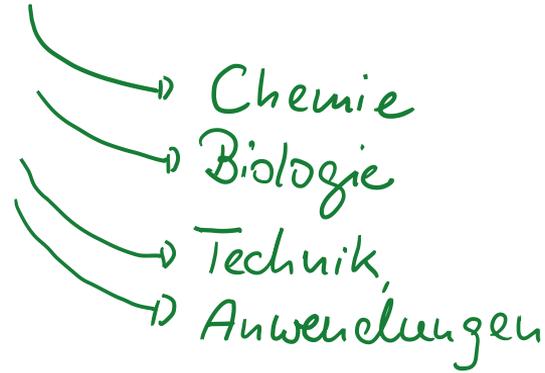
- klassische Physik

- Mechanik
- Wärmelehre
- Elektromagnetismus
- Optik, Akustik etc.

- moderne Physik

- Atome, Moleküle, Festkörper
- Quantenphysik
- Elementarteilchen etc.

Physik und Mathematik



Physik Naturwissenschaften
Beobachtung & Experiment



Worum es geht:
Beispiele zur Mechanik



Physikalisches Einheitensystem:

- jede physikalische Größe hat eine Maßeinheit
 - willkürliche Einheit
z.B. 1 inch \equiv Daumenbreite
Elle, Fuß
 - natürliche Einheit
z.B. Atomgröße

Internationales System (SI) der Einheiten:

- basierend auf 7 Grundeinheiten
- zuständig in Deutschland:

Physikalisch-Technische Bundes-
anstalt (PTB)

a) Längeneinheit: 1 Meter (1m)

historisch:

- vor 1799: $\frac{1}{40.000.000}$ des Erdenumfangs
- bis 1960: „Urmeter“
in Paris



- bis 1983: bestimmt aus Wellenlänge von Krypton

heute: das Meter wird bestimmt aus der Lichtgeschwindigkeit c_0 -
1 Meter (1m) ist die Strecke, die das Licht in der Zeit $1/299792548$ Sekunde zurücklegt

b) Zeiteinheit: 1 Sekunde (1s)

früher: 1 Sekunde $\hat{=}$ $\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}$ eines Tages

heute: aus Strahlung des Cäsiumatoms
 $1s \hat{=} 9192631770$ Schwingungsdauern des Cäsiums ν_{Cs}

↳ 1m & 1s: im Labor „herstellbar“,
mit Bezug zu Atomen, die überall gleich sind

Genauigkeit: 10^{-9} für Quarzuhren
 10^{-14} für Cäsiumuhren
($\hat{=}$ Fehler von 1s in 3,2 Millionen Jahren)

c) Masse: 1 Kilogramm (1 kg)

• Urkilogramm
in Paris



ab 2019: Urkilogramm ist ersetzt
durch Konstanten

- Schwingung Cäsium: ν_{Cs}
- Lichtgeschw. c_0
- Planck'sche Konstante h

$$\hookrightarrow 1 \text{ kg} = 1,475 \dots \cdot h \cdot \nu_{Cs} / c_0^2$$

✓ Mechanik: nur Masse (1 kg), Länge (1 m)
und Zeit (1 s) notwendig!

- alle anderen mechanischen Größen
daraus ableitbar

d) Stromstärke I (1 Ampere, A)
„Ladung pro Zeit“

↳ Elektromagnetismus

e) Temperatur T (1 Kelvin, K)

↳ Wärmelehre

f) Stoffmenge: (1 Mol)

$$1 \text{ Mol} \equiv 6,023 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen}$$

$$1 \text{ Mol Kohlenstoff} \equiv 12 \text{ g} = 0,012 \text{ kg}$$

g) Lichtstärke (1 candela)



- alle anderen physikalischen Größen sind abgeleitet aus diesen sieben Grundeinheiten!

Eichung: Genauigkeitsbestimmung durch Staatsinstitute (z.B. PTB)

Kalibrierung: Vergleich außerhalb eines Staatsinstituts

Beispiel: Kauf von 1 kg Tomaten



- Kalibrierung notwendig

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

2. Geschwindigkeit
und Beschleunigung

Alltagserfahrung:

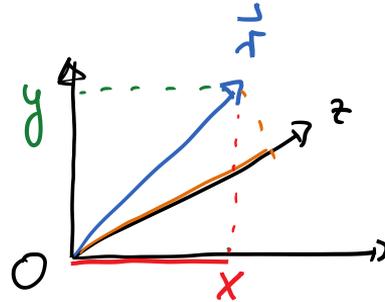
- Geschwindigkeit
≡ Änderung des Ortes mit der Zeit
- Beschleunigung
≡ Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit

↳ Ort / Lage eines Gegenstandes wird beschrieben

im Raum: Ort als Vektor

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

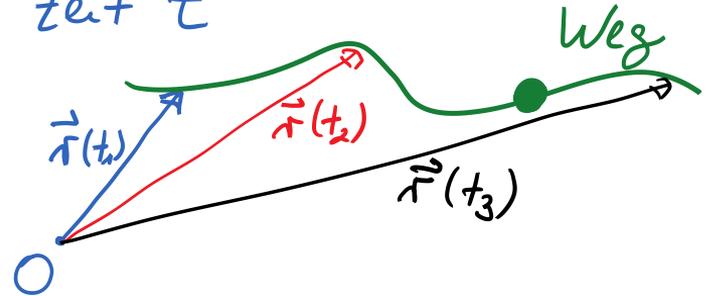
Koordinaten: senkrechte 3 Achsen



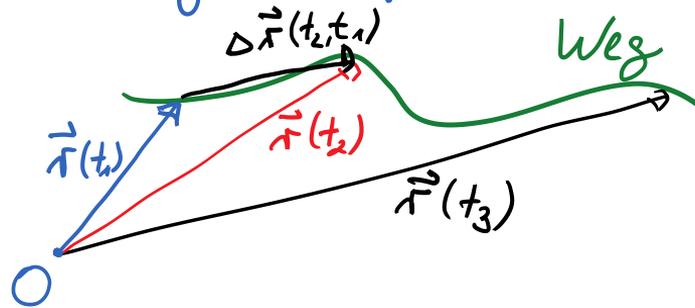
$$\vec{r} = (x, y, z)$$

Ursprung

Beschreibung der Bewegung im Raum: Koordinate \vec{r} ändert sich mit Zeit t



Änderung von \vec{r} für Zeitänderungen:



$$\Delta \vec{r}(t_2, t_1) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

für $\Delta t = t_2 - t_1$

Definition: mittlere Geschwindigkeit

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

(Schreibweise auch: $\vec{v}_m = \langle \vec{v} \rangle = \bar{\vec{v}}$)

in jedem Zeitpunkt:

Definition: Geschwindigkeit \vec{v}

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

„Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung des Ortsvektors“

Einheit: $[v] = 1 \frac{m}{s}$

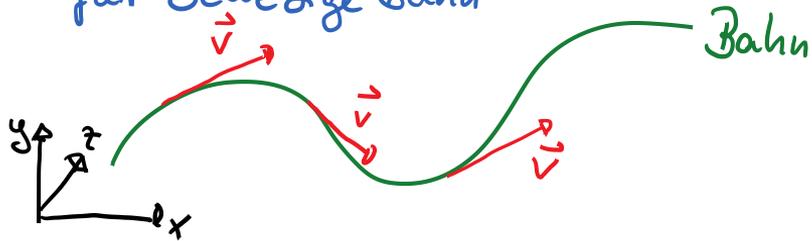
Anmerkung: Schreibweise

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad \leftarrow \text{Punkt} \equiv \text{Ableitung nach } t$$

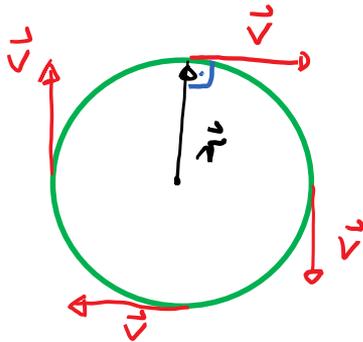
• \vec{v} ist Vektor!

\vec{v} : Vektor mit Richtung der Bahntangente, unabhängig vom Betrag

• für beliebige Bahn



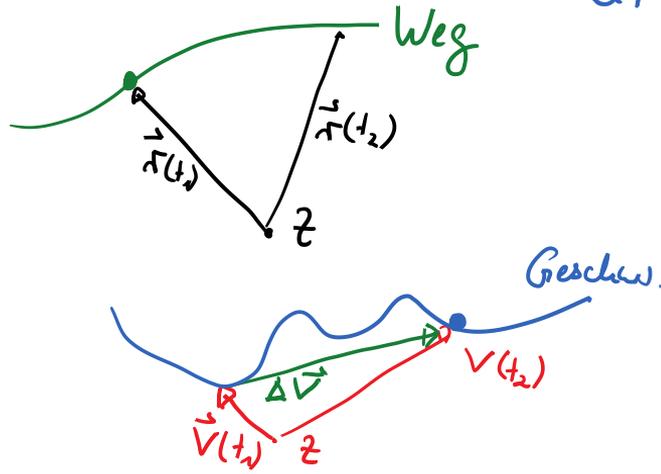
• für Kreisbahn



\vec{r} : Radius

$$\vec{v} \perp \vec{r} \quad \vec{v} \perp \vec{v}$$

Beschleunigung: Beschreibung der zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit



Definition: mittlere Beschleunigung

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t}$$

zu jedem Zeitpunkt:

Definition: Beschleunigung

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$\text{Einheit } [a] = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Anmerkung: Schreibweise $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$
(gesprochen: „... r zwei Punkt = v Punkt...“)

Beschleunigung \vec{a} : Vektor!

- Umgangssprache:

$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}| > 0 : \text{„... wird schneller ... beschleunigt.“} \\ |\vec{a}| < 0 : \text{„... wird langsamer ...“} \end{array} \right.$

Richtung der Änderung nicht enthalten!

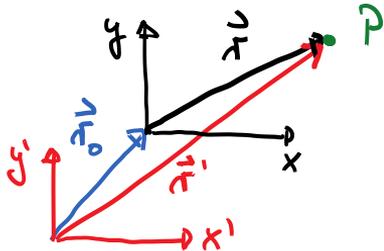
Superpositionsprinzip:

\vec{r} , \vec{v} und \vec{a} sind Vektoren

↳ Zerlegung in x -, y -, z -Komponenten
unabhängige Behandlung jeder
Komponente

↳ Überlagerung (Addition / Subtraktion)
von Komponenten

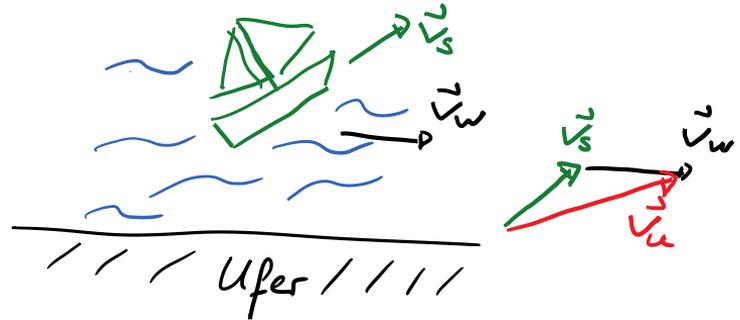
Beispiel: Änderung des Koordinaten-
systems um \vec{r}_0



↳ $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$
Koordinaten-
system 1 Koordinaten-
system 2

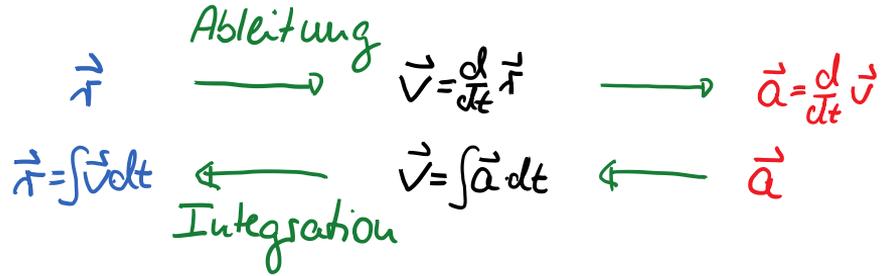
- Bewegung & Beschreibung ist unabhängig
von Wahl des Koordinatensystems

Beispiel: Schiff bewegt sich mit \vec{v}_s relativ
zum Wasser, das mit \vec{v}_w strömt



Geschw. relativ zum Ufer $\vec{v}_u = \vec{v}_s + \vec{v}_w$

Ziel: Beschreibung von Ort \vec{r} , Geschw. \vec{v} und Beschl. \vec{a} als Funktion der Zeit



Beispiel: gleichmäßig beschleunigte Bewegung in einer Richtung (1D)

↳ Beschreibung ohne Vektoren
gesucht: $v(t)$ & $x(t)$

Ansatz: $a = \frac{dv}{dt} = \text{constant}$

wenn a gegeben \rightarrow Integration liefert $v(t)$ & $x(t)$

↳ $v(t) = \int a dt = a \cdot t + C_1$ \mathbb{R} Konstante

wenn für $t=0$ $v(t=0) = v_0$ Anfangsgeschw.

$v(t) = at + v_0$

↳ $x(t) = \int v dt = \int (a \cdot t + v_0) \cdot dt$

$= \frac{1}{2} at^2 + v_0 \cdot t + C_2$ \mathbb{R} Konstante

wenn für $t=0$ $x(t=0) = x_0$

$x(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 \cdot t + x_0$

\rightarrow also kann Weg und Geschw. als Funktion der Zeit berechnet werden

Freier Fall auf der Erdoberfläche:

Ball fällt



Zeitlupe x8
24 Bilder/s, 4k

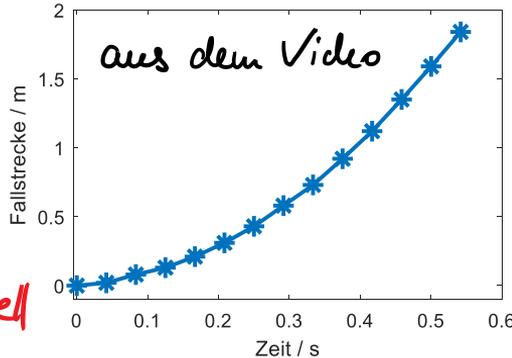
Messung:

- Fallstrecke x
- Zeit

↳ quadratische Abhängigkeit

$$x \approx 5,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$
$$= \frac{1}{2} 10,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

↑ experimentell



↳ $x \sim t^2$ ↳ Beschleunigung ist auf der Erde konstant

- genauere Messungen: auf der Erdoberfläche beträgt die Fallbeschleunigung

$$a = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{↳ } v(t) = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2} 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

wenn $v_0 = 0$ & $x_0 = 0$:

- für Fallzeit $t = 1\text{s}$

$$\text{↳ } v(1\text{s}) = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad x = 4,9 \text{ m}$$

- für Fallstrecke 1m

$$\text{↳ } t = \sqrt{2/9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,45\text{s}$$

Beispiel: Zeitentwicklung $x(t), v(t), a(t)$

Beschleunigungssensoren:

• MEMS - micro-electronisch-mechanisches System

• im Handy integriert, gute App:

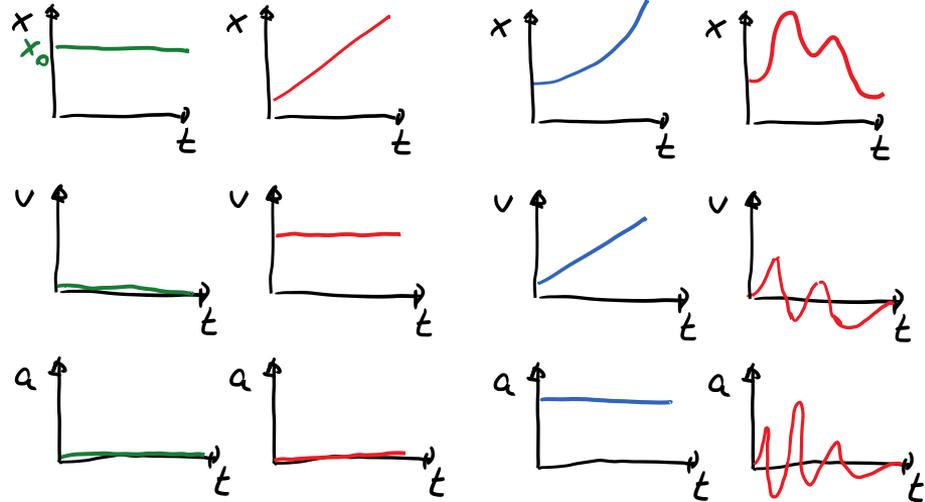
<https://phyphox.org/de/home-de/>

↳ ⚽ Spieler ⚽

↳ Beispiele im Sport: eigenes Video



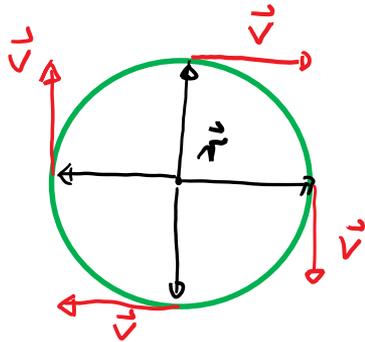
a) Ruhe b) $v = \text{const.}$ c) $a = \text{const.}$ d) allgemein



Beispiel: Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$

• \vec{v} ändert sich!

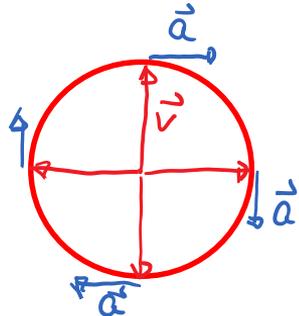
↳ $\vec{a} \neq 0$, da Richtungsänderung!



\vec{r} : Radius

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{r}$$

↳ \vec{v} beschreibt eine Kreisbahn



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}$$

↳ $\vec{a} \parallel \vec{r}$ parallel!

→ bei einer Kreisbewegung mit konstanter Geschw. v ist die Beschleunigung zum Zentrum gerichtet!

Berechnung von a in Abhängigkeit von v & r → späteres Kapitel

• hier: Geschwindigkeit & Beschleun.

↳ Wurfbewegungen

↳ Was bewirkt eine Bewegungsänderung? → Kraft

Anmerkung zum Gebrauch der Abkürzungen

• Buchstaben willkürlich; verbreitet

	deutsch	englisch
v	Geschw.	velocity
a	Beschleunigung	acceleration
F	Kraft	force
p	Impuls	(puls) momentum
etc...		

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl



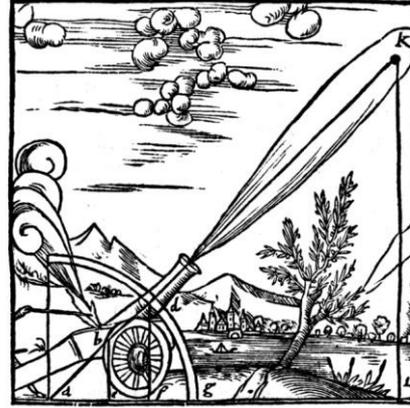
3. Wurfbewegungen



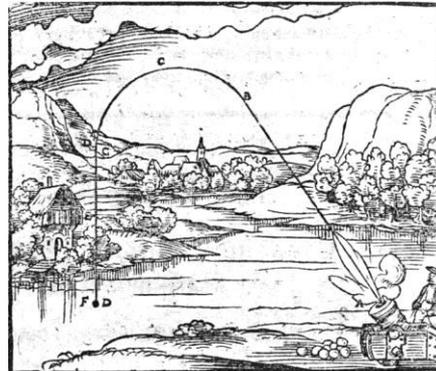
- Wie fällt ein Stein?
- Wie weit und wie hoch fliegt ein Ball

↳ Wurfbewegungen auf Erdoberfläche

Vorstellungen der Antike / Renaissance



- "Bewegung" wird beim Flug aufgebraucht
 - danach Fall nach unten
- ↳ Impetustheorie



W. Ryff (1582)

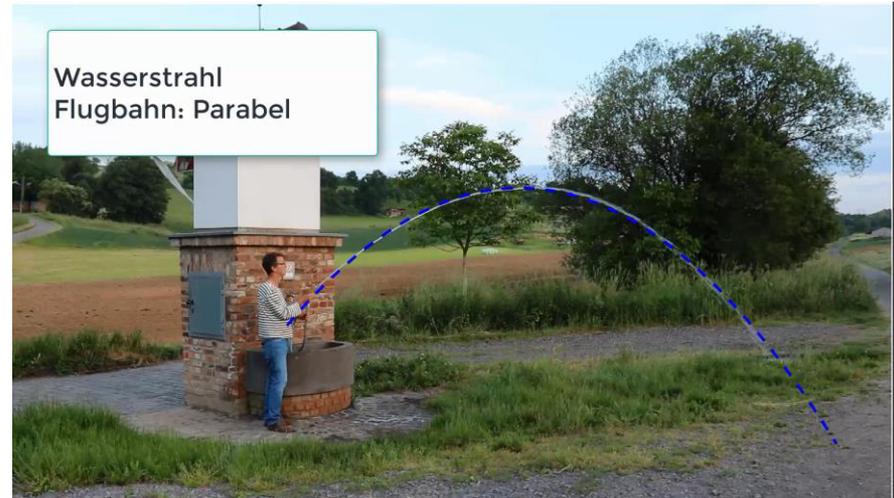
⚡ falsch

Experimente:

- Ballwurf



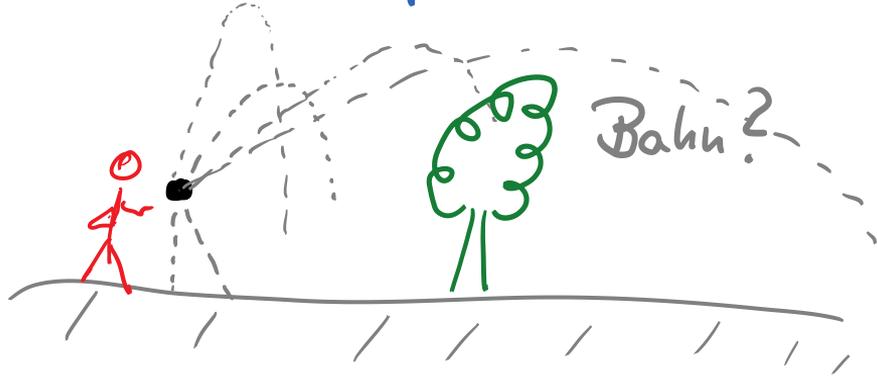
- Wasserstrahl



- Druck im Wasserschlauch → 
- ↳ Geschwindigkeit v_0
- ↳ Parabelbahn ($y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$)
- ↳ Höhe & Weite abh. von v_0 & Winkel



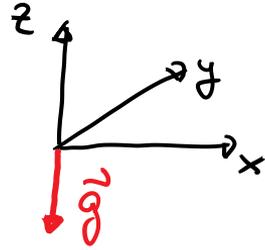
Freier Fall / Wurf:



- vertikal, nach „unten“:
Gravitation \rightarrow Erdbeschleunigung
 $a = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- horizontal:
keine Beschleunigung!

Grundgedanke: Zerlegung der Kräfte/
Beschleunigung / Bewegung in Kom-
ponenten

$$a_z = -g$$
$$a_x = a_y = 0$$

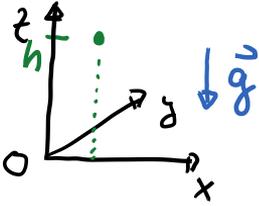


▽ ohne Reibung ▽

1. Fall aus Höhe h

$$a_z = -g = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

da a_z nach unten



$$z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{z0} \cdot t + z_0$$

sei Anfangsgeschw. $v_{z0} = 0$
und Anfangsposition $z(t=0) = z_0 = h$

$$\hookrightarrow z(t) = \frac{1}{2} (-g) \cdot t^2 + h$$

Fallzeit t_F , wenn $z(t_F) = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2} g t_F^2 + h$$

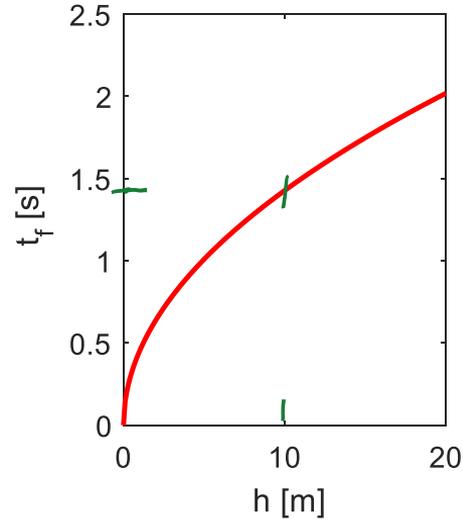
$$t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t_F \sim \sqrt{h}$$

für $h = 10 \text{ m}$

$$\hookrightarrow t_F = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

$$\approx 1,42 \text{ s}$$

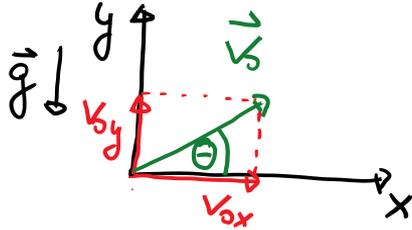


2. Schräger Wurf mit Anfangsgeschw \vec{v}_0
im Winkel Θ zum Erdboden

Betrachtung für horizontale und vertikale
Komponente

$$v_{0x} = |\vec{v}_0| \cdot \cos \Theta$$

$$v_{0y} = |\vec{v}_0| \cdot \sin \Theta$$



gesucht: $x(t)$, $y(t)$ und $y(x)$

$$\bullet x\text{-Richtung: } v_x(t) = a_x \cdot t + v_{0x} = v_{0x}$$

"0"

$$x(t) = v_{0x} \cdot t + x_0 = v_{0x} \cdot t$$

"sei 0"

$$\bullet y\text{-Richtung: } v_y(t) = -g \cdot t + v_{0y}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$$

"sei 0"

• daraus lässt sich $y(x)$ gewinnen:

$$\text{mit } x = v_{0x} \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$\hookrightarrow y(x) = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x$$

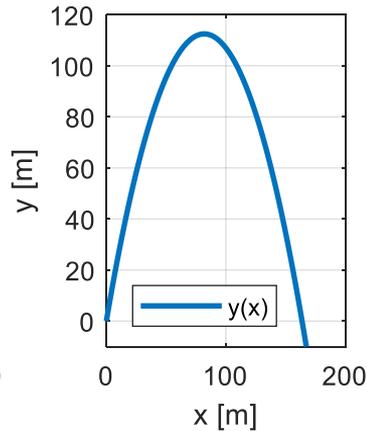
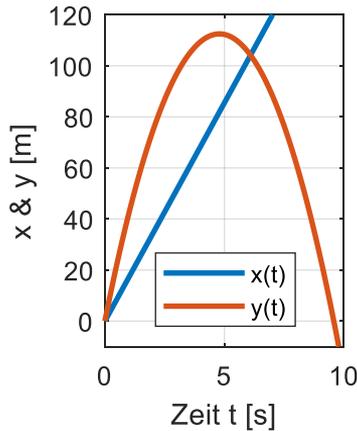
Beispiel: ein Ball wird mit $v_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
in einen Winkel $\Theta = 70^\circ$ geworfen

Wie sieht die Bahn aus?

Wie hoch, wie weit und wie lange fliegt er?

$$v_{0x} \approx 17,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_{0y} = 47,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bahn:



• Flugzeit $t_{\overline{f}}$: es muß gelten $y(t_{\overline{f}}) = 0$

$$\hookrightarrow 0 = -\frac{1}{2} g t_{\overline{f}}^2 + v_{0y} \cdot t_{\overline{f}}$$

$$t_{\overline{f}} = \frac{2 v_{0y}}{g} = 2 \cdot \frac{47 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 9,58 \text{ s}$$

• Flugweite $x_{\overline{f}}$:

$$x_{\overline{f}} = v_{0x} \cdot t_{\overline{f}} = v_{0x} \cdot 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} \\ = 163,9 \text{ m}$$

• Flughöhe: am obersten Punkt h ist $v_y(h) = 0$

$$0 = -g \cdot t_h + v_{0y}$$

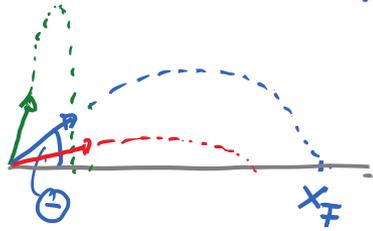
$$t_h = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{1}{2} \cdot t_{\overline{f}} = 4,79 \text{ s}$$

↖ „Flugzeit“ nach oben
so lang wie nach unten!

$$y_h = -\frac{1}{2} g t_h^2 + v_{0y} \cdot t_h$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} + \frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} = 112,5 \text{ m}$$

3. Maximale Wurfbreite:



x_F ist abhängig vom Winkel Θ

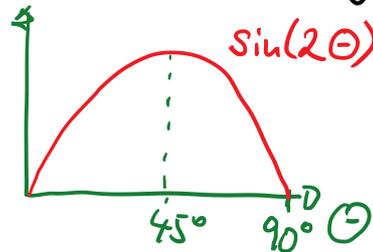
$$x_F = v_{0x} \cdot 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} \quad (\text{siehe oben})$$

$$\text{mit } v_{0x} = v_0 \cdot \cos \Theta \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin \Theta$$

$$x_F = \frac{2}{g} \cdot v_0^2 \cdot \sin \Theta \cdot \cos \Theta$$

$$\text{mit } 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin(2\alpha) \quad (\text{Formel-Sammlung})$$

$$x_F = \frac{1}{g} \cdot v_0^2 \cdot \underbrace{\sin(2\Theta)}$$



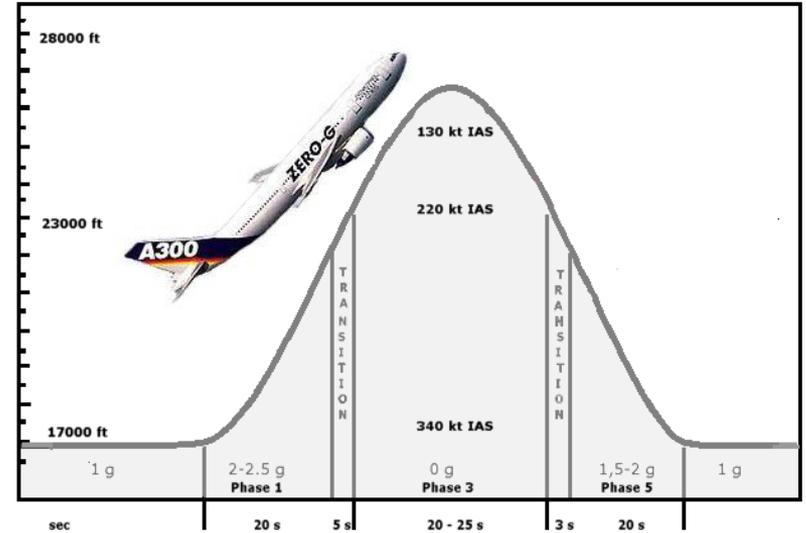
$$\sin(2 \cdot 45^\circ) = \sin(90^\circ) = 1$$

↳ maximale Wurfbreite für einen Winkel $\Theta = 45^\circ$!

Beispiel: Parabelflug
→ kurzzeitige Schwerelosigkeit



<https://www.youtube.com/watch?v=B6N5KL8fvfi>



<https://de.wikipedia.org/wiki/Parabelflug>

anderer Ansatz zur Beschreibung von
Wurfbewegungen:

Energieerhaltung

→ Bewegungsenergie am Anfang
wird in potentielle Energie
umgewandelt ↔ Werfhöhe

↳ späteres Kapitell

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

4. Newtons Axiome

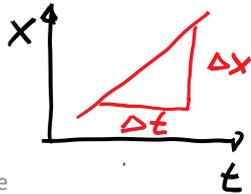
Grundfrage: Woher wird die Bewegung geändert?



Aus Experimenten / Erfahrung:
Galileisches Trägheitsprinzip:
Ein Körper bewegt sich gleichmäßig und geradlinig, wenn keine Kräfte auf ihn wirken.

Keine Kraft $\rightarrow \vec{v} = \text{const.}$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Anmerkung: real existiert immer eine Reibungskraft \rightarrow Geschw. wird kleiner

Kraft: eine Kraft, die auf einen Körper einwirkt, ändert seine Bewegung

Kraft $\vec{F} \sim$ Beschleunigung \vec{a}

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

mit der trägen Masse m

Einheit $[F] = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N (Newton)}$

Newtons Axiome der Mechanik:

Axiom: Grundprinzip, das nicht hergeleitet werden kann

1. Axiom: Trägheitsprinzip

Kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig und gleichförmig

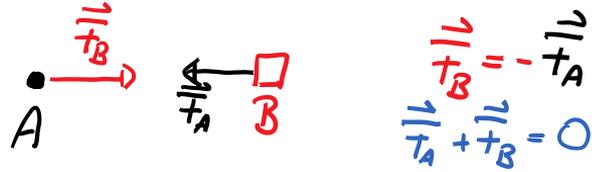
2. Axiom: Aktionsprinzip $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Eine Kraft \vec{F} , die auf Masse m wirkt, führt zu einer Beschleunigung

3. Axiom: Reaktionsprinzip „Actio = Reactio“

Wenn ein Körper A eine Kraft \vec{F}_A auf Körper B ausübt, so wirkt von B

eingleich große, aber entgegengesetzte Kraft \vec{F}_B auf A



→ Mechanik basiert auf Newtons Axiomen (und den Erhaltungssätzen)

Anmerkung:

- Überlagerung / Addition von Kräften (Superpositionsprinzip)
- träge Masse = schwere Masse
Beschleunigung Gravitation
abh. von Masse

Anmerkungen:

- Umgangssprache: „... Gewicht von 50kg.“
— falsch ↯

Gewicht = Kraft, die von einer Masse durch Gravitation hervorgerufen wird

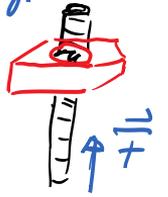
$$\vec{F}_G = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \text{ N} (= 1 \text{ kp}, 1 \text{ Kilopond})$$

- Trägheitsprinzip: Idealisierung / Abstrahierung
— jede reale Bewegung wird durch Reibung gebremst

Trägheit im Alltag:

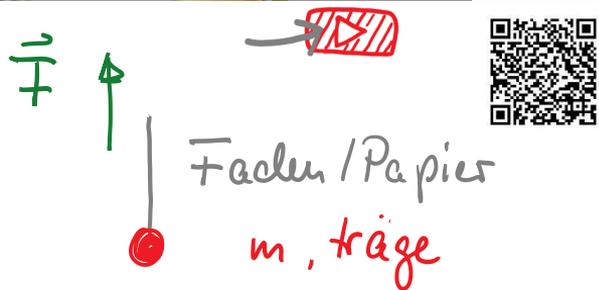


- Befestigung eines Hammergriffs

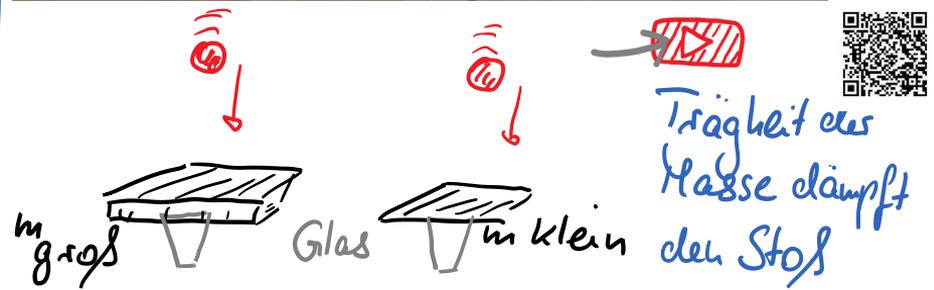


Beispiele für Trägheit der Masse

- Reißen von Papier oder Faden

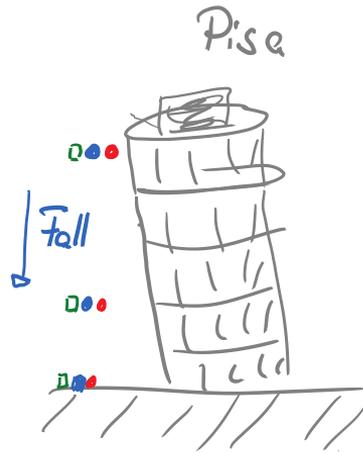


• Fallende Kugel auf Glas mit Stahlplatte



Galileo Galilei:

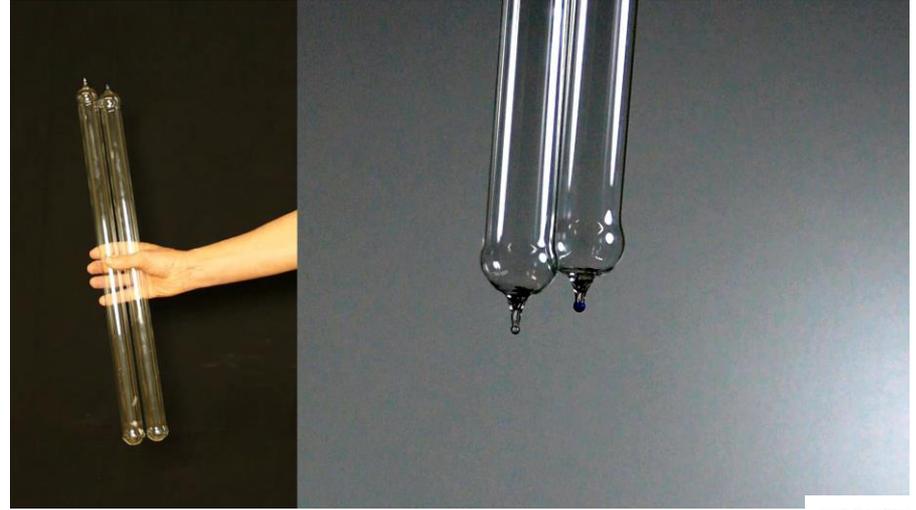
freie Fall ist unabh.
von Material, Form
und Masse



Fallexperiment,
von G.G. so nie durchgeführt
- Mythos der Wissenschaft

- gilt unter Idealbedingungen: Luftwiderstand vernachlässigt

Fallrohr: Luftleer & Luftgefüllt



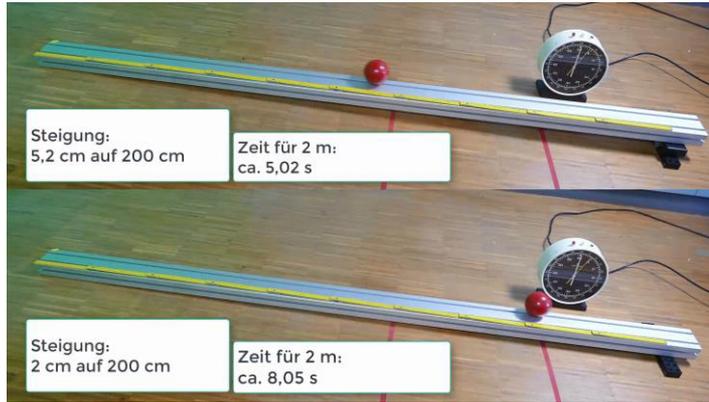
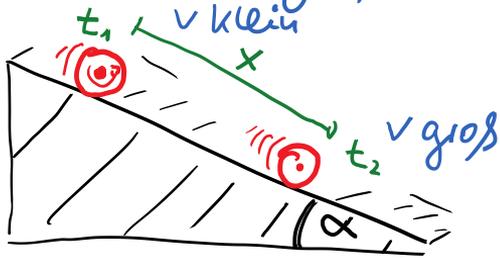
- im Luftleeren Rohr: Metallkugel und Papier fallen gleich schnell



Galilei: keine direkten Fallexperimente

- schiefe Ebene: Rollen von Kugeln,

Messung von Weg und Zeit



aus diesem Experiment:

- alle Körper "fallen" gleich schnell

b) für $x=2m$

Steigung S	Zeit t
$S_1 = 5,2/200$	$t_1 = 5,02s$
$S_2 = 2,0/200$	$t_2 = 8,05s$

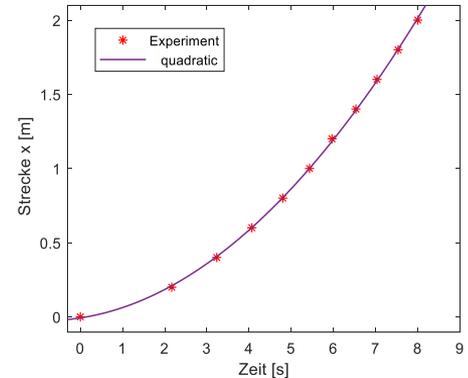
$$\frac{S_1}{S_2} = 2,6 \quad \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \frac{1}{2,57}$$

↳ Quadrat der Fallzeiten proportional zu $1/\text{Steigung}$ $t^2 \sim \frac{1}{S}$

(Beschleunigung $a \sim \text{Steigung} \rightarrow a \sim \frac{1}{t^2}$)

c) Bestimmung der Strecke als Funktion der Zeit aus Video →

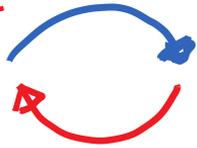
$$\rightarrow x \sim t^2$$



⇒ Experiment in Übereinstimmung
mit Theorie für konstante Beschleu-
nigung a

$$\hookrightarrow x = \frac{1}{2}at^2 \quad (v_0=0, x_0=0)$$

Experiment
Beobachtung



Theorie
mathematisches
Modell

Apollo 15 (1971): D.R. Scott
• Hammer & Feder fallen gleich schnell



↳ gleiche Beschleunigung,
unabhängig von Masse

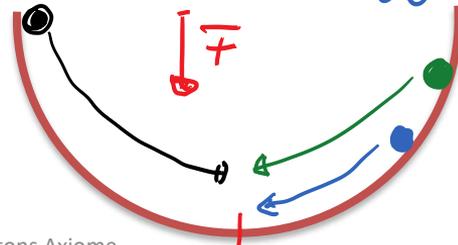


Beispiel: rollende Kugel auf Kreisbahn

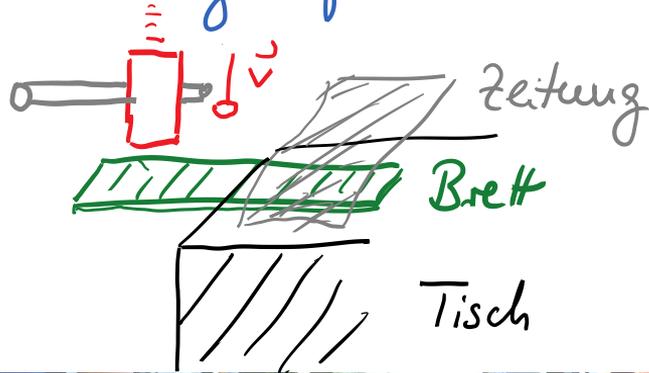


→ Beschreibung durch Form, Rotation, Rollen etc.

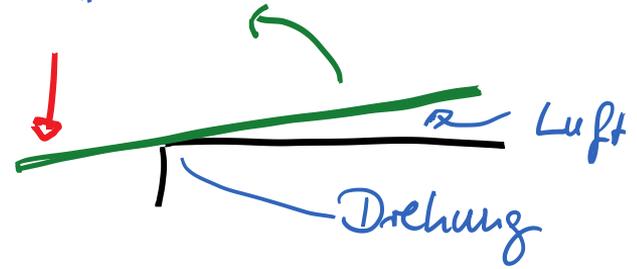
Beobachtung: „Fallzeit“ unabhängig von Fallhöhe!



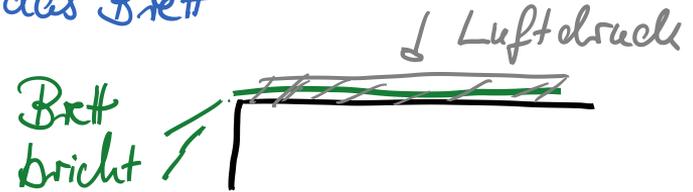
Beispiel: Schlag auf Brett



• Schlag auf Brett



- Zeitung verhindert Luftstrom unter das Brett



→ Trägheit der Luft! ⚡



- Jede Kraft lässt sich auf eine der 4 Fundamentalkräfte zurückführen

1. Gravitation

... zwischen Massen

2. Elektromagnetische Kraft

... zwischen Ladungen / Strömen

3. Starke Wechselwirkung (Kernkraft)

zwischen Hadronen (Proton, Neutron...)

4. Schwache Wechselwirkung

zwischen Elektron und Neutron
bzw. Proton

Beispiel „Muskelkraft“:

Chemische / Biochemische Prozesse in Muskelfasern

→ Atom-Molekülhülle mit elektromagnetischen Kräften zwischen Elektronen und Protonen



Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

5. Kraft und Arbeit

Arbeit, Energie und Leistung:

Begriffe des Alltags:

Beispiel: Heben einer Masse durch Kraft

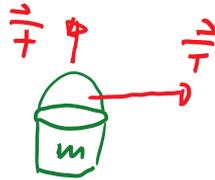
→ Arbeit wird verrichtet

→ Bezug zur verwichenen Zeit: Leistung

Kraft ist Vektor!

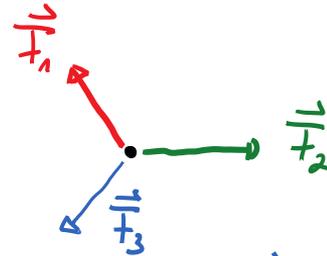
Richtung wichtig

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Gleichgewicht der Kräfte

• Actio = Reactio



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

allgemein: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ als Vektoren

oder für jede Komponente

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad \sum_i F_{iz} = 0$$

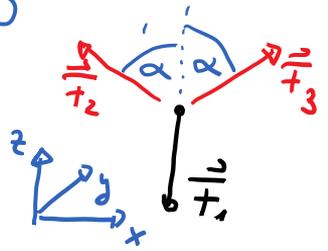
Beispiel: Tragen einer Gewichtskraft $\vec{F}_G = m \vec{g}$ · Zerlegung in Komponenten mit



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} &= 0 \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y} &= 0 \\ \vec{F}_{1z} + \vec{F}_{2z} + \vec{F}_{3z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



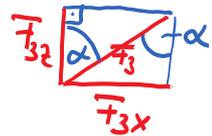
hier: Kräfte in xz-Ebene

$$\hookrightarrow \vec{F}_{1y} = \vec{F}_{2y} = \vec{F}_{3y} = 0 \quad \text{mit } |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_1 = m (0, 0, -g)$$

x-Komponente:

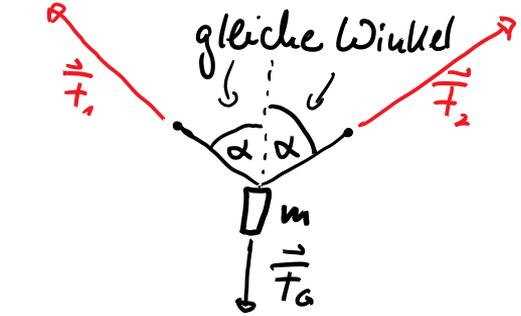
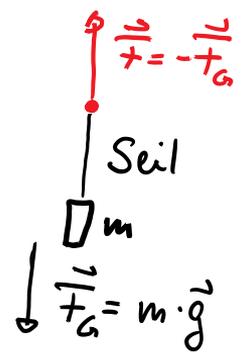
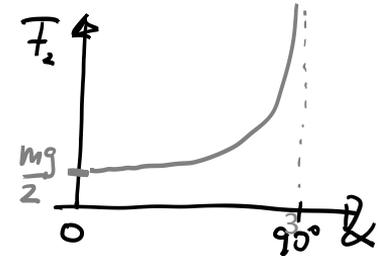
$$\vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} = -\vec{F}_2 \cdot \sin \alpha + \vec{F}_3 \cdot \sin \alpha$$



z-Komponente: $-mg + \vec{F}_3 \cdot \cos \alpha + \vec{F}_2 \cdot \cos \alpha = 0$

$$-mg + 2 \vec{F}_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

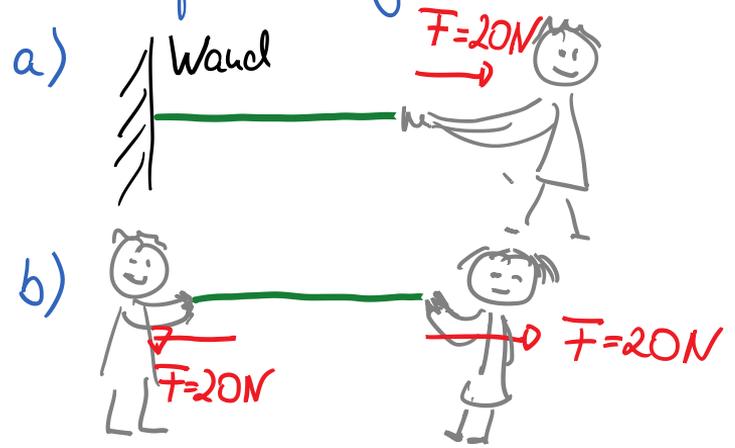
$$\hookrightarrow \vec{F}_2 = \frac{mg}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \vec{F}_3$$



· je größer α , um so größer werden \vec{F}_1 und \vec{F}_2

Beispiel: Kraft in einem Seil

Welches Seil muß eine größere Kraft oder Spannung aushalten?

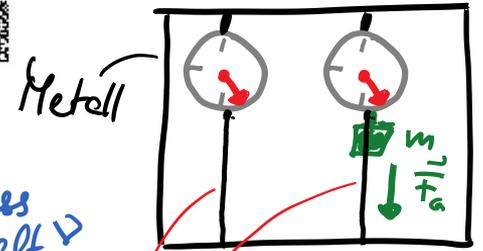


↳ auch die Wand bringt Kraft auf!
gleiche Spannung
ohne Bewegung!

Beispiel: Kraft durch Spannung und Masse

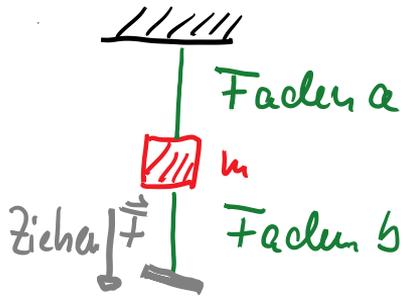


• zusätzliche Gewichtskraft hat keinen Einfluss auf gemessene Kraft!
? ?



Spannung = Kraft

Beispiel: Masse an Faden



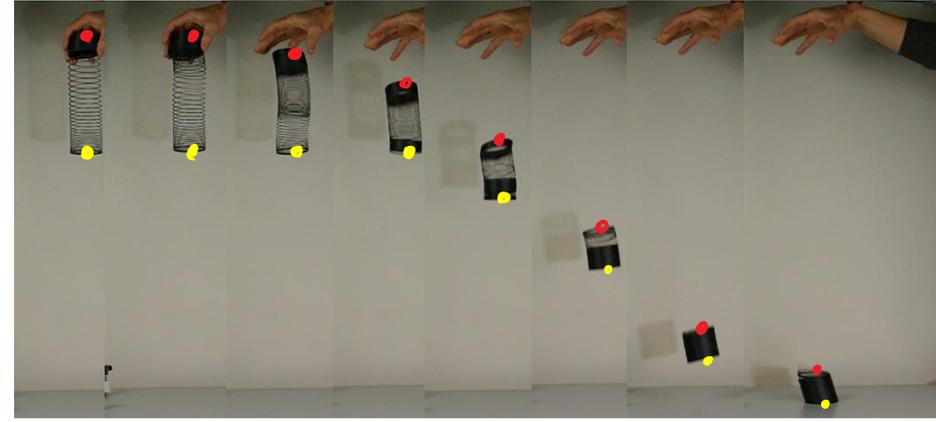
Welcher Faden reißt, wenn nach unten gezogen wird mit F ?



! Trägheit der Masse !

- Schnelles Reißen: große Kraft
Trägheit der Masse dämpft die Übertragung auf oberen Faden
→ unterer Faden reißt
- langsames Ziehen: Zugkraft und Gewichtskraft addieren sich
→ große Kraft im oberen Faden, der daher reißt

Beispiel: Freier Fall einer Feder



zeit ↗

• Bewegung wird durch innere Federkraft und äußere Gravitation bestimmt



- innere Federkraft abhängig von der Position in der Feder
↳ unterschiedliche Teile der Feder haben unterschiedliche Fallgeschwindigkeiten

Definition: mechanische Arbeit
 Wenn eine konstante Kraft \vec{F} eine Masse m um eine Strecke $\Delta \vec{x}$ verschiebt, so führt sie ihr die Arbeit

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} \quad \text{zu,}$$

allgemein: $W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{x}_i$

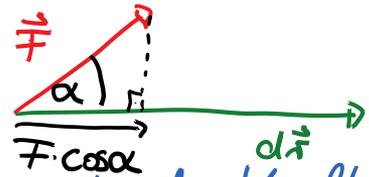
bzw. $W = \int \vec{F} d\vec{x}$ Arbeit ist das Wegintegral der Kraft

Einheit $[W] = [F] \cdot [x] = 1\text{N} \cdot \text{m} = 1\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1\text{J}$ (Joule)

• Arbeit wird durch Kraft aufgebracht

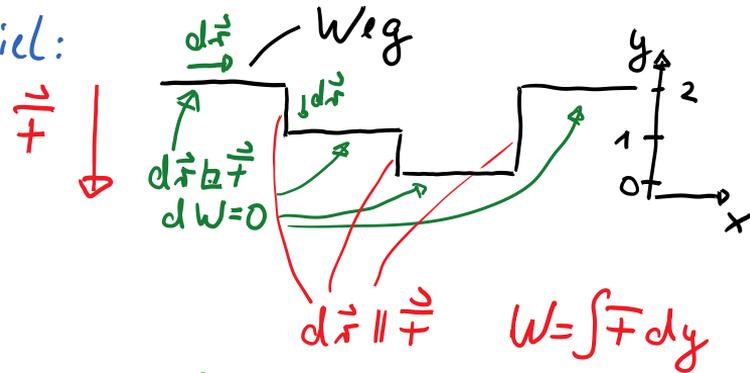
• W ist Skalar (Skalarprodukt)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x} = F \cdot dx \cdot \cos \alpha$$

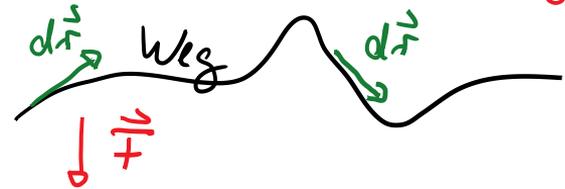


↳ nur die Komponente der Kraft entlang des Weges trägt bei

Beispiel:

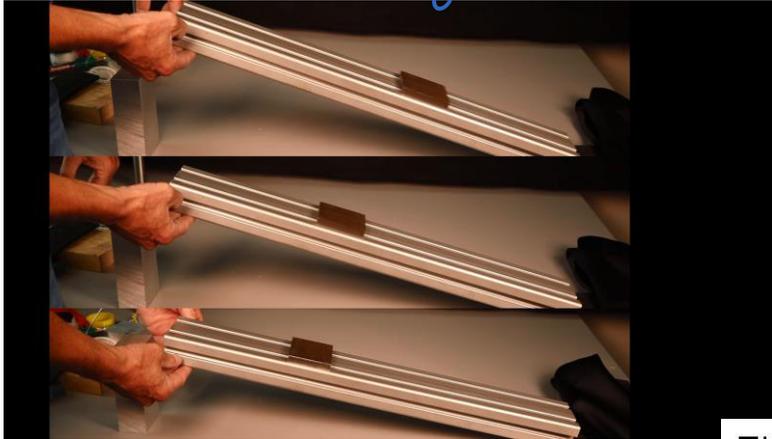


allgemein:



Beispiel: Gleiten auf schiefer Ebene:

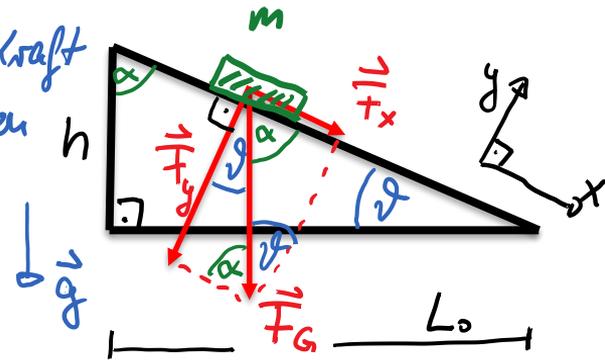
Beobachtung: die Steigung der Ebene bestimmt Geschwindigkeit und Beschl. \vec{a}



Annahme: ohne Reibung

- Komponente der Gewichtskraft $\vec{F}_x = m \cdot \vec{g}$ entlang der Ebene $\rightarrow \vec{a}$

Zerlegung der Kraft in Komponenten

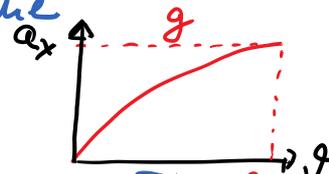


$$\hookrightarrow \vec{F}_y = \vec{F}_G \cdot \cos \vartheta \rightarrow \text{drückt } m \text{ auf Ebene}$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_x = \vec{F}_G \cdot \sin \vartheta = m \cdot g \cdot \sin \vartheta$$

Beschl. entlang der Ebene

$$a_x = \frac{\vec{F}_x}{m} = g \cdot \sin \vartheta$$



- Arbeit beim Schieben entlang der Ebene $\vec{F} \cdot \vec{s}$

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int \vec{F}_x \cdot dx \\ &= \int_{\text{Höhe}} m g \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{dh}{\sin \vartheta} \\ &= \int_{\text{Höhe}} m g \cdot dh = m \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

$$\sin \vartheta = \frac{dh}{dx}$$

unabhängig von ϑ !

Beispiel: Arbeit beim Treppensteigen

$$h = 16 \text{ m}$$

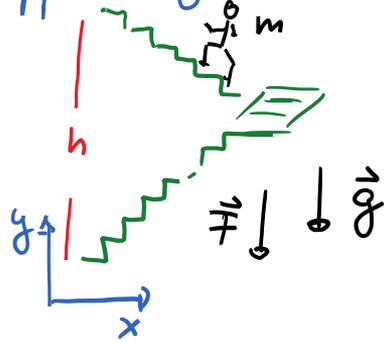
$$m = 75 \text{ kg}$$

$$W = \int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

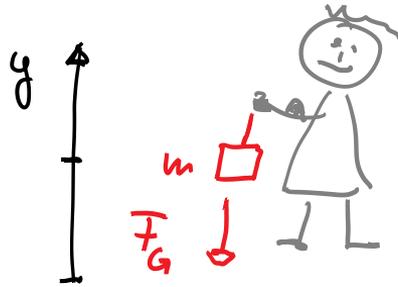
$$= \int_0^h m \cdot g \cdot dy$$

$$= m g \cdot y \Big|_0^h = m \cdot g h$$

$$= 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16 \text{ m} \approx 12000 \text{ Nm} \\ = 12 \text{ kJ}$$



Beispiel: Halten einer Kasse



ohne Bewegung $\rightarrow \Delta \vec{r} = \Delta y = 0$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

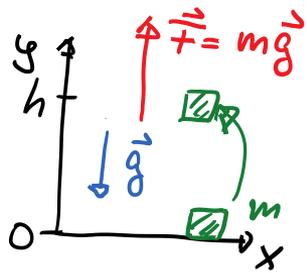
im physikalischen Sinn wird keine Arbeit verrichtet

- diese Arbeit muß beim Heben verrichtet werden (der Körper verliert Energie)

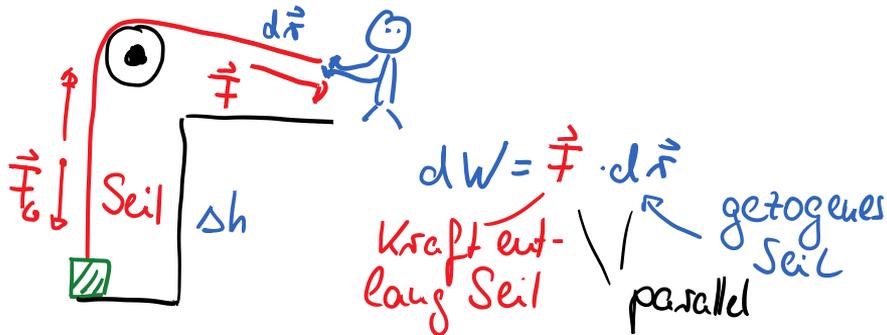
Beispiel: Hubarbeit
mit $g = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Heben um Höhe $\Delta y = h$

$$W = \int_0^h \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h m \cdot g \cdot dy = m \cdot g \cdot h$$

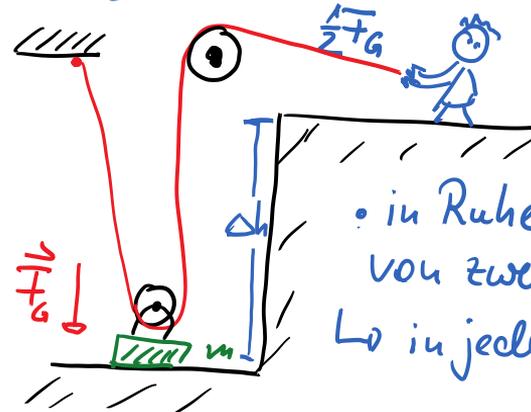


• Heben mit Seil über Rolle



$$\hookrightarrow W = \int_{\text{Seil}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta h$$

• Heben mit Seilwinde



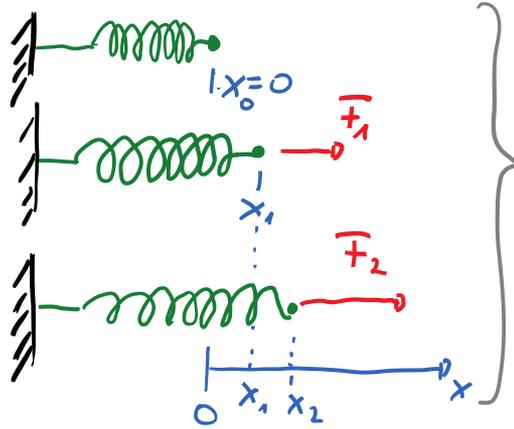
• in Ruhe: Masse wird von zwei Seiten gehalten
 \hookrightarrow in jedem Seil $F = \frac{1}{2} F_g = \frac{1}{2} m \cdot g$

beim Heben um Δh : Seil muß um $\Delta s = 2\Delta h$ gezogen werden.

$$\begin{aligned} \text{Arbeit } W &= \int_{\Delta h} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{\Delta s} \frac{1}{2} F_g \cdot dr = \frac{1}{2} F_g \cdot 2\Delta h = F_g \cdot \Delta h \end{aligned}$$

\rightarrow Arbeit ist gleich! ... Kraft halbiert, Strecke verdoppelt!

Arbeit beim Spannen einer Feder:



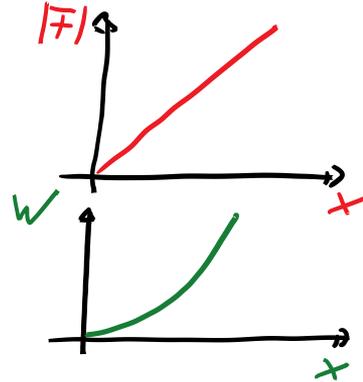
Experiment:
für viele Federn
gilt
 $\bar{F} \sim x$

→ äußere Kraft: $F \sim x$
bzw. rückstellende Kraft der Feder:

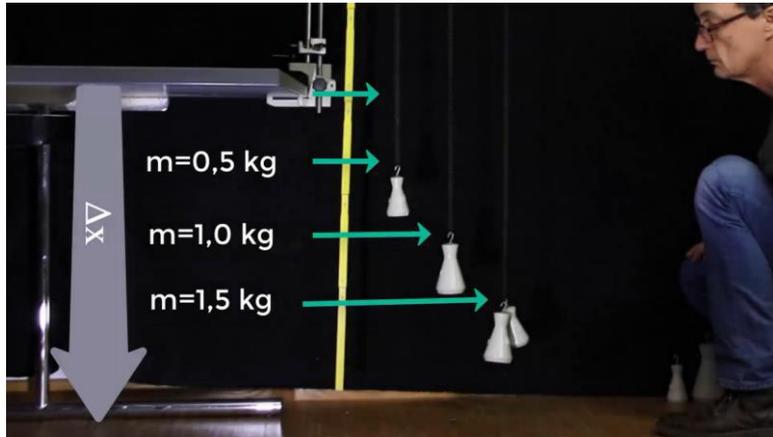
$$\bar{F} \sim -x \quad \text{rückstellend}$$

↳ $\bar{F} = -Dx$ Hook'sches Gesetz
mit der Federkonstante D

$$\begin{aligned} \text{Arbeit } W &= \int_0^x \bar{F} dx \\ &= \int_0^x -Dx dx \\ &= -\frac{1}{2} D x^2 \end{aligned}$$



- Hook'sche Gesetz gilt in guter Näherung für Ziehen und Stauchen der Feder
- harmonische Schwingungen



Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl



6. Energie und Leistung

bisher:

- Masse m , Kraft \vec{F}

↳ Kraft: $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

- Kraft und Wegänderung

↳ Arbeit: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ wird verrichtet

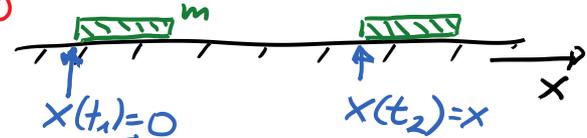
- $\vec{a} \rightarrow$ Geschwindigkeitsänderung

↳ die Arbeit muß in der Masse enthalten sein

→ kinetische Energie / Bewegungsenergie

Modell: \vec{F} sei konstant in x -Richtung
Masse m wird beschleunigt

am Anfang: $v(t_1) = v_0 = 0$ $v(t_2) = v$



$$\begin{aligned} \text{Arbeit } W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \vec{F} \cdot dx \\ &= F \cdot (x(t_2) - x(t_1)) = \vec{F} \cdot x \end{aligned}$$

mit $\vec{F} = m \cdot a \rightarrow a = \frac{\vec{F}}{m}$ ist konstant

→ $x = \frac{1}{2} a t^2$ & $v = a \cdot t$

und daher

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot x = m \cdot a \cdot x = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} m a^2 t^2 \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}$$

- die Arbeit ist nach der Beschleunigung als kinetische Energie in der Masse:

$$E_{\text{kin}} = W = \frac{1}{2} m v^2$$

- E_{kin} ist immer positiv! (da $\sim v^2$)
- in der Herleitung wurde eine konstante Kraft verwendet

Allgemeine Herleitung für E_{kin} :

- \vec{F} muß nicht konstant sein

$$\text{Ansatz: } \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad | \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= m \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \cdot \vec{v}^2 \right)$$

$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{Arbeit auf Wegelement } d\vec{r}$

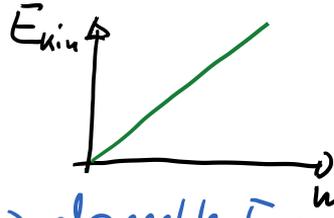
\hookrightarrow also muß diese Arbeit $\frac{1}{2} m v^2$ sein!

kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

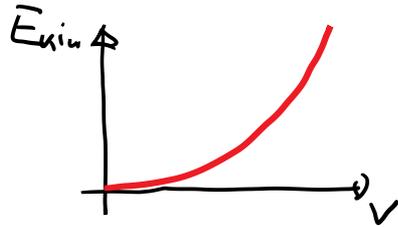
$$E_{\text{kin}} \sim m$$

„doppelte Masse \rightarrow doppelte Energie“



$$E_{\text{kin}} \sim v^2$$

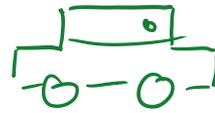
„doppelte Geschwindigkeit \rightarrow vierfache Energie“



Beispiel: zwei Autos mit



$$m_1 = 1000 \text{ kg}, v_1 = 200 \text{ km/h} = 56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$m_2 = 2000 \text{ kg}, v_2 = 100 \text{ km/h} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_{\text{kin}1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} 1000 \text{ kg} \cdot 56^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1,57 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$E_{\text{kin}2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 0,784 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$E_{\text{kin}1} / E_{\text{kin}2} = 2 !$$

beim Bremsen muss diese Energie aufgenommen werden durch Reibung; im leichteren, schnelleren Auto müssen die Bremsen besser sein

Beispiel: Ziehen eines Schlittens mit konstanter Kraft $F=12\text{ N}$ für Weg $x=3\text{ m}$; Masse sei 5 kg und die Kraft greife unter $\alpha=30^\circ$ an.
 gesucht: kinetische Energie & v



Annahme: reibungsfrei

Ansatz: Kraft für Bewegung: $F_x = F \cdot \cos \alpha$

- verrichtete Arbeit $W = F_x \cdot x = x \cdot F \cdot \cos \alpha$

- $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = W = x \cdot F \cdot \cos \alpha$
 $= 31,2 \text{ J}$

und

Endgeschw. $v = \sqrt{\frac{2 E_{\text{kin}}}{m}} = 3,53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

andere Ansatz: da F konstant ist, ist auch Beschl. a konstant

$$- a = \frac{F_x}{m} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{m} = 2,08 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$- \text{aus } x = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

$$\text{und } v = a \cdot t = a \cdot \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{2xa} = 3,53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

! gleiches Ergebnis !

Abschätzung: Wenn die in 250g Butter enthaltene Energie vollständig in mechanische Arbeit umgewandelt werden könnte:

a) Welche Höhe könnte erreicht werden?

b) Welche Geschwindigkeit?

Annahme: $m = 75 \text{ kg}$

Laut Packung:

$$E = W \approx 3000 \text{ kJ} / 100 \text{ g} \cdot 250 \text{ g} \\ = 7500 \text{ kJ}$$



a) damit kann eine Höhe

$$h = \frac{E}{m \cdot g} = \frac{7500 \text{ kJ}}{75 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1,033 \cdot 10^4 \text{ m} \approx 10 \text{ km}$$

erreicht werden.

- also auf den Mount Everest!

$$b) E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = E$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{7500 \text{ kJ}}{2 \cdot 75 \text{ kg}}} = 224 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 805 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Fehler: Annahme ist falsch

- vollständig Energieumwandlung, keine Reibung, keine Wärmeenergie, etc.

• Arbeit $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$: unabhängig von der Zeitdauer

Bezug zur Zeit während der Arbeit

↳

Definition: die Leistung P ist die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$\text{Einheit: } [P] = [W] / [t] = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W (Watt)}$$

Achtung: W ist Einheit von P und die Abkürzung für Arbeit

(P - englisch: „power“; W - „work“)

Arbeit/Energie kann auch in Einheiten von Wh (Wattstunden) angegeben werden

Beispiel: Leistung beim Kniebeugen
Heben einer Masse $m = 75 \text{ kg}$ um $0,7 \text{ m}$
in $\frac{1}{2} \text{ s}$

↳ Arbeit $W = m \cdot g \cdot h$

$$= 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,7 \text{ m} = 515 \text{ J}$$

Leistung $P = \frac{dW}{dt}$

$$= \frac{W}{\Delta t}$$

$$= \frac{515 \text{ J}}{0,5} = 1030 \text{ W}$$

← Betrachtung der Änderungen!

Vergleich:

mechanische Leistung: E-Fahrrad
 $P \approx 200 - 400 \text{ W}$

Einheit: $1 \text{ kW} = 1,36 \text{ PS}$ (Pferdestärken)

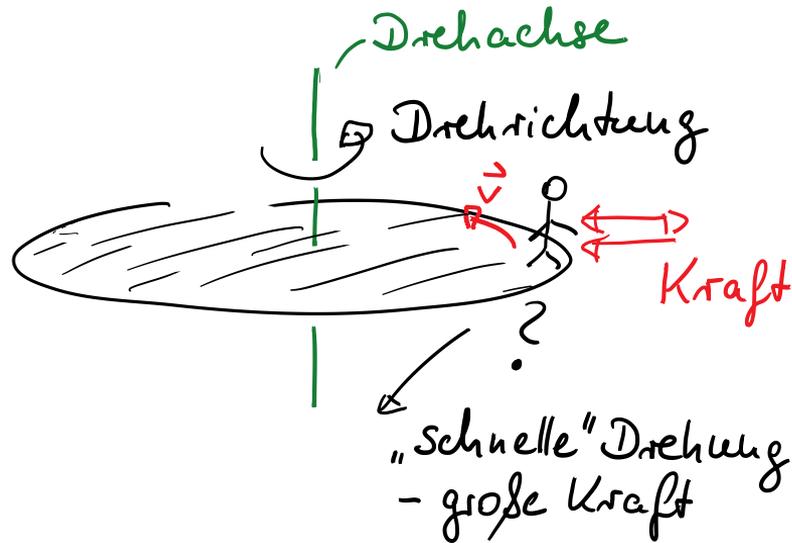
Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

7. Gleichförmige
Kreisbewegungen

Gleichförmige Kreisbewegung

- Alltag:
- Fahrt im Bus / Auto um eine Kurve
→ Kraft „nach außen“
 - Karussell

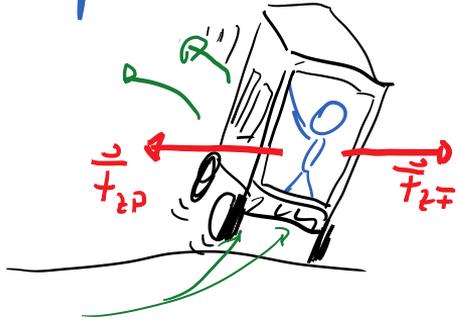


- Kraft \vec{F} → Beschleunigung $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$
tritt auf
- Wovon hängt \vec{F} bzw. \vec{a} ab?

Ziel Beschreibung der bei Kreisbewegung auftretenden Kräfte durch Drehung, Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit

Gleichförmige Kreisbewegung:

Beispiel: Bus in Kurve



Zentrifugalkraft
scheint nach
außen zu ziehen

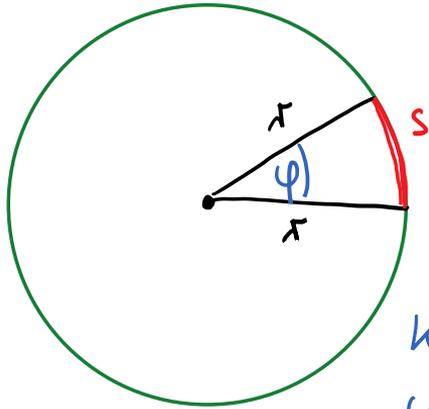
Zentripetalkraft \vec{F}_{ZP}
zieht auf das Zentrum

Beispiel: drehende Wunderkerze



↳ Funken bewegen sich tangential
und nicht radial!

Definition eines Winkels φ :



Kreis mit Radius r
Winkel $\varphi = \frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Radius}}$

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Vollwinkel φ_v , wenn
Kreisbogen = Kreisumfang

$$\varphi_v = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

Einheit $[\varphi] = 1 \text{ rad}$
(Radian)

$$(360^\circ \cong 2\pi \text{ rad})$$

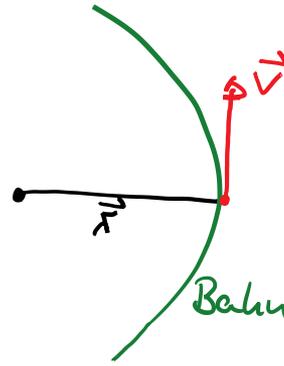
Definition der Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$[\omega] = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



"omega" (nicht ω)



• Bewegung auf Kreisbahn mit Bahngeschwindigkeit v :

wenn v konstant ist:

→ gleichförmige Kreisbewegung

$$\hookrightarrow s = v \cdot t$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{s}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v \cdot t}{r} \right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{\omega = \frac{v}{r}}$$

$$\text{mit } v = \frac{\text{Kreisumfang}}{\text{Umlaufzeit}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\hookrightarrow \omega = \frac{2\pi r}{T \cdot r} = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \cdot \nu$$

$$\text{mit der Frequenz } \nu = \frac{1}{T} \quad [\nu] = 1 \frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ Hz} \quad (\text{Hertz})$$

"nü"

Beschleunigung und Kraft bei gleichförmiger Kreisbewegung:

- gleichförmig: $v = |\vec{v}|$ ist konstant aber die Richtung ändert sich!

↳ Beschleunigung $\vec{a} \perp \vec{v}$

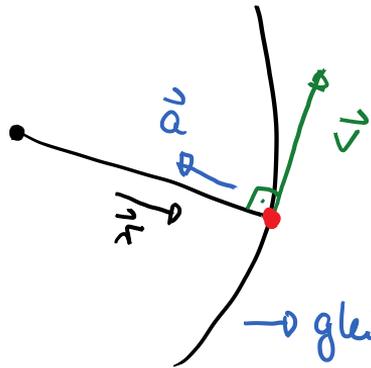
und da \vec{v} tangential, also $\vec{v} \perp \vec{r}$

↳ $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{m}$ entlang \vec{r}

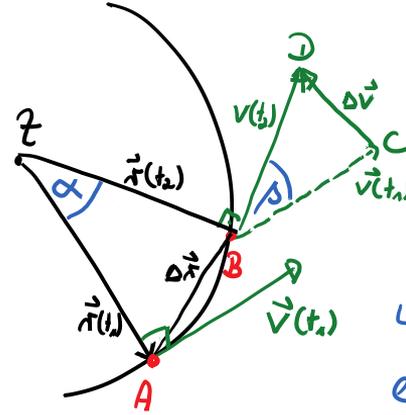
- eine Kraft $\vec{F} = m\vec{a}$ ist notwendig, um die Masse m auf der Kreisbahn zu halten.

Ohne Kraft: Trägheit

→ gleichmäßig geradlinige Beweg.



gesucht: Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt}$
in Abhängigkeit von ω, r, v



dazu Betrachtung von zwei Punkten A & B auf Kreis zu Zeiten t_1 & t_2
 $\vec{v}(t_1) \perp \vec{r}(t_1)$ & $\vec{v}(t_2) \perp \vec{r}(t_2)$

↳ gleichschenklige Dreiecke $\triangle TAB$ & $\triangle BCD$

↳ $\alpha = \beta$

↳ $\frac{\Delta \vec{r}}{r} = \frac{AB}{r} = \frac{CD}{v} = \frac{\Delta v}{v} \quad | : \Delta t = t_2 - t_1$

$\frac{1}{r} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{v} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad | \Delta t \text{ klein} \rightarrow \Delta r \rightarrow dr \rightarrow \Delta v \rightarrow dv$

$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \cdot v = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v} \cdot a$

↳ $a = \frac{v^2}{r}$

→ bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist die Beschleunigung

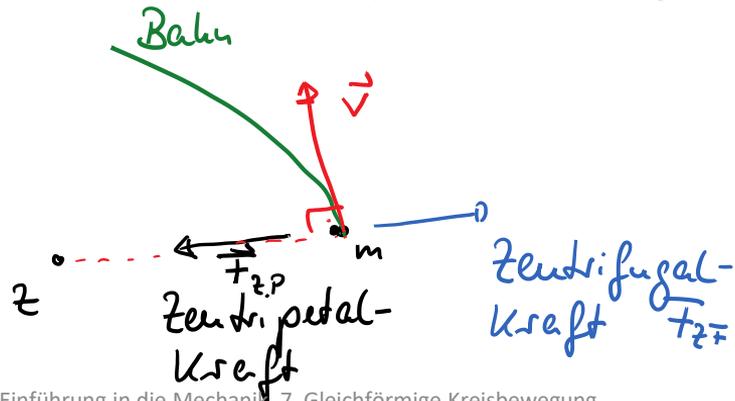
$$\boxed{a = \frac{v^2}{r} = r \omega^2 \quad \text{mit } \omega = \frac{v}{r}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{v}; \quad \vec{a} \parallel \vec{r}$$

→ die Kraft auf eine Masse m , die sich auf einer Kreisbahn bewegt, ist

$$\vec{F} = m \cdot a = m \frac{v^2}{r} = m r \omega^2$$

Sie wird Zentripetalkraft genannt.

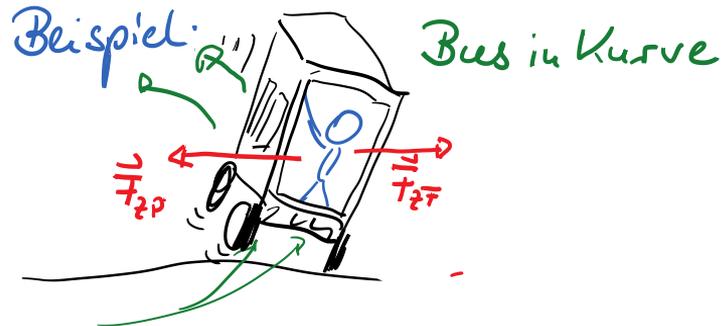


- Trägheit der Masse erfordert die Zentripetalkraft, um die Bewegungsrichtung zu ändern

- im sich drehenden Bezugssystem: es scheint eine Kraft nach außen zu wirken, die Zentrifugalkraft:

$$|\vec{F}_{zp}| = |\vec{F}_{zf}|$$

F_{zf} ist eine Scheinkraft, die nur in dem sich drehenden Bezugssystem auftritt.



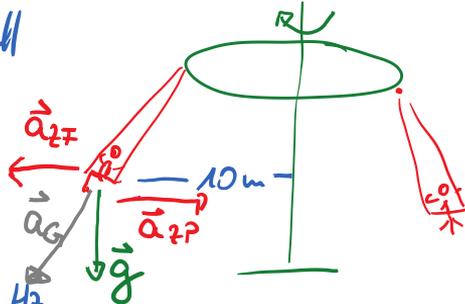
Beispiel: Autofahrt mit $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in
Kurve mit Radius $r = 100 \text{ m}$

$$\hookrightarrow a = \frac{v^2}{r} = \frac{(100 \text{ km/h})^2}{100 \text{ m}} \approx \frac{(28 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}} \approx 7,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

d.h. ca. 20% kleiner als $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Beispiel: Karussell

$$T = 8 \text{ s}$$



$$\hookrightarrow \omega = 2\pi \frac{1}{T} = \frac{1}{4} \pi \text{ Hz}$$

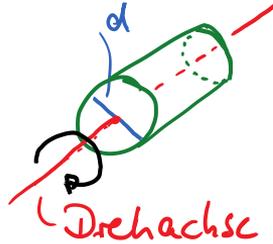
$$a_{zP} = r \cdot \omega^2 = 10 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{4} \pi \text{ Hz}\right)^2 = 6,17 \text{ m/s}^2 \quad (\text{Zentripetal} = \text{Zentri-} \\ \text{fugal})$$

$$\text{Gesamtbeschleunigung } \vec{a}_G = \vec{a}_{zP} + \vec{g}$$



Beispiel: Kräfte in einem rotierendem Stahlteil

- Bahngeschwindigkeit sollte $v = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nicht überschreiten, da sonst die Zentrifugalkraft zum Reißen führen kann.



gesucht: maximale Drehfrequenz, wenn $d = 1 \text{ cm}$

$$\text{Ansatz: } \omega = \frac{v}{r} \quad ; \quad \omega = 2\pi \nu = 2\pi \frac{1}{T}$$
$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\hookrightarrow \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{v}{\pi \cdot d} \quad d = 2r$$

$$\text{hier: } \nu_{\max} = \frac{100 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\pi \cdot 1 \text{ cm}} = \frac{100 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\pi \cdot 10^{-2} \text{ m}} \approx 3200 \frac{1}{\text{s}} = 3200 \text{ Hz}$$
$$= 1,9 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{min}}$$

Abhängigkeit der Zentripetalbeschl.
von r , ω & v

$$a = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$$

• gleiches ω , r unterschiedlich



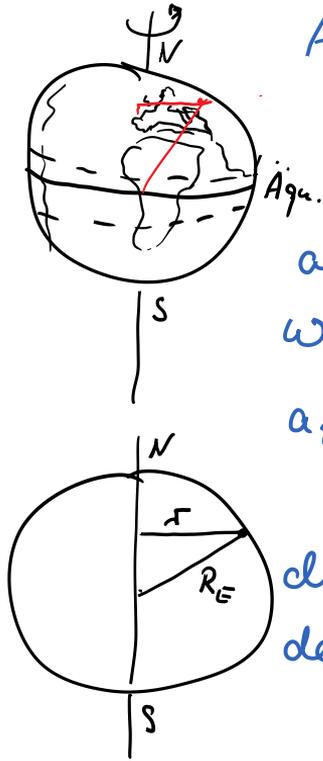
Rotation: fallende Münzen
- Richtung der Bewegung
tangential! ∇



- Reibung hält die Masse auf Fläche
wenn r groß $\rightarrow a$ groß \rightarrow Gleiten



Beispiel Erdrotation: Wie groß ist die Zentripetal-Kraft?



Ansatz: $a_z = r \omega^2$

Radius zur Drehachse, nicht Erdschwermesser R_E
 am Äquator: $r = R_E = 6370 \text{ km}$

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}}$$

$$a_z = R_E \cdot \omega^2 = 6370 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot (7,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}})^2 = 0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

dies entspricht $\frac{a_z}{g} = \frac{0,034}{9,81} \approx 0,34\%$ der Erdbeschleunigung

- um diesen relativen Teil erscheint eine Masse am Äquator „leichter“
- anderer Breitengrade: r ist kleiner, ω gleich
 \rightarrow geringere Zentripetalbeschleunigung

\hookrightarrow Anwendung: Raketenzentren werden möglichst in Äquatarnähe gebaut

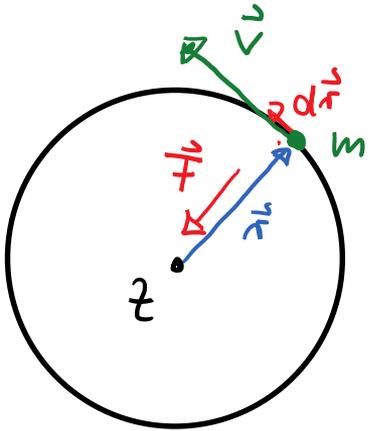
Warum wurde nicht der Ansatz $a_z = \frac{v^2}{r}$ gewählt?

Bahngeschwindigkeit v ist abhängig von r und müsste jeweils berechnet werden.

$$v \text{ am Äquator: } v_A = \frac{2\pi R_E}{T} = \frac{2\pi \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}{84000 \text{ s}} \approx 480 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1700 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Arbeit während einer gleichförmigen Kreisbewegung

z. B. Masse m an Faden



Kreisbahn

$$\hookrightarrow d\vec{r} \perp \vec{r}$$

$$\hookrightarrow \vec{F} \parallel \vec{r}$$

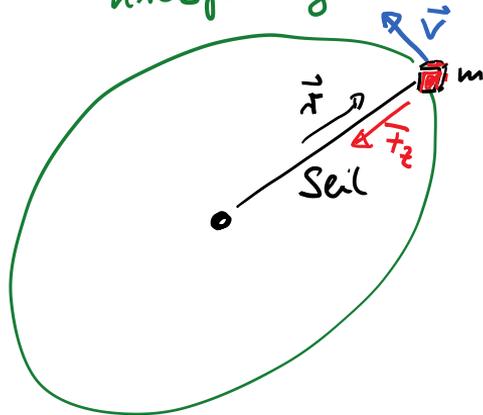
und damit $\vec{F} \perp d\vec{r}$,
also $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$$\hookrightarrow W = \int_{\text{Kreis}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Bei einer (reibungslösen) Kreisbewegung wird keine Arbeit verrichtet?

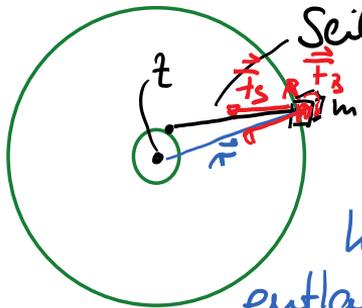
Beispiel: Wie dreht sich ein geschwungenes Seil?

Kreisförmige Bahn

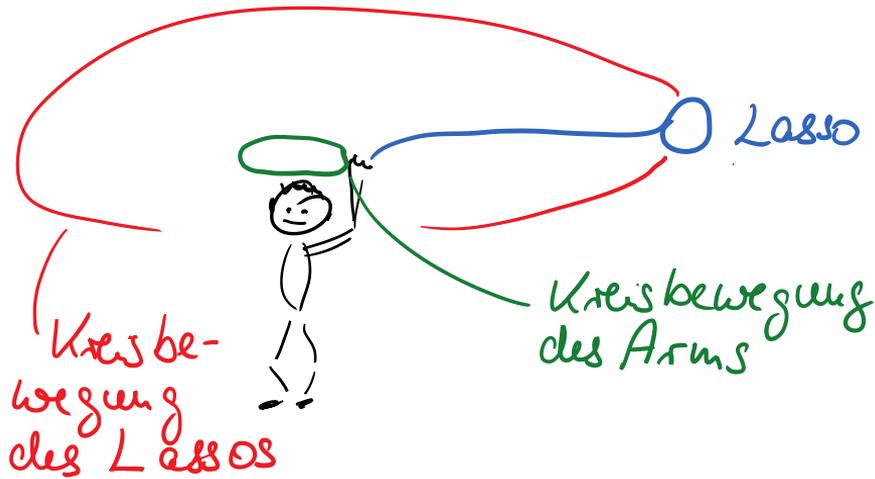


Kreisbahn um Zentrum z :
 $\left. \begin{matrix} \vec{v} \perp \vec{r} \\ \vec{v} \perp \vec{F} \end{matrix} \right\} |\vec{v}| = \text{const}$

Wie wird ein Seil beschleunigt?



Seil auf Kreis um Zentrum
 Kraft \vec{F}_s mit Komponente \vec{F}_B entlang Bahn \rightarrow Beschl.



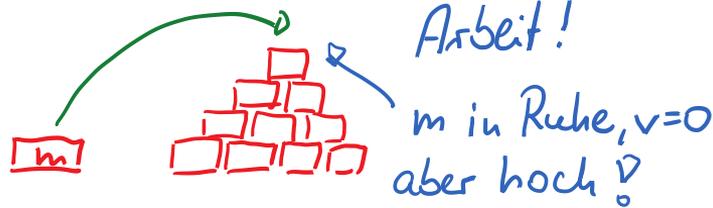
Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

8. Potentielle Energie und Energieerhaltung

bisher: Kraft \rightarrow Arbeit $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$
 \rightarrow kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

Alltag: Heben einer Masse

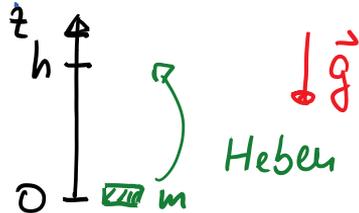


\rightarrow Energie steckt in der Lage der Masse (potentielle Energie)

Potentielle Energie einer Masse m:

- auf Erdoberfläche:

$$a = g$$
$$F = m \cdot g$$



$$\text{Arbeit } W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot g \cdot d$$

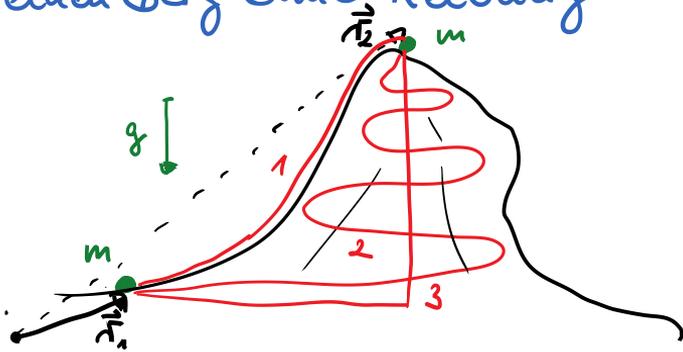
Allgemein: die potentielle Energie ist definiert als

$$E_{pot} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Minus! wenn $d\vec{r}$ entgegen \vec{F} steht, so wächst E_{pot}

- Arbeit wird verrichtet
 $\rightarrow E_{pot}$ vergrößert
- nur Änderungen von E_{pot} bei Änderung der Lage ($\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$)

Beispiel: Tragen einer Masse auf einen Berg ohne Reibung



- auf allen Wegen (1,2,3) wird die gleiche Arbeit verrichtet, wenn Anfangs- und Endpunkte (\vec{r}_1, \vec{r}_2) gleich sind, sofern keine Reibung vorhanden

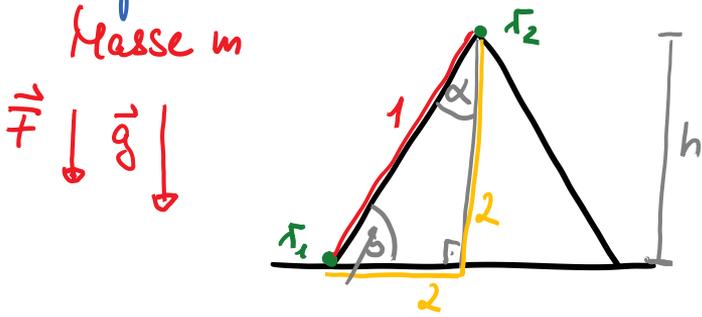
↳ geschlossener Weg (Anfang = Endpunkt)
→ keine Arbeit wird verrichtet

- Kräfte mit dieser Eigenschaft werden konservativ genannt

- Gravitation ist ein konservatives Kraftfeld
- Reibung: nicht-konservativ sondern dissipativ; Energie wird in Wärme umgewandelt
- formale Beschreibung für eine konservative Kraft:

$$\int_{\text{Weg 1}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\text{Weg 2}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Beispiel: Heben von m von r_1 nach r_2



Arbeit für Weg 1:

$$\text{Weg 1} = x_1 = \frac{h}{\cos \alpha}$$

Kraft entlang Weg 1 $\vec{F}_1 = m g_1$

$$= m g \cdot \cos \alpha$$



$$W_1 = \int \vec{F}_1 dx_1 = \vec{F}_1 \cdot x_1$$

$$= m g \cdot \cos \alpha \cdot h / \cos \alpha = m \cdot g \cdot h$$

Arbeit für Weg 2:

$$W_2 = \int_{\text{Weg 2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{2a}^{\vec{F}} \cdot d\vec{r} + \int_{2b}^{\vec{F}} \cdot d\vec{r} = \int_{2c}^{\vec{F}} \cdot d\vec{r} = mgh$$

$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow 0$ $\vec{F} \parallel d\vec{r}$

Beispiel: Bergsteigen

- Umwandlung von chemischer Energie in mechanische Energie
 - Energieverlust durch Reibung und Wärme
- real: dissipativ

Anmerkung:

$$E_{\text{pot}} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

\vec{F} kann von r abhängen !

Gravitation $\vec{F}_G \sim \frac{1}{r^2}$

↳ späteres Kapitel

Energieerhaltungssatz der Mechanik:

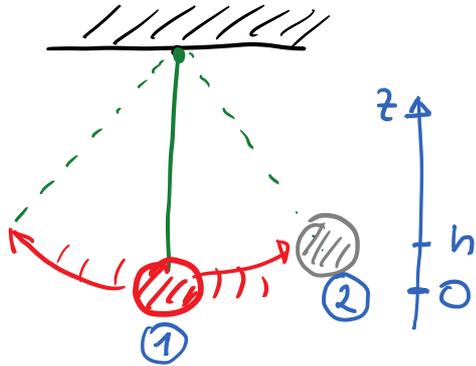
In einem konservativem Kraftfeld, d.h. ohne Reibung, ist die Summe von kinetischer und potentieller Energie zeitlich konstant, die Gesamtenergie bleibt erhalten

$$\bar{E}_G = \bar{E}_{kin} + \bar{E}_{pot} = \text{const.}$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{E}_{kin} + \bar{E}_{pot}) = 0$$

- zentrale Aussage der Mechanik
- gilt auch unter Einfluß von Wärmeenergie (Reibung)

Beispiel: Energieerhaltung beim Pendel



- Schwingen \rightarrow Wechsel zwischen potentieller und kinetischer Energie

$$\textcircled{1} \quad E_{\text{kin,max}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 \quad z=0 \quad E_{\text{pot}}=0$$

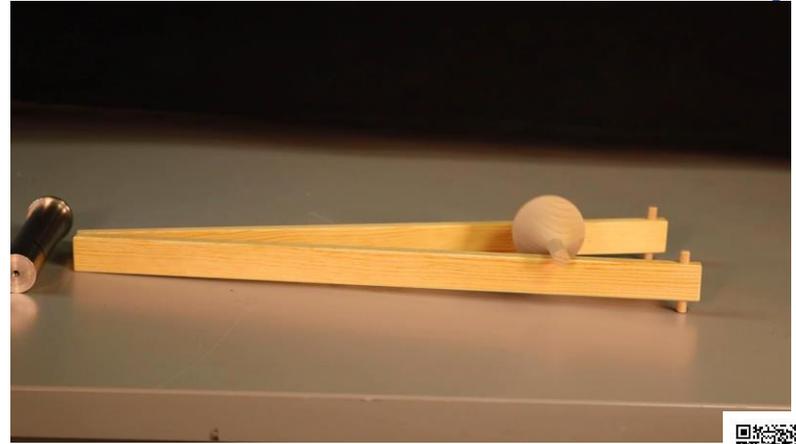
$$\textcircled{2} \quad v=0; \quad E_{\text{kin}}=0 \quad E_{\text{pot,max}} = m \cdot g \cdot h$$

ohne Reibung: $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant}$

\hookrightarrow Schwingung

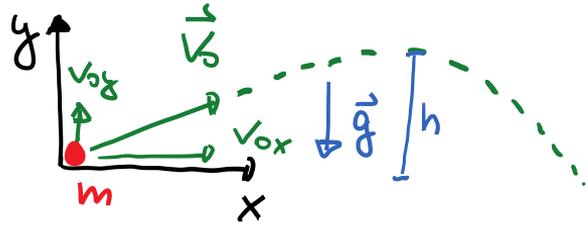
Beispiel: Rollen auf schiefer Ebene

- Zylinder
- Konischer Körper



- jeder Körper nimmt den Zustand der geringsten potentiellen Energie an
- \leftrightarrow Kraft nach unten

Beispiel: Schräger Wurf



• kin. Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2$
 $= \frac{1}{2} m (v_{0x}^2 + v_{0y}^2)$

Zerlegung in Komponenten

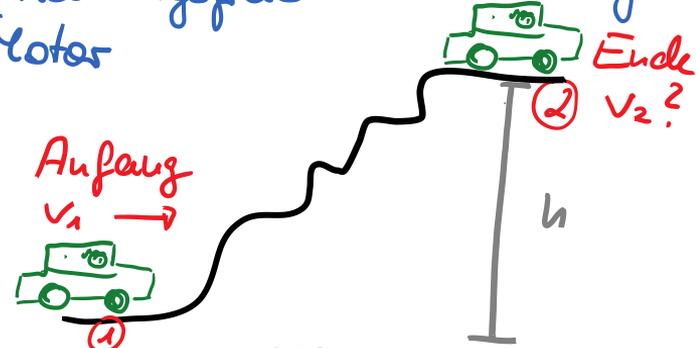
• Flughöhe ergibt sich aus

$$\frac{1}{2} m v_{0y}^2 = m g h_{max}$$

kinet. Energie
am Anfang

pot. Energie
im Maximum

Beispiel: Reibungsfreie Fahrt an Hügel ohne Motor



gesucht: v_2 auf dem Hügel

Ausatz: Energieerhaltung

$$\underbrace{E_{kin1} + E_{pot1}}_{\text{Anfang}} = \underbrace{E_{kin2} + E_{pot2}}_{\text{Ende}}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 \stackrel{0}{=} = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h$$

$\hookrightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gh}$ unabh. von m !
 Weg muß nicht bekannt sein!

Anderer Ansatz über Arbeit = $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ - schwieriger

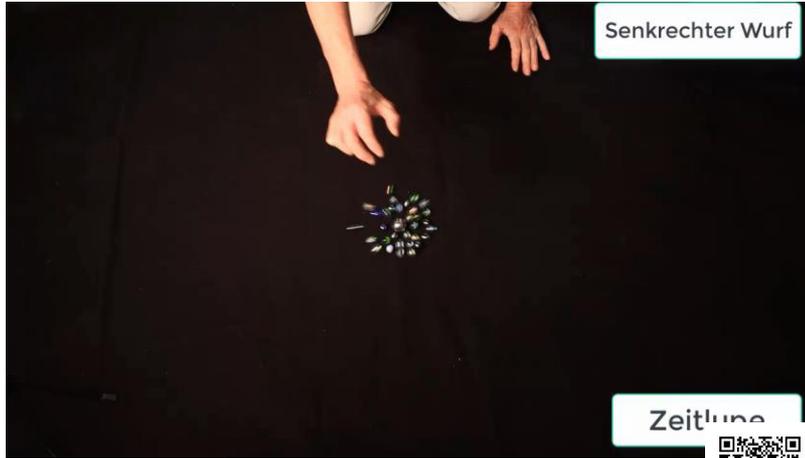
Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

9. Der Impuls, Impulserhaltung,
Schwerpunkt und Stöße

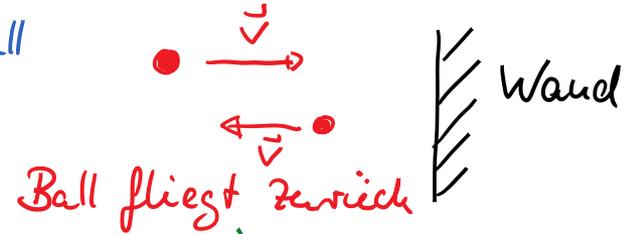
Alltag: Stoß von Kugeln

Billiardkugeln



Wurf gegen Wand

- Gummiball

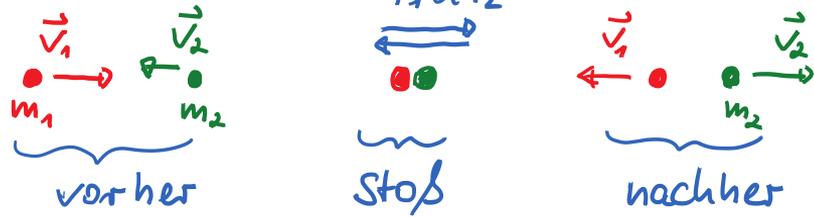


- Knete



- Beschreibung der Stöße durch Impuls
- keine Betrachtung des genauen Stoßvorgangs, sondern nur der Bewegungen / Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß

Allgemein: Stoß zwischen zwei Massen



- beim Stoß wirken Kräfte
 - von m_1 auf m_2 : \vec{F}_2
 - von m_2 auf m_1 : \vec{F}_1
- Actio = Reactio (Newton'sches Axiom)
 - $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ entgegengesetzt
 - $m_1 \cdot \vec{a}_1 = -m_2 \cdot \vec{a}_2$
 - $m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 = 0$
 - $m_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_1 + m_2 \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_2 = 0$
 - $\frac{d}{dt} (m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2) = 0$

- wenn sich eine Größe zeitlich nicht ändert, so muß sie konstant sein

$$\hookrightarrow m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = \text{constant}$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{Impuls } p_1 \text{ von } m_1} + \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{Impuls } p_2 \text{ von } m_2}$

- die Summe der Impulse bleibt bei einem Stoß gleich

- Definition: der Impuls \vec{p} einer Masse m ist $\vec{p} = m \vec{v}$
- Gesamtimpuls bei vielen Massen m_i

$$\vec{p}_G = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

Impulssatz: in einem abgeschlossenen System von Massepunkten ist der Gesamtimpuls \vec{p}_G zeitlich konstant, ändert sich also nicht:

$$\vec{p}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{p}_G}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right) = 0$$

Der Impuls ist eine Erhaltungsgröße

- Impuls ist Vektor
- Einheit $[p] = [m \cdot v] = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Darstellung von kin. Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad \& \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\hookrightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}$$

- Impulserhaltung gilt, wenn keine äußere Kraft wirkt, die Summe aller Kräfte = 0

• Impulserhaltung: zentrale Aussage der Physik, gleicher Stellenwert wie Energieerhaltung

Schwerpunkt / Massenmittelpunkt:

Definition: der Schwerpunkt \vec{r}_S ist

- für zwei Massen $\vec{r}_S = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$

- für viele Massen $\vec{r}_S = \frac{1}{m_G} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i$

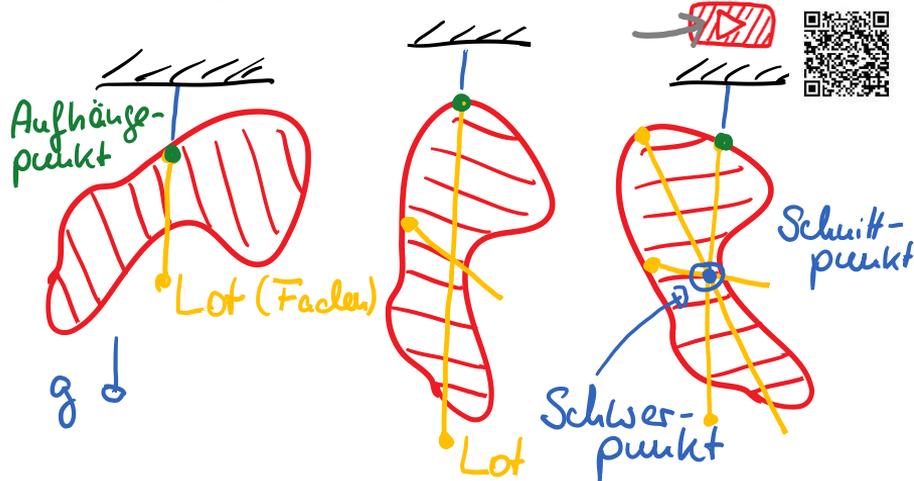
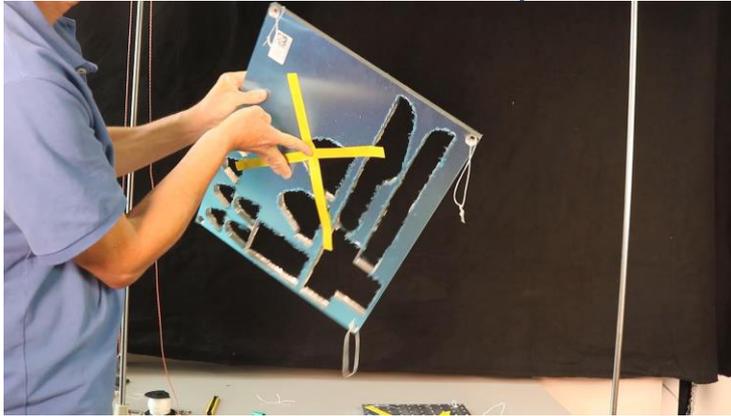
Gesamtmasse $m_G = \sum_i m_i$ ↑
i-te Masse

- allgemein $\vec{r}_S = \frac{1}{m_G} \int \vec{r} \cdot dm$

$m_G = \int dm$ ↑
Integral über dm ↑
Massen-
element

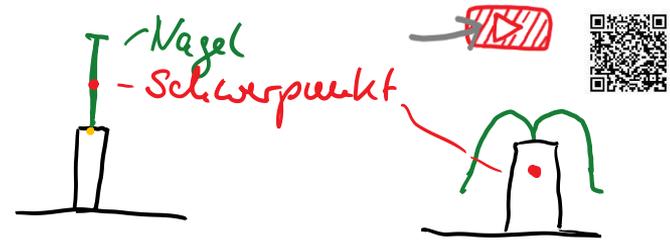
- Berechnung von $\vec{r}_S \rightarrow$ Aufgaben

Experimentelle Bestimmung des Schwerpunkts



Stabiles Gleichgewicht

- Schwerpunkt ist niedriger als Auflagepunkt



Zusammenhang von Schwerpunkt
und Impuls:

$$\text{für Massen } m_i: \vec{r}_S = \frac{1}{\sum_i m_i} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\begin{aligned} \text{Geschw. des} \\ \text{Schwerpunkts: } \vec{v}_S &= \frac{d}{dt} \vec{r}_S = \frac{1}{\sum_i m_i} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \\ &= \frac{1}{\sum_i m_i} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i \\ &= \frac{1}{\sum_i m_i} \cdot \sum_i \vec{p}_i \end{aligned}$$

im abgeschlossenen System: Impulserhaltung

$$\rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{v}_S = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} \vec{v}_S = 0$$

Der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig
und gleichmäßig mit konstanter
Geschwindigkeit

Beispiel: Feuerwerk

Massteilchen
in alle Richtungen

Schwerpunkt-
bewegung



Beispiel: Zerfall eines Atomkerns

Atomkern

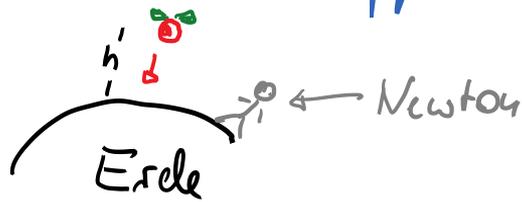
Emission eines Teilchens (z.B. Photon)

Schwerpunkt
bleibt



\vec{v}_S
z.B. Photon

Beispiel: Fallender Apfel



$$\vec{F}_{\text{Apfel}} = -\vec{F}_{\text{Erde}}$$

Warum fällt nicht die Erde auf den Apfel?

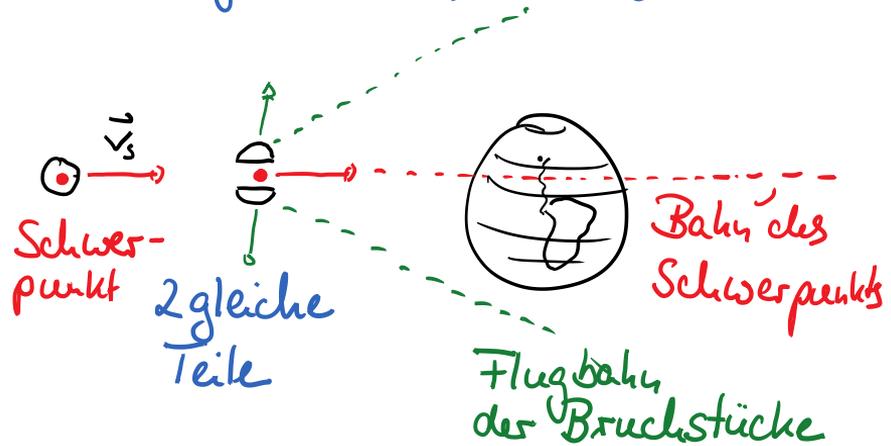
Annahme: Apfel $m_A = 0,5 \text{ kg}$; $h = 1 \text{ m}$
Erde $m_E = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Schwerpunkt bleibt!

↳ Bewegung Apfel um 1 m ,
Bewegung Erde um $\sim 10^{-25} \text{ m}$ (Atomgröße $\sim 10^{-10} \text{ m}$)

Beispiel: Meteorit stürzt auf Erde

! Rettung durch Sprengung (im Film)



Zusammenfassung:

• Newtons Axiom: actio = reactio

ohne äußere Kräfte:

↳ Impulserhaltung

$$\vec{p}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

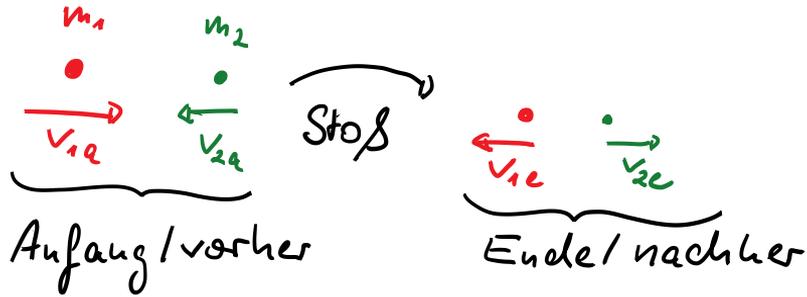
$$\frac{d\vec{p}_G}{dt} = 0$$

↳ Schwerpunkt $\vec{r}_S = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \vec{r}_i$

$$\vec{v}_S = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{v}_S}{dt} = 0$$

Stoß zwischen Massen:



- gesucht: Geschwindigkeiten v_{1e} & v_{2e} in Abhängigkeit von m_1 & m_2 und v_{1a} & v_{2a}
- Ansatz:
 - Schwerpunktbewegung konstant
 - Impulserhaltung $\sum_i \vec{p}_i = \text{const.}$

Unterscheidung von Stößen:

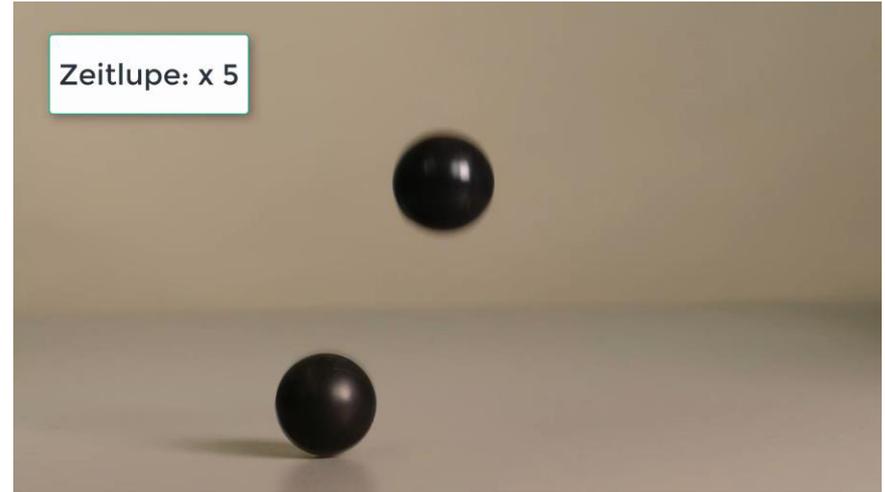
- elastische Stöße: Impulserhaltung & Energieerhaltung

Beispiel: Gummiball gegen Wand,
Billiardkugeln

- inelastischer Stoß: Impulserhaltung, aber keine Energieerhaltung, da zur Verformung (Reibung) Energie benötigt wird

Beispiel: Knete gegen Wand

Fallende Kugel: elastischer und inelastischer Stoß

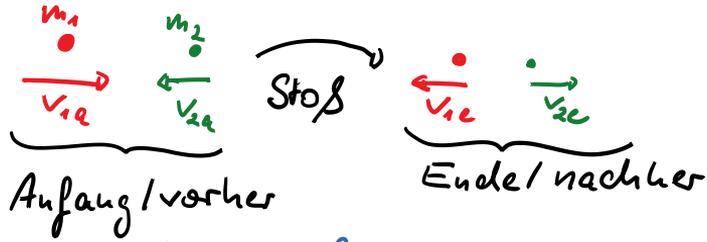


- Stoß ist abhängig von Material 



Elastischer Stoß:

- für zwei Massen
- in 1D, ohne Vektor



→ gesucht: v_{1e} & v_{2e}

Ansatz: Energieerhaltung & Impulserhaltung

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2a}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2e}^2 \quad \textcircled{\text{I}}$$

$$m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a} = m_1 v_{1e} + m_2 v_{2e} \quad \textcircled{\text{II}}$$

$$\textcircled{\text{I}} \rightarrow m_1 (v_{1a}^2 - v_{1e}^2) = m_2 (v_{2e}^2 - v_{2a}^2)$$

$$m_1 (v_{1a} + v_{1e})(v_{1a} - v_{1e}) = m_2 (v_{2e} + v_{2a})(v_{2e} - v_{2a}) \quad \textcircled{\text{III}}$$

$$\textcircled{\text{II}} \rightarrow m_1 (v_{1a} - v_{1e}) = m_2 (v_{2e} - v_{2a}) \quad \textcircled{\text{IV}}$$

$$\frac{\textcircled{\text{III}}}{\textcircled{\text{IV}}} \rightarrow v_{1a} + v_{1e} = v_{2a} + v_{2e}$$

oder

$$\boxed{v_{1a} - v_{2a} = -(v_{1e} - v_{2e})}$$

Relativgeschwindigkeiten

→ die Relativgeschwindigkeiten der beiden Massen sind vor und nach dem Stoß gleich, die Richtung bleibt erhalten!
... unabhängig von Massen

gesucht: v_{1e} & v_2

$$v_{1e} = v_{2e} + v_{2a} - v_{1a}$$

aus (II) $v_{2e} = (m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a} - m_1 v_{1e}) / m_2$
 $= \frac{m_1}{m_2} (v_{1a} - v_{1e}) + v_{2a}$

$$v_{1e} = \frac{m_1}{m_2} v_{1a} - \frac{m_1}{m_2} v_{1e} + 2v_{2a} - v_{1a}$$

$$v_{1e} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) \cdot v_{1a} + 2v_{2a}$$

$$v_{1e} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_2} \cdot v_{1a} + 2v_{2a}$$

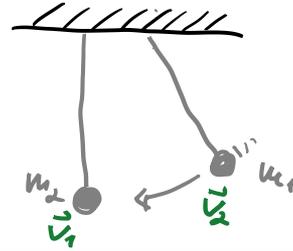
$$\hookrightarrow v_{1e} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1a} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{2a}$$

und ebenso

$$v_{2e} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2a} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1a}$$

→ Geschw. nach dem Stoß kann berechnet werden!

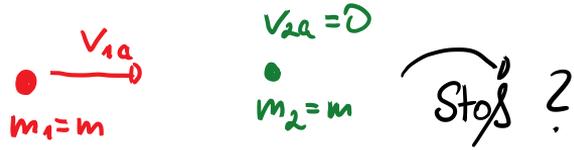
Experiment: Massen als Pendel aufgehängt



Pendel → potentielle Energie



a) Elastischer Stoß zwischen Kugeln gleicher Masse, $v_{2a} = 0$



$$v_{1e} = \underbrace{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}_{=0} \cdot v_{1a} + \underbrace{\frac{2m_2}{m_1 + m_2}}_{=0} \cdot v_{2a} = 0$$

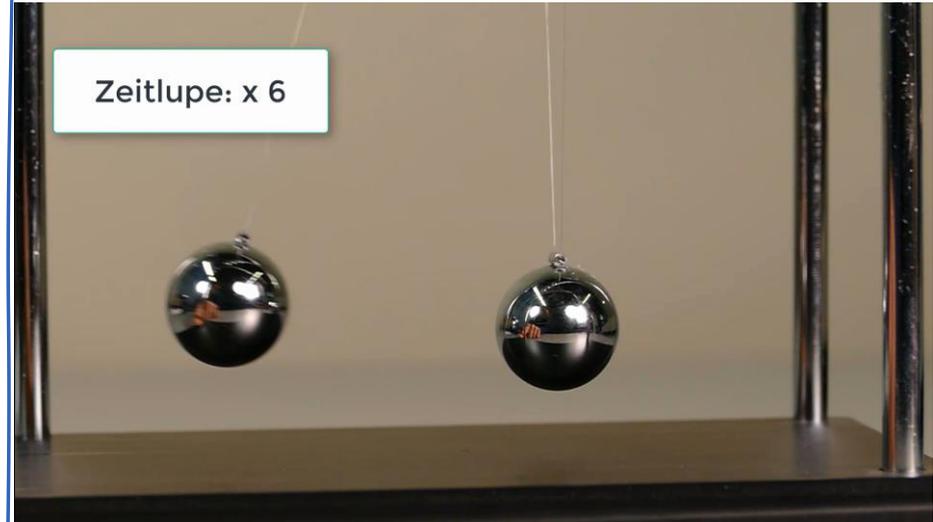
$$v_{2e} = \underbrace{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}_{=0} \cdot v_{2a} + \underbrace{\frac{2m_1}{m_1 + m_2}}_{=1} \cdot v_{1a} = v_{1a}$$

↳ der Impuls ist vollständig von der ersten auf die zweite Masse übertragen worden

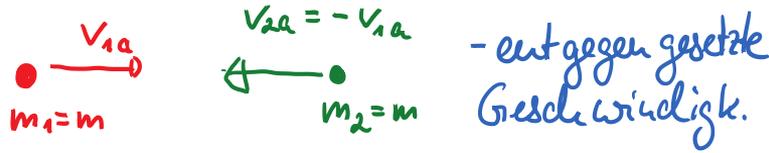
nach dem Stoß bewegt sich die zweite Masse wie die erste vor dem Stoß; die erste ruht nach dem Stoß

→ Stoß von Billiardkugeln

gleiche Massen als Pendel



5) Elastischer Stoß zwischen Kugeln gleicher Masse



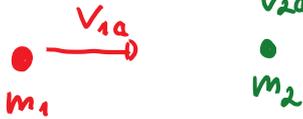
$$v_{1e} = \underbrace{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}_{=0} \cdot v_{1a} + \underbrace{\frac{2m_2}{m_1 + m_2}}_{=1} \cdot v_{2a} = v_{2a} = -v_{1a}$$

$$v_{2e} = \underbrace{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}_{=0} v_{2a} + \underbrace{\frac{2m_1}{m_1 + m_2}}_{=1} \cdot v_{1a} = v_{1a} = -v_{2a}$$

- Impulsübertrag vollständig
- Betrag der Geschw. bleibt
- Schwerpunkt ruht



c) allgemein: für m_1 und m_2 beliebig, aber $v_{2a} = 0$



$$v_{1e} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1a} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{2a} = 0$$

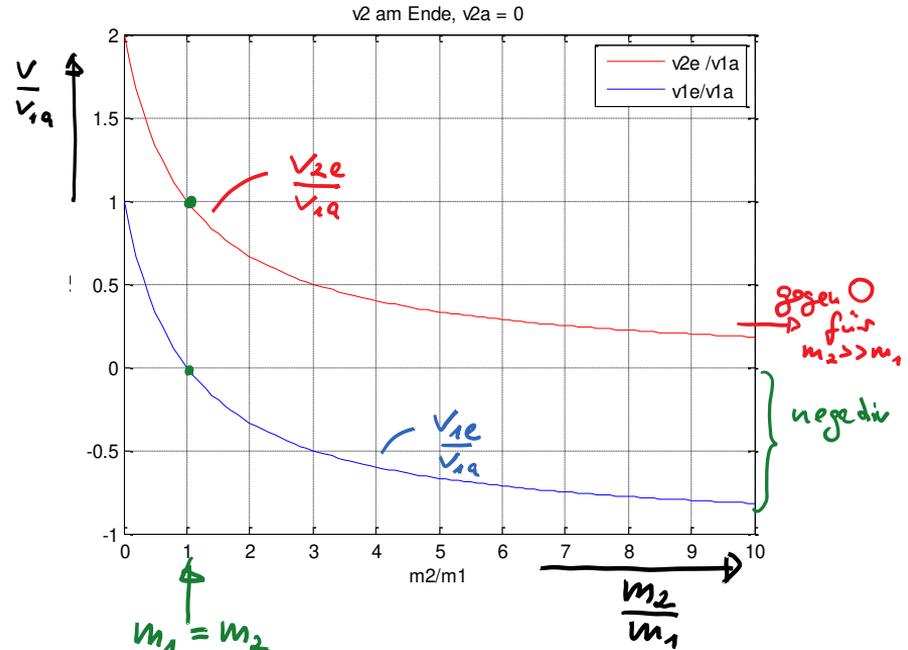
$$= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1a} = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \cdot v_{1a}$$

$$v_{2e} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2a} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1a} = 0$$

$$= \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \cdot v_{1a}$$

→ das Verhältnis der Massen $\frac{m_2}{m_1}$ bestimmt v_{1e} & v_{2e}

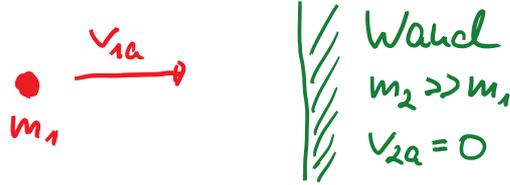
v_{1e}/v_{1a} & v_{2e}/v_{1a} als Funktion vom $\frac{m_2}{m_1}$



$m_1 = m_2$
 m_1 bleibt liegen

$\frac{m_2}{m_1} > 1 \rightarrow m_2 > m_1$
 m_1 fliegt zurück

d) Elastischer Stoß mit einer Wand



$$\hookrightarrow m_1 - m_2 \approx -m_2$$

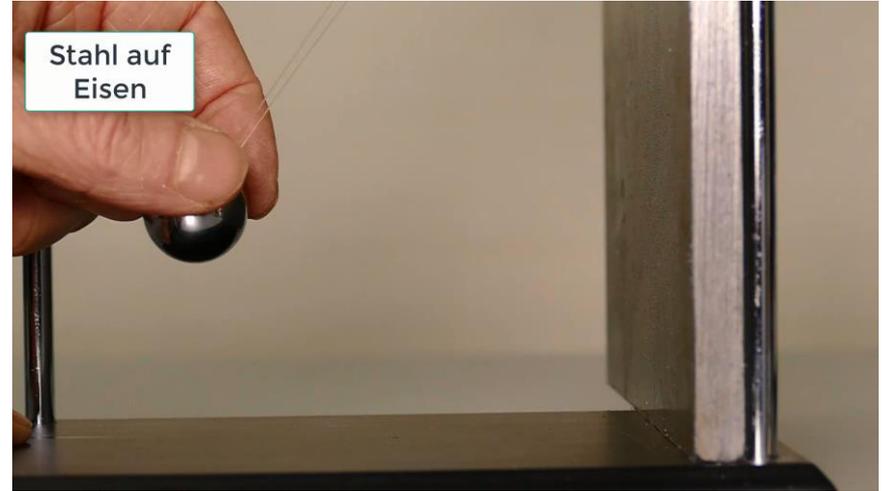
$$\hookrightarrow m_1 + m_2 \approx m_2 \quad \frac{m_1}{m_2} \approx 0$$

$$v_{1e} = \underbrace{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}_{= -\frac{m_2}{m_2} = -1} \cdot v_{1a} + \underbrace{\frac{2m_2}{m_1 + m_2}}_{= 2} \cdot \underbrace{v_{2a}}_{= 0} = -v_{1a}$$

$$v_{2e} = \underbrace{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}_{= 0} v_{2a} + \underbrace{\frac{2m_1}{m_1 + m_2}}_{= 0} v_{1a} = 0$$

$\hookrightarrow m_1$ prallt zurück: $v_{1e} = -v_{1a}$
 die Wand bleibt stehen: $v_{2e} = 0$

- Schwerpunkt: da $m_2 \gg m_1$
 \hookrightarrow in der Wand, ohne Geschwindigkeit

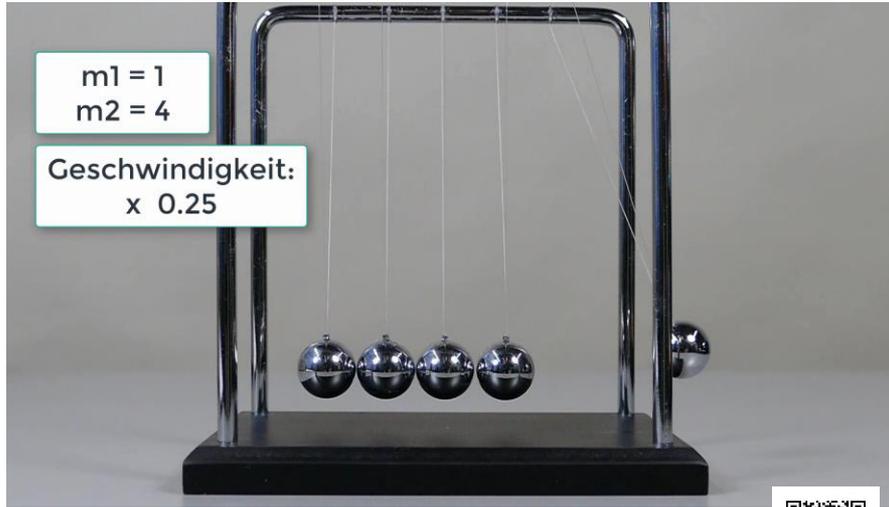


Stahl auf Eisen: näherungsweise elastisch
 „ auf Aluminium oder Plexiglas: inelastisch

Elastischer Stoß:

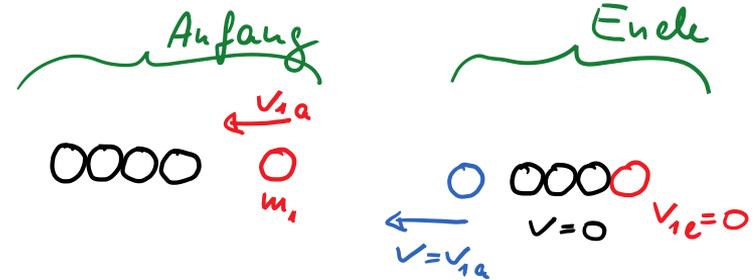
5 Stahlkugeln gleicher Masse,
linear aufgehängt

- unterschiedliche Fälle



- Idealisiert:
- Impulserhaltung
 - Energieerhaltung
 - Schwerpunktbewegung bleibt

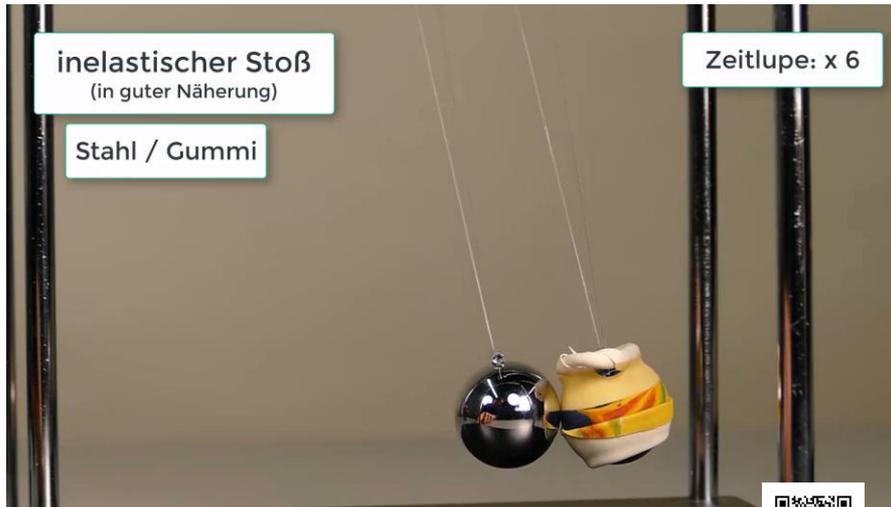
Beobachtung:



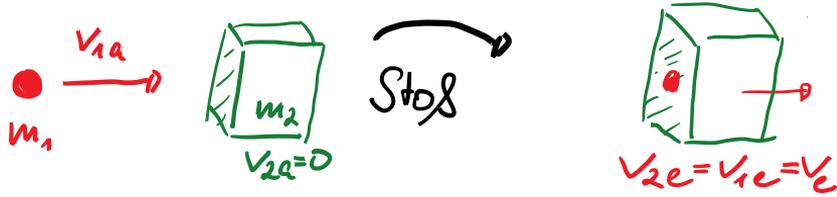
Inelastischer Stoß:

Impulserhaltung gilt;
kinetische Energie wird durch Reibung
ungewandelt;

für allgemeine Beschreibung sind
Angaben über Reibung notwendig



Sonderfall: $v_{2a} = 0$ & $v_{2e} = v_{1e} = v_e$,
 also gemeinsame Geschw. nach dem
 z.B. Knete trifft ruhende Masse Stoß

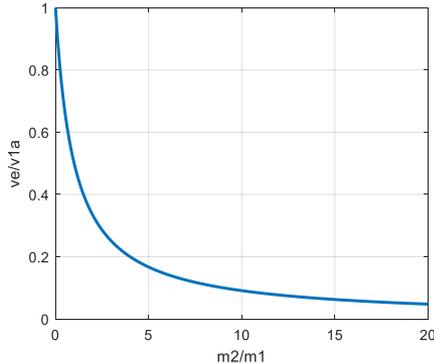


Impulserhaltung

$$m_1 v_{1a} + m_2 v_{2a} = m_1 v_e + m_2 v_e = (m_1 + m_2) v_e$$

$$v_e = \frac{m_1 v_{1a}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \cdot v_{1a}$$



Reibungsverlust / Umformungsenergie:

$$\Delta E_R = \bar{E}_{kin,a} - \bar{E}_{kin,e}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot v_e^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1a} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_{1a}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2 + m_1 \cdot m_2 - m_1^2}{m_1 + m_2} \right) \cdot v_{1a}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1a}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \cdot v_{1a}^2$$

relative Energieumwandlung:

$$S = \frac{\Delta E_R}{\bar{E}_{kin,a}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1a}^2}{\frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2}$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

$$m_2 \gg m_1 \rightarrow S \approx 1$$

$$m_2 \ll m_1 \rightarrow S \approx 0$$

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

9.a Der Schwerpunkt:
Beispiele

Schwerpunkt / Massenmittelpunkt:

Definition: der Schwerpunkt \vec{r}_S ist

- für zwei Massen $\vec{r}_S = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$

- für viele Massen $\vec{r}_S = \frac{1}{m_G} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i$

Gesamtmasse $m_G = \sum_i m_i$ ↑
i-te Masse

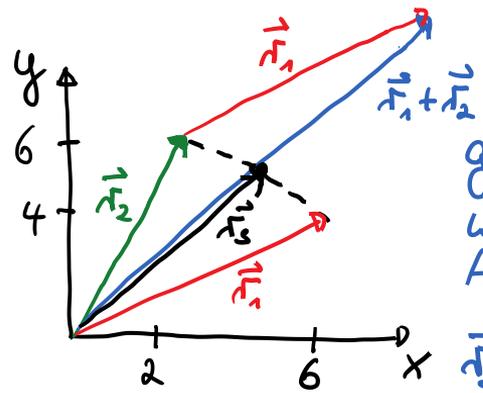
- allgemein

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m_G} \int \vec{r} \cdot dm$$

$m_G = \int dm$ ↑
Integral über
 dm ↑
Masse-
element

Berechnung des Schwerpunkts

a) zwei Massepunkte m_1 & $m_2 = m_1$
 an den Orten $\vec{r}_1 = (6, 4)$ & $\vec{r}_2 = (2, 6)$
 in Ebene, ohne z



geometrisch: Vektoren
 werden addiert,
 Annahme: $m_1 = m_2 = 1 \text{ (kg)}$

$$\vec{r}_S \cdot 2m = m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$$

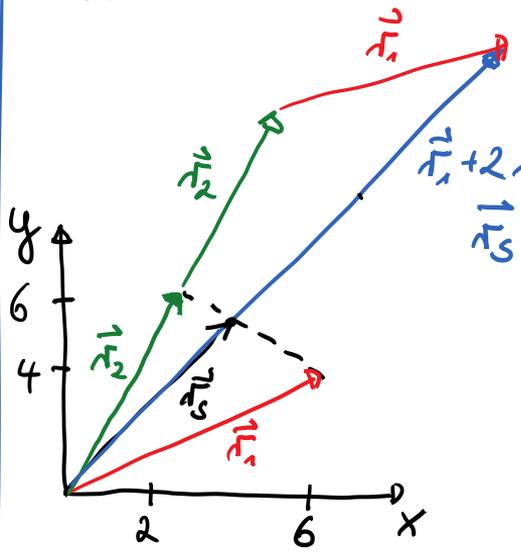
$$\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

Rechnen:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{2}((6, 4) + (2, 6)) = \frac{1}{2}(8, 10) = (4, 5)$$

b) zwei Massepunkte m_1 & $m_2 = 2m_1$
 mit $\vec{r}_1 = (6, 4)$ & $\vec{r}_2 = (2, 6)$

geometrisch: Gewichtung der Vektoren
 mit m

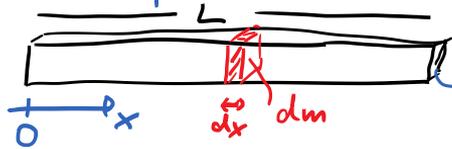


$$\vec{r}_S = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2)$$

$$= \frac{1}{3}((6, 4) + 2 \cdot (2, 6))$$

$$= \frac{1}{3}(10, 16) = \left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

c) Schwerpunkt eines Stabes:



Länge L
 Querschnittsfläche
 $A = a \cdot b, a \approx b \ll L$

Dichte sei homogen ($\rho = \frac{m}{V}$), Gesamtmasse m
 Dichte ρ Volumen $V = LA$

Betrachtung nur in x -Richtung

Definition: $x_s = \frac{1}{m} \int x dm$
 \uparrow Integral über alle
 Masselemente

- Integration über dm wird umgeschrieben in Integration über Länge
- Betrachtung für eine Dimension (x), für y & z ebenso

Wahl von dm : $dm = \rho dV = \rho A \cdot dx$

$$L_0 \quad x_s = \frac{1}{m} \int_{\text{Stab}} x dm = \frac{1}{m} \int_0^L x \rho A dx$$

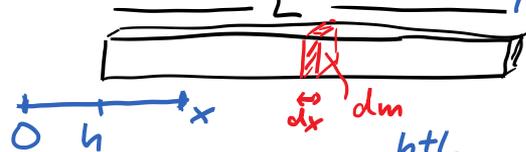
geht nur noch von x abhängig

$$= \frac{\rho A}{m} \int_0^L x dx$$

$$x_s = \rho \frac{A}{m} \frac{1}{2} L^2 = \rho \frac{A \cdot L}{m} \cdot \frac{1}{2} L = \frac{\rho V}{m} \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} L \quad \checkmark$$

Schwerpunkt liegt in der Mitte?

d) Schwerpunkt eines Stabes im Abstand h von $x=0$



$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\text{Stab}} x dm = \frac{1}{m} \int_h^{h+L} x \rho A dx = \frac{\rho A}{m} \int_h^{h+L} x dx$$

$$= \frac{\rho A}{m} \cdot \frac{1}{2} [(h+L)^2 - h^2] = \frac{\rho A}{m} \cdot \frac{1}{2} (h^2 + 2 \cdot h \cdot L + L^2 - h^2)$$

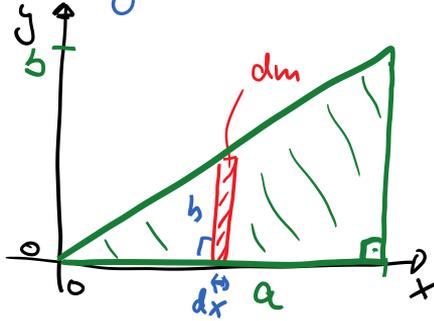
$$= \frac{\rho A}{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot L (2h + L) = \frac{1}{2} (2h + L) = h + \frac{L}{2}$$

e) Schwerpunkt eines homogenen Dreiecks

• homogene Dichte $\rho = \frac{m}{V}$

• Dicke D

• Kantenlängen a, b
rechtwinklig



• Schwerpunkt $\vec{r}_s = \frac{1}{m} \cdot \int \vec{r} \cdot dm$

• Berechnung für x - und y -Richtung getrennt

• für x : $x_s = \frac{1}{m} \int x \cdot dm$
Masselement

mit $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot D \cdot h \cdot dx$

• es gilt in den Dreiecken: $\frac{h}{x} = \frac{b}{a}$

↳ $dm = \rho \cdot D \cdot \frac{b}{a} \cdot x \cdot dx$ und damit

$$x_s = \frac{1}{m} \int_0^a x \cdot \rho \cdot D \cdot \frac{b}{a} \cdot x \cdot dx = \frac{\rho \cdot D \cdot b}{m \cdot a} \int_0^a x^2 \cdot dx$$

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{m} \rho D \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^a = \frac{1}{m} \rho D \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{3} a^3 \\ &= \frac{1}{m} \rho D \cdot b \cdot a^2 \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$V = D \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{2}$$

$$m = \rho V$$

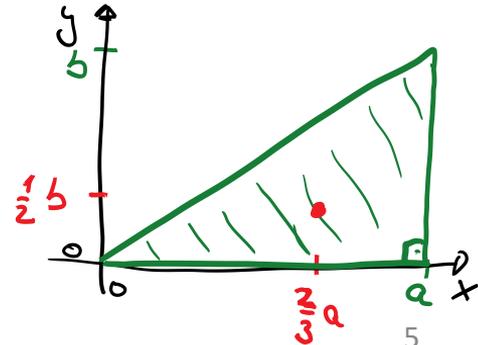
$$x_s = \frac{2}{3} a$$

• durch Vergleich der Geometrie oder durch Integration kann geschlossen werden:

$$y_s = \frac{1}{3} b$$

↳ Schwerpunktkoordinaten also

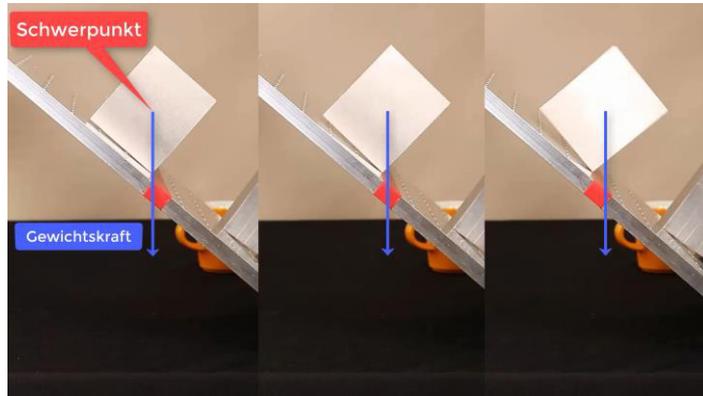
$$\vec{r}_s = (x_s, y_s) = \left(\frac{2}{3} a, \frac{1}{3} b \right)$$



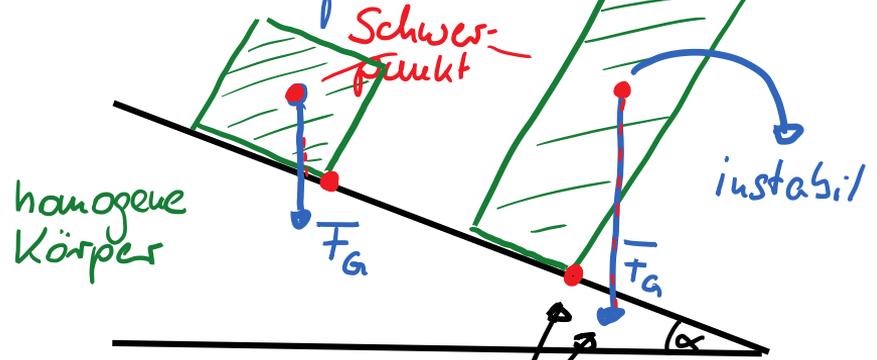
f) Wie schräg darf ein Tisch stehen, damit ein wassergefülltes Glas nicht umfällt?



... Oder der schiefe Turm von Pisa stehen bleibt...



Ansatz Schwerpunkt:



\vec{F}_G zeigt außerhalb des Kippunktes

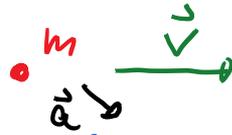
↳ Drehbewegung, Drehmoment

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

9b Der Impuls:
Beispiele

Definitionen:



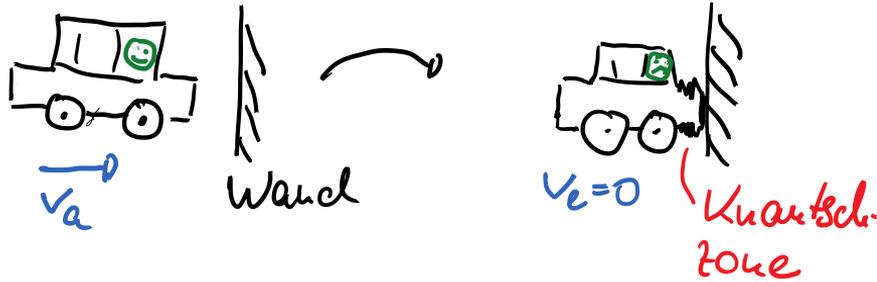
$$\text{Kraft } \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}^0}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{Impuls } \vec{p} = m \vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\hookrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt$$

The diagram shows the equations $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ and $\vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt$. A red curved arrow points from the \vec{p} term in the first equation to the \vec{p} term in the second equation. A green curved arrow points from the \vec{F} term in the second equation to the \vec{F} term in the first equation.

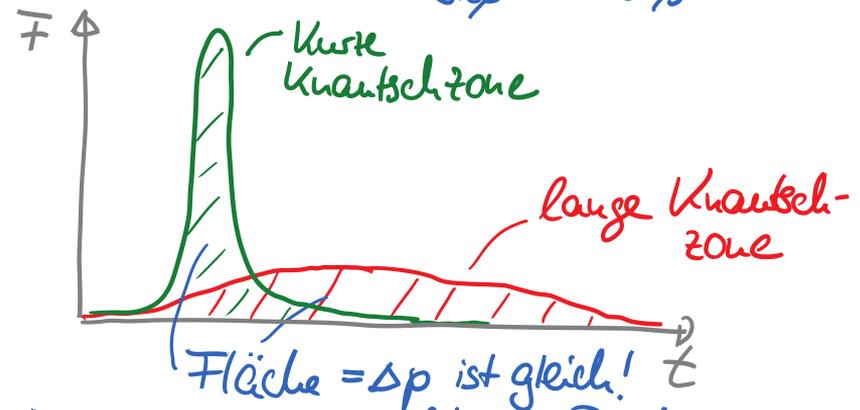
Beispiel: Physikalisches Prinzip der Knautschzone bei Autos



Knautschzone: kinetische Energie wird umgewandelt - Verformung
↳ inelastischer Stoß

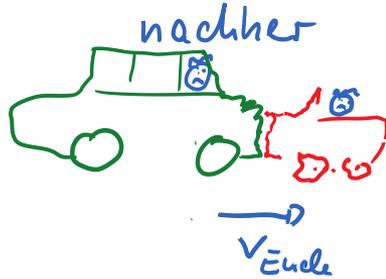
- für die Person im Auto:
lange Knautschzone → lange Zeit zur Abbremsung bis Auto zur Ruhe kommt
↳ Beschleunigung bzw. Kraft ist niedriger aber dauert länger.

$$\Delta p = m \Delta v = m v_a = \int_{\text{Stoß}} F dt = \int_{\text{Stoß}} m \cdot a \cdot dt$$



↳ kleinere Kraft bzw. Beschleunigung

Beispiel: Auffahrunfall
vorher



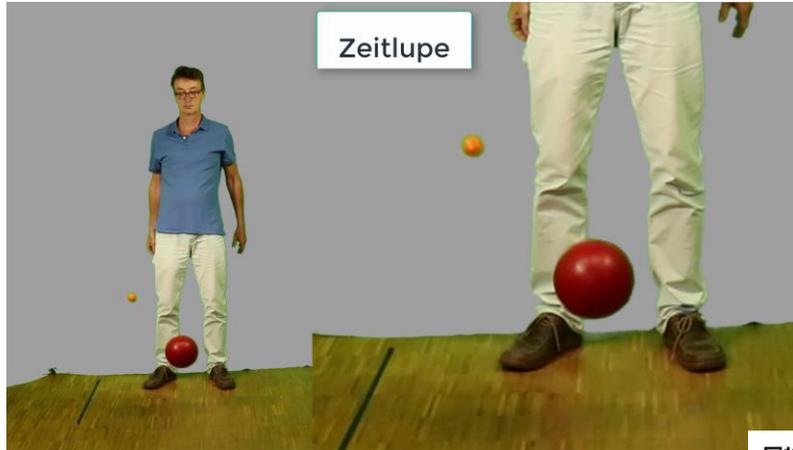
Kleines Auto: große Geschw.-änderung
 $\Delta v_2 = v_{\text{Ende}} - v_2 > v_{\text{Ende}} - v_1$

→ siehe Video über Beschleunigung
bei Stößen

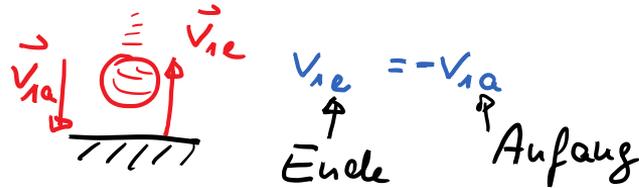
Beispiel: freier Fall von zwei
übereinander liegenden Kugeln



Beobachtung:
nach dem Stoß
ist die Geschw. von
 m_2 sehr groß



- zwei Stöße müssen betrachtet werden
 - Stoß von m_1 mit Boden
 - Stoß von m_2 mit m_1 , etwas später
- unter Annahme von elastischen Stößen:



$$v_{2a} \approx v_{1a} \dots \text{gleiche Fallhöhe}$$

$$= -v_{1e}$$

Stoß zwischen m_2 und m_1 liefert für
 v_{2e} nach dem Stoß mit m_1 (siehe Impuls-
kapitel):

$$v_{2e} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2a} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot (-v_{2a})$$

$$= \frac{m_2 - m_1 - 2m_1}{m_1 + m_2} v_{2a} = \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2} v_{2a}$$

$$v_{ze} = \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2} v_{za}$$

• Zahlenbeispiel:

$$m_1 = 1 \text{ kg}, m_2 = 0,1 \text{ kg}$$

Fall aus Höhe $h = 1,5 \text{ m}$

$$\hookrightarrow v_{za} = \sqrt{2gh} = 5,42 \text{ m/s}$$

$$\hookrightarrow v_{ze} = \frac{-2,9}{1,3} \cdot v_{za} = 14,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

damit kann der Ball eine Höhe

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad (mgh = \frac{1}{2}mv^2)$$

$$= 10,4 \text{ m erreichen!}$$

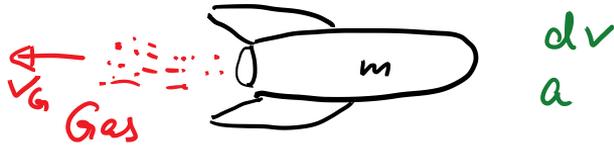
• Maximum, wenn $m_2 \ll m_1$

$\hookrightarrow v_{ze} = -3 v_{za}$ Verdreifachung
der Geschw. möglich

\hookrightarrow Höhe $\sim v^2$ kann um Faktor 9
erhöht werden!

Beispiel für Impulserhaltung: Raketenantrieb

- Startphase: Beschleunigung über Ausstoß von Gas \rightarrow Impulsübertrag

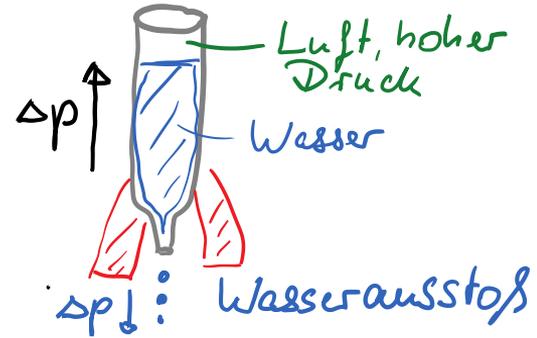


$$\Delta p(\text{Gas}) = -\Delta p(\text{Rakete})$$

gesucht: Δp in Abh. von Masse
und Gasgeschwindigkeit

\rightarrow Berechnung von Δv aus Δp

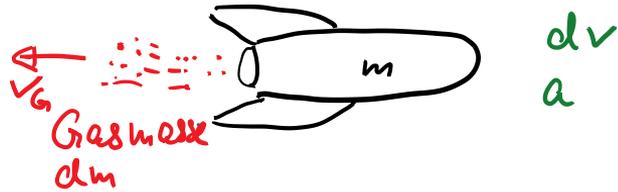
Wasserrakete:



$$\Delta p(\text{Gas}) = -\Delta p(\text{Rakete})$$

kleine Änderungen:

$$dp(\text{Gas}) = -dp(\text{Rakete})$$



$$-v_G \cdot dm = m \cdot dv$$

Richtung

Gasmasse dm
= Änderung der Raketenmasse

Änderung der Raketen-
geschwindigkeit

$$-v_G \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} = m \cdot a = \overline{F} \quad \textcircled{I}$$

Kraft / Schub

- Kraft = Geschw. * Massenänderung pro Zeit
 - Masse der Rakete ändert sich: $m(t)$
 - gesucht: $v(t)$ in Abh. von m
- dazu: Separation der Variablen in \textcircled{I}

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{v_G} \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{m} dm = -\frac{1}{v_G} \cdot dv$$

Integration

$$\int_{m_0}^{m_e} \frac{1}{m} dm = \int_{v_0}^{v_e} -\frac{1}{v_G} \cdot dv$$

mit m_0 : Raketenmasse am Anfang
 m_e : " " Ende,
 wenn kein Treibstoff im Tank
 v_0, v_e : Geschw. am Anfang u. Ende

mit $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$

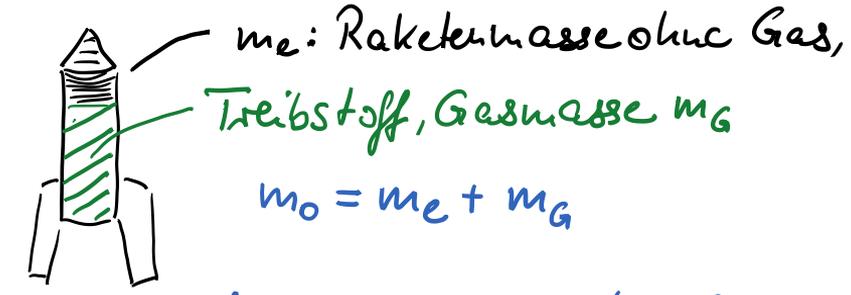
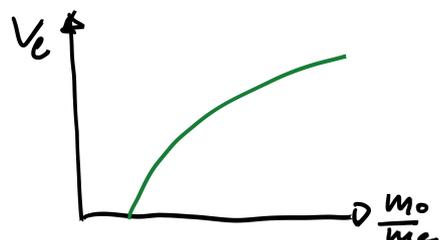
$$\begin{aligned} \rightarrow \int_{m_0}^{m_e} \frac{1}{m} dm &= \int_{v_0}^{v_e} -\frac{1}{v_g} \cdot dv \\ &= \ln(m) \Big|_{m_0}^{m_e} = \ln(m_e) - \ln(m_0) \\ &= \ln\left(\frac{m_e}{m_0}\right) = -\frac{1}{v_g} (v_e - v_0) = -\frac{v_e}{v_g} \end{aligned}$$

"0 am Start"

$v_e = v_g \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_e}\right)$ oder $\frac{m_e}{m_0} = e^{-\frac{v_e}{v_g}}$

↳ die Endgeschw. v_e der Rakete wird von Gas geschw. v_g und $\frac{m_e}{m_0}$ bestimmt

↙ Raketenmasse



• Technisch ist m_g begrenzt auf $m_g \approx 5 m_e$

↳ $v_e = v_g \cdot \ln\left(\frac{m_e + 5m_e}{m_e}\right) = v_g \ln(6)$
 $v_e = 1,8 \cdot v_g$, die Rakete kann also etwa die doppelte Gasgeschwindigkeit

für viele Gase: $v_G \approx 2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\hookrightarrow v_c \approx 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

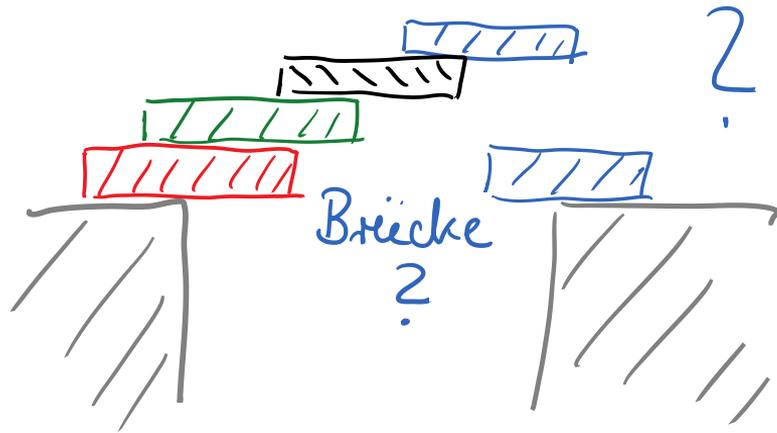
die Endgeschw. ist also begrenzt!

Lösung: Stufenprinzip von Raketen,
Nutzlast wird verkleinert
durch Abstoßen von Treibstoff-
tanks

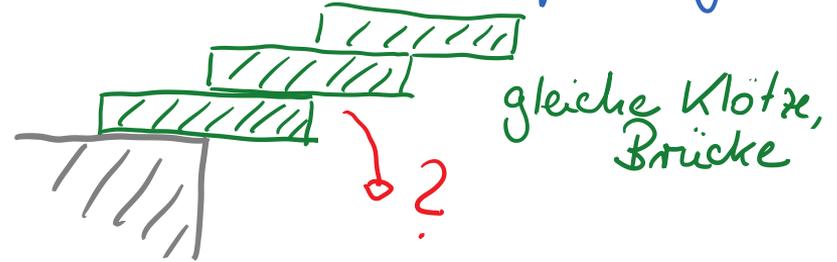
Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

Anwendungen und Aufgaben:
Brücke aus Büchern



Abstraktion und Vereinfachung:



Gleiche Holzquader sollen gestapelt werden, sodaß sie über eine Kante ragen. Wie weit können sie überstehen?



↳ Lösung

Ansatz: Betrachtung des Schwerpunkts S

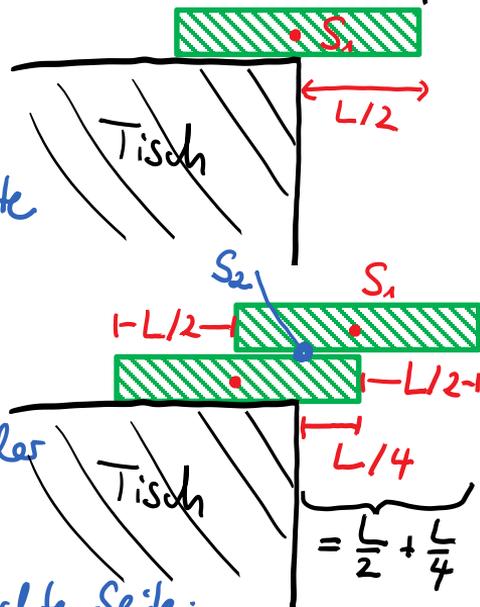
Schwerpunkt $L/2$



• ein Klotz

S_1 über Tisch,
links von der
Kante

$$x_{S1} = \frac{L}{2}$$



• zwei Klötze:

Schwerpunkt S_2
muss links von der
Kante liegen

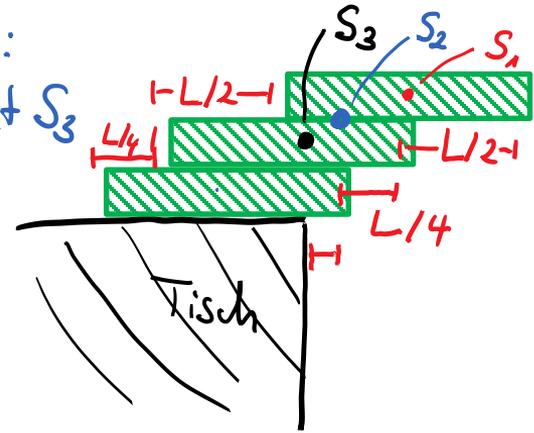
bezogen auf die rechte Seite:

$$x_{S2} = \frac{1}{2 \cdot m} \left(m \cdot \frac{L}{2} + m \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right) \right) = \frac{L}{4} + \frac{L}{2}$$

• drei Klötze:

Schwerpunkt S_3

S_2 über Kante
vom 3. Klotz



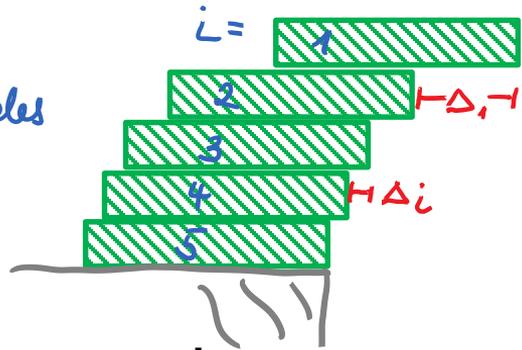
$$x_{S3} = \frac{1}{3 \cdot m} \cdot \left(\underbrace{m \cdot \frac{L}{2}}_{1. \text{ Klotz}} + \underbrace{m \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right)}_{2. \text{ Klotz}} + \underbrace{m \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{4} \right)}_{3. \text{ Klotz}} \right)$$

$$= \frac{L}{6} + \frac{L}{4} + \frac{L}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \cdot L$$

allgemein für n Klötze \rightarrow

allgemein:

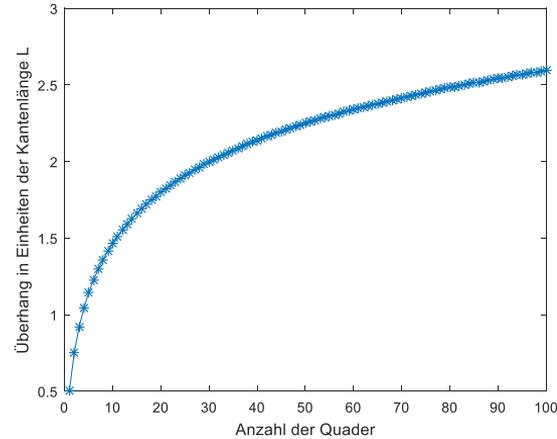
Überhang Δ_i des
Klotzes i



i	Δ_i	Summe
1	$\frac{1}{2} \cdot L$	$\frac{1}{2} L$
2	$\frac{1}{4} \cdot L$	$(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) L$
3	$\frac{1}{6} \cdot L$	$(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}) L$
4	$\frac{1}{8} \cdot L$	$(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}) L$
⋮	⋮	⋮
n	$\frac{1}{2n} \cdot L$	$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2 \cdot j}$
100	⋮	$2,59 \cdot L$
1000	⋮	$3,74 \cdot L$
10000	$\frac{1}{20000} \cdot L$	$4,89 \cdot L$

→ harmonische Reihe $H = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$
sie ist divergent!

↳ der Überhang wird mit jedem
Klotz größer!
 Δ_i wird aber klein!



Sehr viele Klötze/Bücher notwendig!

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

10. Drehbewegungen, Trägheitsmoment
und Drehmoment

bisher: lineare Translationsbewegung

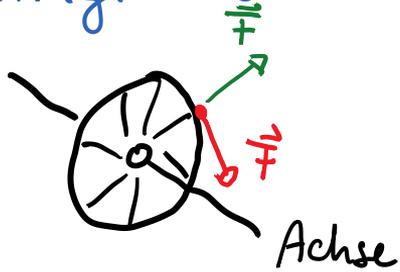
$$\vec{F} \rightarrow a = \frac{\vec{F}}{m} \rightarrow W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\rightarrow E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \Delta p$$

& gleichförmige Drehbewegungen

jetzt: allgemeine Drehbewegungen

Alltag: Rad wird in Drehung versetzt



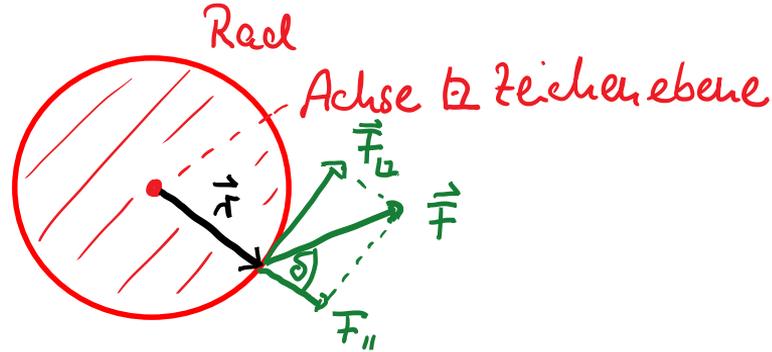
Kraft \vec{F} auf Rad

↳ Winkel,
Winkelgeschw.
und Energie
ändern sich.

gesucht: Beschreibung von Drehbewegungen/
Rotationen in Analogie zur Translation



Von der Kraft zum Drehmoment:



- von einer im Abstand r angreifenden Kraft \vec{F} trägt nur die Komponente

$$F_\perp = F \cdot \sin \delta$$

zur Rotationsänderung bei.

Beobachtung: \vec{F} relativ zu \vec{r} , d.h. der Angriffspunkt der Kraft, ist wichtig



Beobachtung: gleiche Wirkung für

oder r groß & F klein
oder r klein & F groß

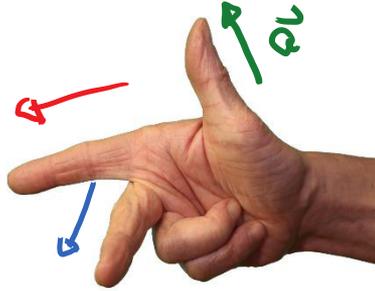
↳ zur Beschreibung eine Größe M mit
 $M \sim r \cdot F_\perp$
 $M \sim \sin \delta$



Kreuzprodukt oder Vektorprodukt:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

rechte Hand \circ



$$c = |\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin \delta$$

$\vec{c} \perp$ Fläche von \vec{a} & \vec{b}

Rechtssystem \rightarrow siehe Ergänzung

Definition: Das Drehmoment \vec{M} ist definiert als

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

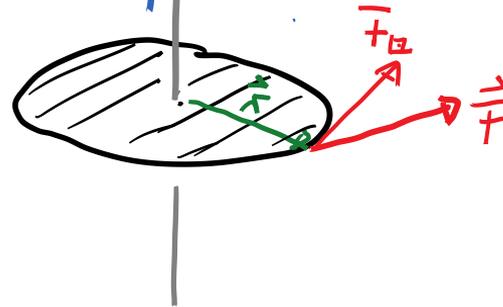
wobei \vec{r} der Vektor von der Drehachse zum Ansatzpunkt von \vec{F} ist

$$|\vec{M}| = r \cdot F_{\perp} = r F \cdot \sin \delta$$

$$\text{Einheit } [M] = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

(\circ gleiche SI-Einheit wie bei Arbeit \circ)

$\vec{M} \uparrow$ Achse



$\vec{M} \parallel$ Drehachse

Beispiel: Hebelarm zum Flaschenöffnen



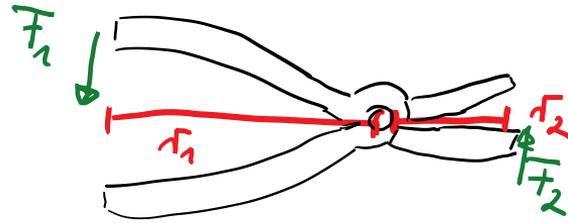
Kraft \vec{F} bewirkt ein Drehmoment
 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

großer Hebelarm $r \rightarrow M$ groß

\rightarrow leichtes Öffnen

Beispiel: Drehmomentschlüssel

Beispiel: Zange oder Schere



- Drehmoment M_1 durch \vec{F}_1 in Abstand r_1
 \rightarrow in Abstand r_2 gleiches M

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_2$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

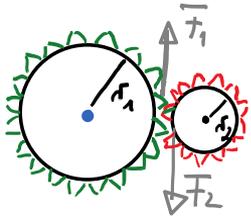
wenn $\vec{r}_1 \perp \vec{F}_1$ und $\vec{r}_2 \perp \vec{F}_2$

$$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2$$

$$\hookrightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} \quad \text{Übersetzung der Kraft}$$

Analogie: Seitwinde

Beispiel: Zahnräder



Zahnräder mit Radien r_1 & r_2 greifen ineinander

- Umfang $2\pi r_1$ & $2\pi r_2$
- Kräfte werden übertragen

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

mit $M = \vec{F} \cdot \vec{r}$ und Kräfte \perp Radien

$$\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2}$$

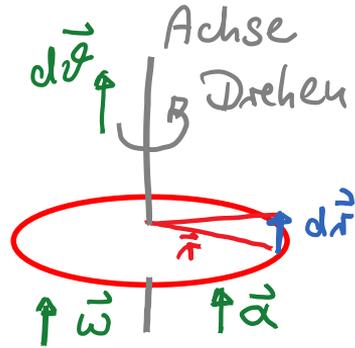
$\hookrightarrow M_2 = M_1 \cdot \frac{r_1}{r_2}$ Übersetzungsverhältnis der Drehmomente

- kleines Rad $\hat{=}$ kleines Drehmoment (und höheres ω)
- statt $\frac{r_2}{r_1}$ auch Verhältnis der Zähne

Drehungen und Rotation: Beschreibung durch Vektoren

- $$d\vec{r} = d\vartheta \times \vec{r}$$

\uparrow Drehwinkel
 \parallel Achse



- $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \times \vec{r}$$

(\vec{r} sei konstant)

- $$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

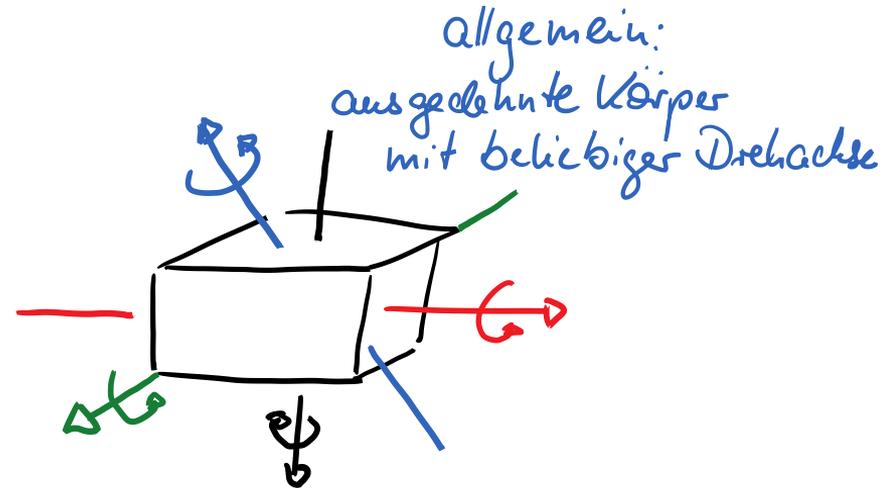
\uparrow Winkelgeschw. $\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt}$
entlang der Drehachse
mit $\omega = |\vec{\omega}| = \frac{v}{r}$

- $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

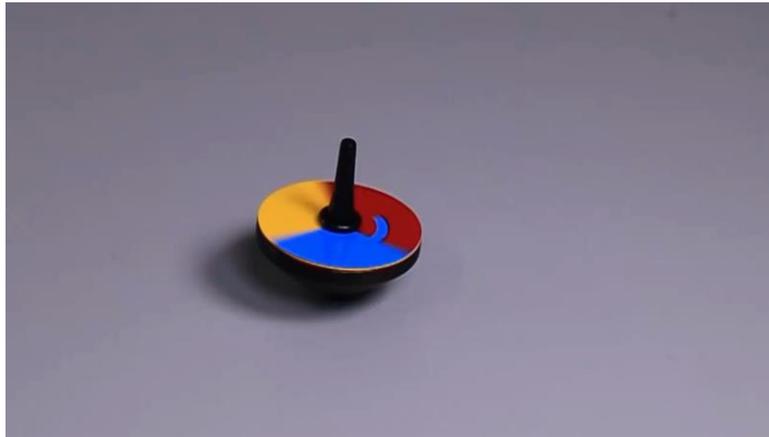
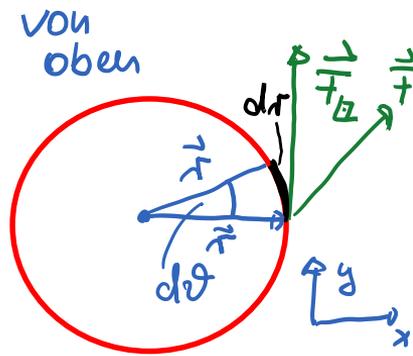
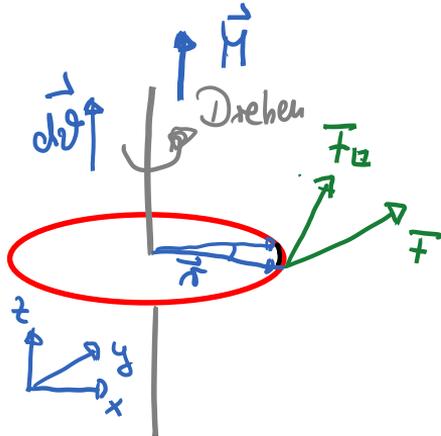
- $$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

\uparrow Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
entlang Achse
mit $\alpha = |\vec{\alpha}| = \frac{a}{r}$

$\hookrightarrow d\vartheta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$ und $\vec{H} = \vec{r} \times \vec{F}$
sind entlang der Drehachse gerichtet



Arbeit beim Drehen:



Drehung um Winkel $d\vartheta$

↳ Wegänderung $dr = r d\vartheta$

$$\begin{aligned} \text{↳ Arbeit } dW &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \\ &= \vec{F}_1 \cdot r d\vartheta \\ &= M \cdot d\vartheta \end{aligned}$$

Drehung im Raum

→ $d\vec{\vartheta}$ als Vektor parallel zur Drehachse

$$\vec{M} \parallel d\vec{\vartheta}$$

↳ Arbeit bei Drehen um $d\vec{\vartheta}$:

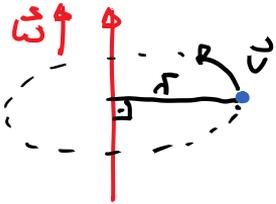
$$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\vartheta} \quad \text{mit Vektoren!}$$

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\vartheta}$$

(Analogie: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$)

Arbeit wird in Bewegungsenergie umgewandelt:

für ein Masselement m in Abstand r von Drehachse:



$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \vec{v} = r \cdot \vec{\omega}$$
$$= \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

→ Rotationsenergie:

$$E_{\text{Rot}} = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m r^2 \cdot \omega^2$$

Geometrie
& Masse

Drehbewegung

mit dem von der Drehung unabhängigen
Trägheitsmoment $I = m r^2$

$$\hookrightarrow E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

• dies gilt auch für Verteilungen der Masse, aber I muß bekannt sein.

Trägheitsmoment I :

• ein Massenelement: $I = m r^2$
↑ Abstand r
zur Drehachse

• viele Massepunkte: $I = \sum_i m_i r_i^2$

• Masseverteilung: $I = \int r^2 dm$
Integral über dm
↑ r für jedes Masse-
element dm

Berechnung von I :



Zusammenhang von Drehmoment M
und Trägheitsmoment I
für ein Massenelement m :

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times m \vec{a} \quad \text{mit } \vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\perp \vec{r}} \\ &= m \vec{r} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}) \\ &= \underbrace{m r^2}_{I} \cdot \vec{\alpha} \end{aligned}$$

↳ allgemein: $\vec{M} = I \vec{\alpha}$

(Analogie: $\vec{F} = m \vec{a}$)

Analogie von

Translation

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

mit Masse m

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Rotation

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{M} = \underline{I} \vec{\alpha}$$

mit $I = \int r^2 dm$

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\vartheta}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

(Impuls & Drehimpuls \rightarrow späteres Kapitel)

\hookrightarrow Beispiele & Übungen:

- Berechnung von \underline{I}
- Rollende Körper
- Anwendungen

nächste
Kapitel \triangleright

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

11. Berechnung von
Trägheitsmomenten

Drehbewegungen:

$$\begin{aligned} \text{Drehmoment } \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= I \cdot \vec{\alpha} \end{aligned}$$

Winkelbeschleunigung

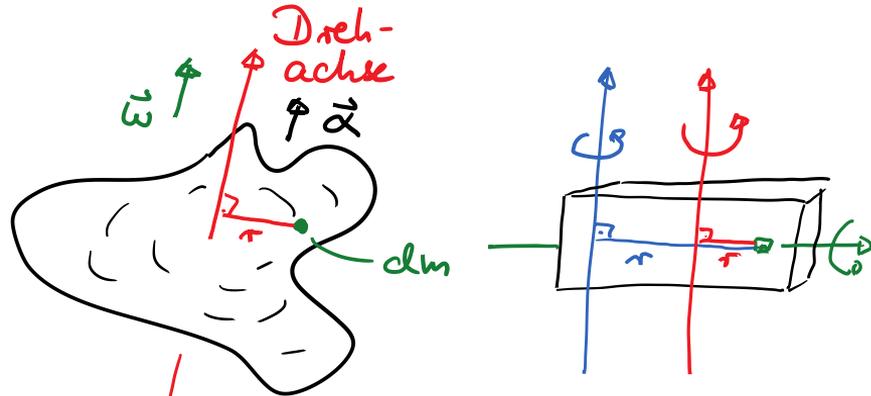
Rotationsenergie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Winkelgeschw.

mit Trägheitsmoment

$$I = \int r^2 dm$$



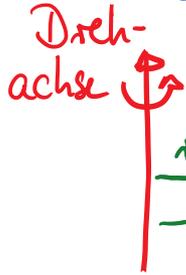
I hängt von Massenverteilung und Drehachse ab

Ziel: Berechnung von I für einfache Geometrien: Stab, Ring, Scheibe, Kugel

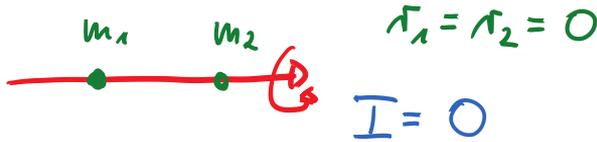
Vergleich: Schwerpunkt

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m_G} \int \vec{r} dm$$

a) Trägheitsmoment von zwei Massen



$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2$$

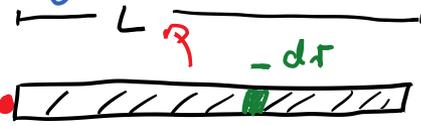


$$I = 0$$

damit auch keine Rotationsenergie

Beispiel: Molekülrotation von O_2 und N_2

b) Trägheitsmoment eines homogenen Stabes



Masse m_G

Drehachse
& Zeichenebene

Massenelement

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

Stab

Umschreiben von $dm \rightarrow dr$

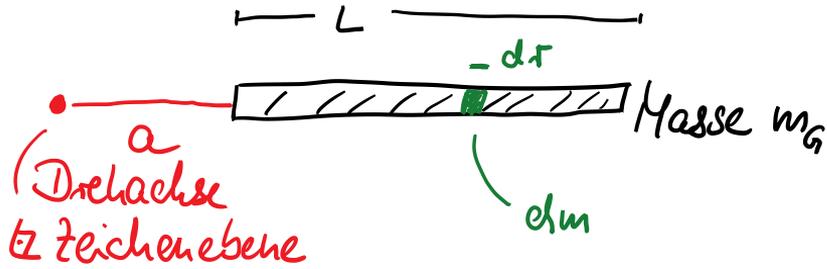
$$\lambda = \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}} = \frac{m_G}{L} = \frac{dm}{dr} \rightarrow dm = \lambda \cdot dr$$

$$\hookrightarrow I = \int_0^L r^2 \cdot \lambda \cdot dr = \lambda \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^L = \frac{1}{3} \lambda \cdot L^3$$

$$= \frac{1}{3} m_G \cdot L^2$$

$$\text{mit } m_G = \lambda \cdot L$$

c) Trägheitsmoment eines homogenen Stabes mit Abstand a von Drehachse



$$I = \int_{\text{Stab}} r^2 \cdot dm = \lambda \int_a^{a+L} r^2 \cdot dr \quad \lambda = \frac{dm}{dr}$$

$$= \frac{1}{3} \lambda \cdot r^3 \Big|_a^{a+L} = \frac{1}{3} \lambda \cdot [(a+L)^3 - a^3]$$

$$= \frac{1}{3} \lambda (a^3 + 3a^2L + 3aL^2 + L^3 - a^3)$$

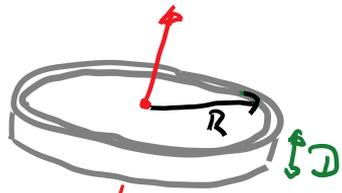
$$I = \frac{1}{3} \lambda \cdot (3a^2L + 3aL^2 + L^3) \quad \text{mit } m_G = \lambda \cdot L$$

$$= \frac{1}{3} m_G (3(a^2 + aL) + L^2)$$

↳ I wird mit a größer

Anmerkung: Vergleich mit Schwerpunkt $\vec{r}_S = \frac{1}{m_G} \int \vec{r} \cdot dm$
... Integration in Analogie

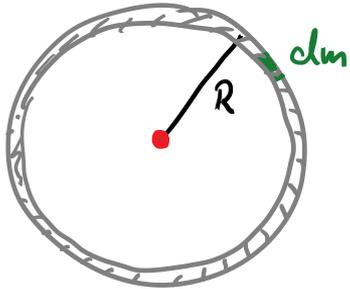
d) I eines Hohlzylinders



alle Punkte haben den gleichen Abstand R von der Drehachse

/ Drehachse

von oben:

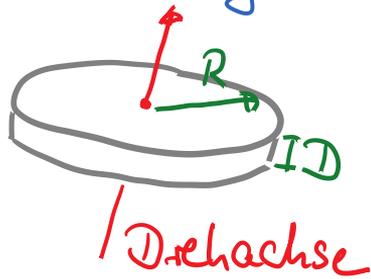


$$\text{Masse } m_G = \int dm$$

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm$$

$$I = m_G R^2$$

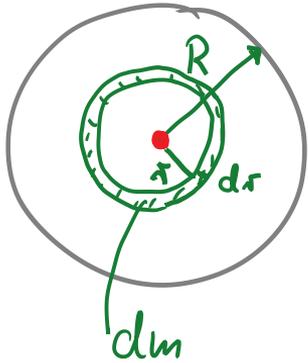
e) I einer homogenen Kreisscheibe/
Zylinder mit Achse im Zentrum



m_G

Dichte $\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{m_G}{V}$

von oben:



Betrachtung für ring-
förmiges Massenelement
 dm mit Umfang $2\pi r$,
Dicke dr und Höhe D

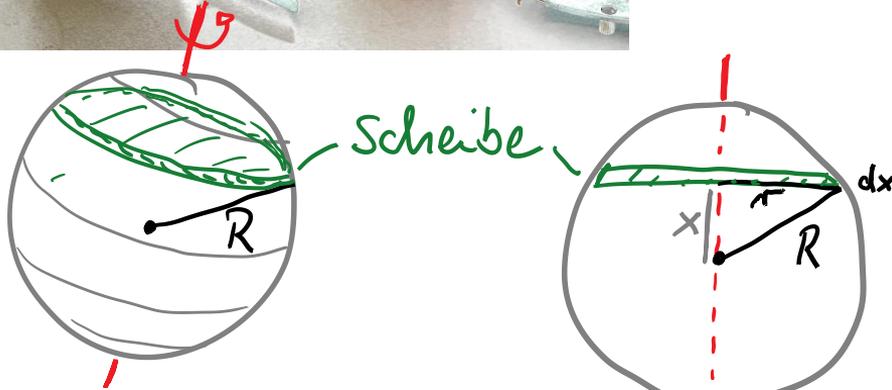
Volumen von dm ist
 $dV = 2\pi r D \cdot dr$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\text{Zylinder}} r^2 dm = \int_{\text{Zylinder}} r^2 \rho dV \quad \text{mit } \rho = \frac{dm}{dV} \\
 &= \rho \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r D \cdot dr \\
 &= 2\pi \rho D \int_0^R r^3 dr \\
 &= 2\pi \rho D \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho D \cdot R^4
 \end{aligned}$$

mit $V = \pi R^2 D$ und $m_G = \rho V$

$\hookrightarrow I = \frac{1}{2} m_G R^2$ für Zylinder

f) Trägheitsmoment einer homogenen Kugel



Scheibe: Dicke dx
 Volumen $dV = \pi r^2 \cdot dx = \pi (R^2 - x^2) dx$
 Masse $dm = \rho dV$

Trägheitsm. der Scheibe (s.o.)

$$\begin{aligned} dI &= \frac{1}{2} dm \cdot r^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho dV \cdot r^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - x^2) dx \cdot (R^2 - x^2) \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - x^2)^2 \cdot dx \end{aligned}$$

↳ damit muß für die Kugel über alle Scheiben integriert werden, d.h. über dx

Formal: Transformation der Variablen
 $dm \rightarrow dV \rightarrow dx$

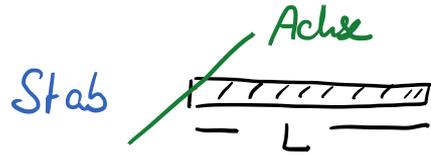
$$\begin{aligned}
 \rightarrow I_{\text{Kugel}} &= \int dI \\
 &\quad \text{Scheiben} \\
 &= \int_{-R}^{+R} \frac{1}{2} \pi g (R^2 - x^2)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \pi g \cdot 2 \cdot \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx \\
 &\quad \text{zwei Halbkugeln} \\
 &= \pi g \cdot \int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4) dx \\
 &= \pi g \left(R^4 x - \frac{2}{3} R^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^R \\
 &= \pi g \frac{15R^5 - 10 \cdot R^5 + 3R^5}{15} \\
 &= \pi g \frac{8}{15} R^5
 \end{aligned}$$

mit dem Volumen einer Kugel $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$\begin{aligned}
 I_{\text{Kugel}} &= g \pi \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} R^3 \cdot R^2 \\
 &= g V_{\text{Kugel}} \cdot \frac{2}{5} R^2 \\
 \text{mit } gV &= m_g \\
 \hookrightarrow I_{\text{Kugel}} &= \frac{2}{5} m_g R^2
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

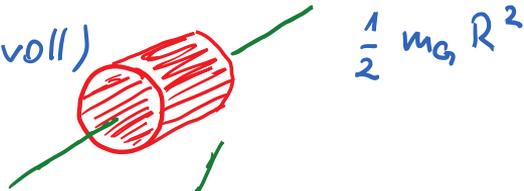
Geometrie:



$$I = \frac{1}{3} m_G L^2$$

Zylinder (hohl)  Achse (zentral)

$$m_G R^2$$

Zylinder (voll) 

$$\frac{1}{2} m_G R^2$$

Kugel (voll) 

$$\frac{2}{5} m_G R^2$$

beliebige Geometrie \rightarrow numerische Integration

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

12. Drehbewegungen:
Beispiele

Drehbewegungen:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = I \cdot \vec{\alpha}$$

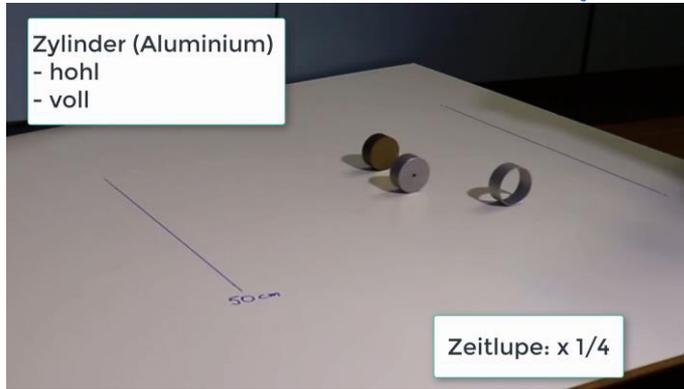
$$I = \int r^2 dm$$

$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

↳ Beispiele:

- a) Rollen auf schiefer Ebene
- b) Drehen einer Gartrolle
- c) Beschl. einer Rolle durch Gewichtskraft
- d) Drehmoment und Leistung eines Autos
- e) Einkürzender Schornstein

a) Rollen auf schiefer Ebene



Zylinder

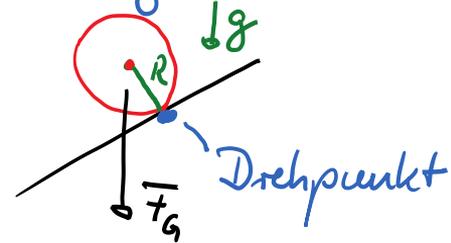
Beobachtung:

- Geschwindigkeit / Zeit
- unabhängig vom Material / Dichte
- unabhängig von Größe
- aber abhängig von Massenverteilung / Trägheitsmoment

- Galilei folgerte: „... Fallen unabh. von Masse...“

Physikalische Beschreibung:

- Gewichtskraft \vec{F}_G
- Drehpunkt ist der Auflagepunkt auf Ebene und nicht die Achse



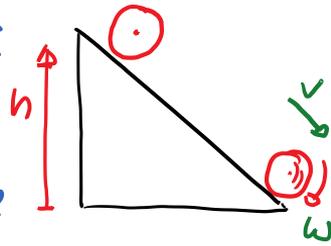
↳ Drehmoment

- Änderung der Höhe

↳ potentielle Energie

↓
 E_{kin}

Ansatz Energieerhaltung:
Potentielle Energie wird
umgewandelt in kinetische
Energie



$$\Delta E_{\text{pot}} = \Delta E_{\text{kin}} = \Delta E_{\text{kin},T} + \Delta E_{\text{kin},R}$$

Translation
Rotation

$$m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

• Rollen ohne Rutschen: v und ω sind
gekoppelt

$$\text{Winkelgeschw. } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \frac{v^2}{R^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) \cdot v^2$$

→ Translationsgeschw. v :

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{m \cdot R^2}}}$$

Unterschied zum
freien Fall

$\frac{I}{m \cdot R^2}$ bestimmt die Abrollgeschw.!

für genaue Rechnung: I notwendig
qualitativ:

• $I = \int r^2 dm \sim m \rightarrow \frac{I}{m \cdot R^2}$ unabh. von m
↳ v unabh. von Masse m !

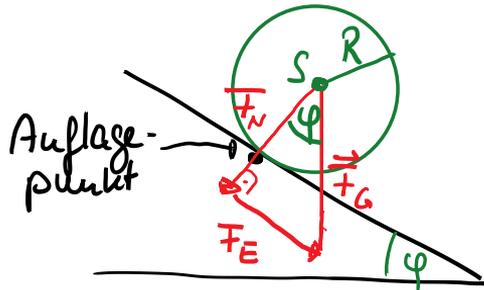
• für Zylinder: $I = \int r^2 dm \sim R^2$
↳ $\frac{I}{m \cdot R^2}$ unabh. von R

↳ Zylinder rollt unabh. vom Radius

• Hohlzylinder: $I_H > I_V$ für Vollzylinder

↳ Hohlzylinder rollt langsamer

anderer Ansatz: Drehmoment



Warum rollt
der Zylinder?

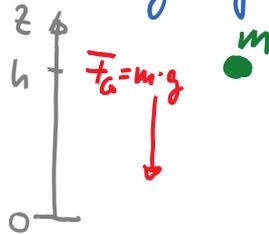
- Gewichtskraft $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$
- Neigungswinkel φ
- Auflage-/Normalkraft $\vec{F}_N = \vec{F}_G \cdot \cos \varphi$
- entlang der Ebene $\vec{F}_E = \vec{F}_G \cdot \sin \varphi$
- Rad dreht sich um Auflagepunkt
↳ Drehmoment $M = |\vec{R} \times \vec{F}_E|$
 $= R \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi$

• mit $M = I \cdot \alpha$

↳ Winkelbeschl. $\alpha = \frac{M}{I} = \frac{m \cdot g \cdot R \cdot \sin \varphi}{I}$

↳ Mittelpunkt / Schwerpunkt beschleunigt
mit $a = R \cdot \alpha = m \cdot g \cdot R^2 \sin \varphi / I$

Analogie: freier Fall



Ansatz: Kraft

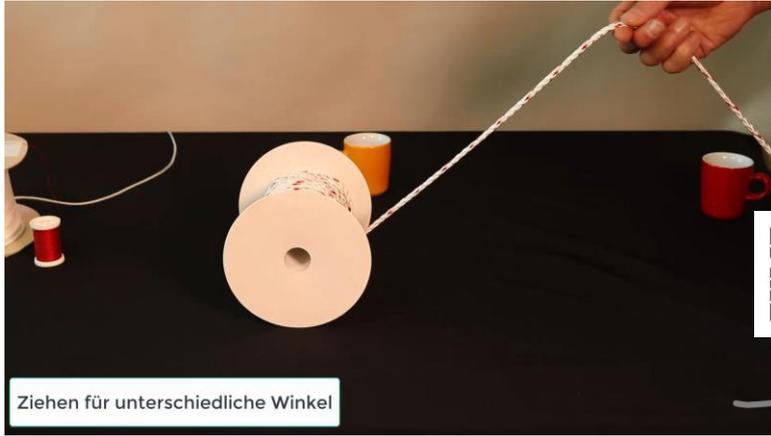
$$\vec{F} = -m \cdot \vec{g}$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

Ansatz: Energieerhaltung

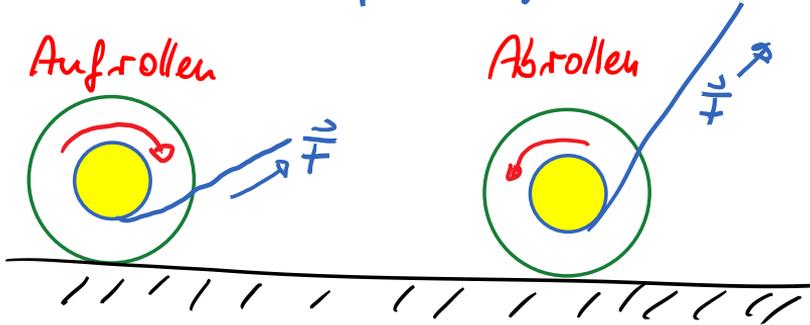
$$m g \cdot h = \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

b) Drehen einer Garnrolle

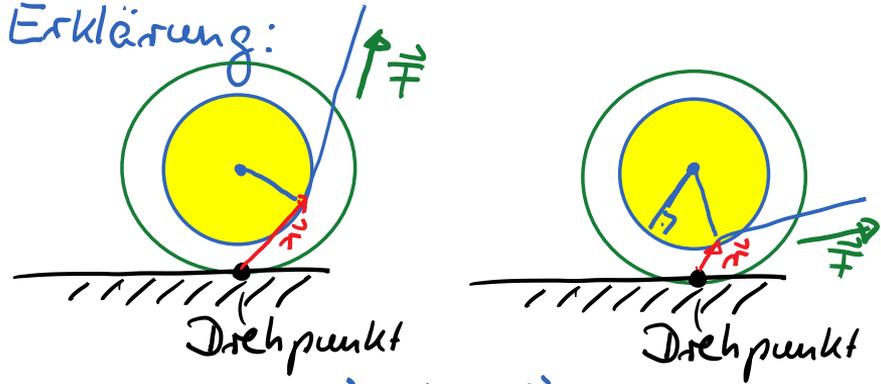


Ziehen für unterschiedliche Winkel

Beobachtung: Ziehen am Faden kann zum Ab- oder Aufrollen führen



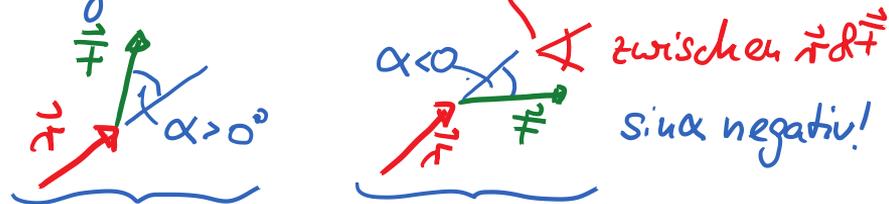
Erklärung:



Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ Zugkraft

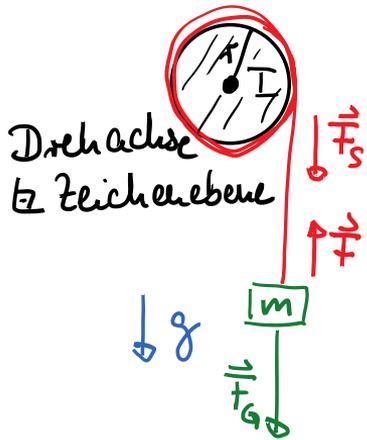
↳ entlang der Achse

Betrag $M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$



M hat unterschiedliches Vorzeichen
 → Drehrichtung unterschiedlich

c) Beschleunigung einer Rolle



Masse m hängt an Seil, das um Rolle (Radius r , Trägheitsmoment I) gewickelt ist. Wie bewegt sich m ? Wie dreht sich die Rolle?

- Kraft im Seil \vec{T}_S (Seilspannung)
 → Drehmoment $M = (\vec{T}_S \times \vec{r}) = \vec{T}_S \cdot \vec{r}$
 ($\vec{T}_S \perp \vec{r}$)
- dieses Drehmoment bewirkt eine Winkelbeschleunigung α der Rolle
 $M = I \cdot \alpha$

- Winkelbeschleunigung α
 → Abrollen des Seiles mit Beschl.
 $a = r \cdot \alpha$ ($\alpha = \frac{a}{r}$);
 dies ist die Beschl. der Masse m
- die Kraft im Seil \vec{T}_S „hält“ die Masse und wirkt der Gewichtskraft entgegen:

→ Beschleunigung von m :

$$m \cdot a = \vec{T}_G - \vec{T}_S = m \cdot g - \frac{M}{r} = m \cdot g - \frac{I \alpha}{r}$$

$$= m g - I \frac{a}{r^2}$$

$$\hookrightarrow a \left(1 + \frac{I}{m r^2}\right) = g$$

$$a = g \cdot \frac{1}{1 + I/(m r^2)}$$

wenn I groß,
 oder r bzw. m
 klein } → a klein
 → langsames Abrollen

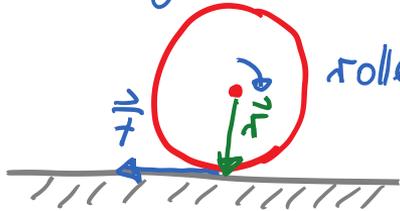
d) Drehmoment und Leistung eines Autos

- Leistung: $P = \frac{dW}{dt}$ Autos
Einheit $[P] = 1 \text{ W}$; $1 \text{ PS} = 1,36 \text{ kW}$

- Drehmoment M "liefert" die Kraft



- im Verbrennungsmotor: P & M hängen von der Drehzahl ab



rollendes Rad

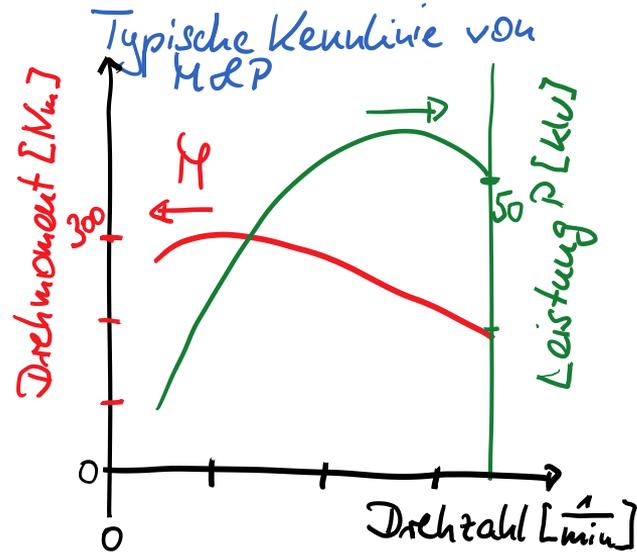
$$M = r \cdot F_H$$

→ hohes M → große Beschleunigung

für eine Umdrehung: Weg $= 2\pi r$
geleistete Arbeit $W = F_H \cdot 2\pi r = M \cdot 2\pi$

$$\text{Leistung } P = \frac{dW}{dt}$$

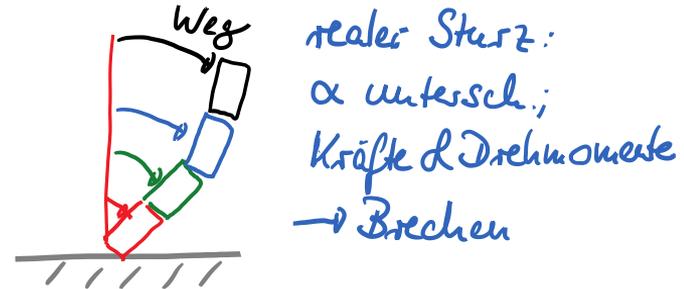
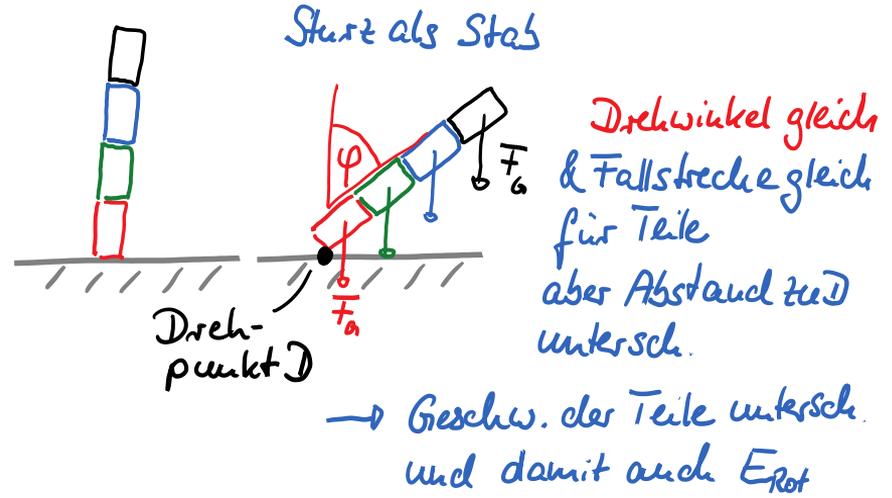
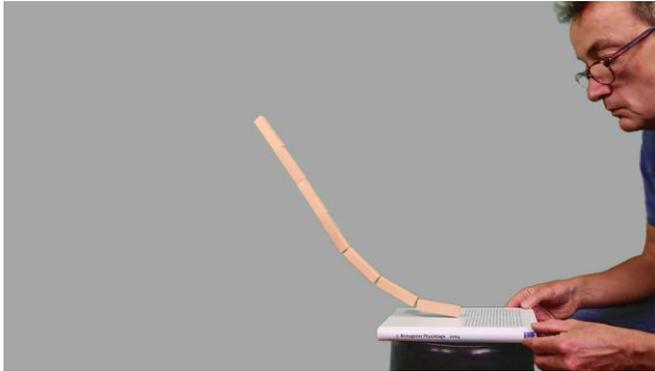
$$\begin{aligned} \hookrightarrow P &= M \cdot 2\pi \frac{1}{T} & T - \text{Umdrehungszeit} \\ &= M \cdot 2\pi \cdot \nu & \nu - \text{Drehzahl / Frequenz} \\ P &= M \cdot \omega & \omega - \text{Kreisfrequenz} \end{aligned}$$



e) Einstürzender Schornstein



Simulation mit Holzsteinen



(siehe auch: Kapitel Schwingungen)

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

13 Drehimpuls und
Drehimpulserhaltung

bisher: Drehbewegungen mit

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{I} \cdot \vec{\alpha} \quad \leftrightarrow \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$I = \int r^2 dm$$

$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I \vec{\omega}^2 \quad \leftrightarrow \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

2
o

$$\leftarrow \vec{p} = m \vec{v}$$

\leftarrow Drehimpuls-
erhaltung

Alltag:

- Kreisel
- Planetenbahnen
- rotierendes Eisläufer

 } Drehung bleibt

Beispiel:



\rightarrow Masse näher an Körper
 \hookrightarrow Rotation schneller



Definition: für einen Massepunkt m auf einer Kreisbahn ist der Drehimpuls definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

• mit $\omega = \frac{v}{r}$

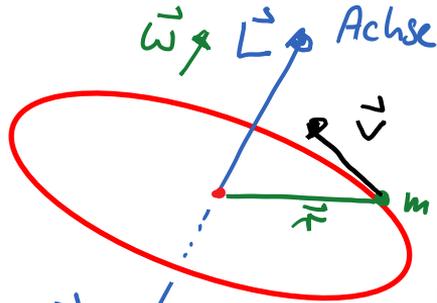
$$\hookrightarrow \vec{L} = m r^2 \cdot \vec{\omega}$$

• für Kreisbahn: $\vec{r} \perp \vec{v}$

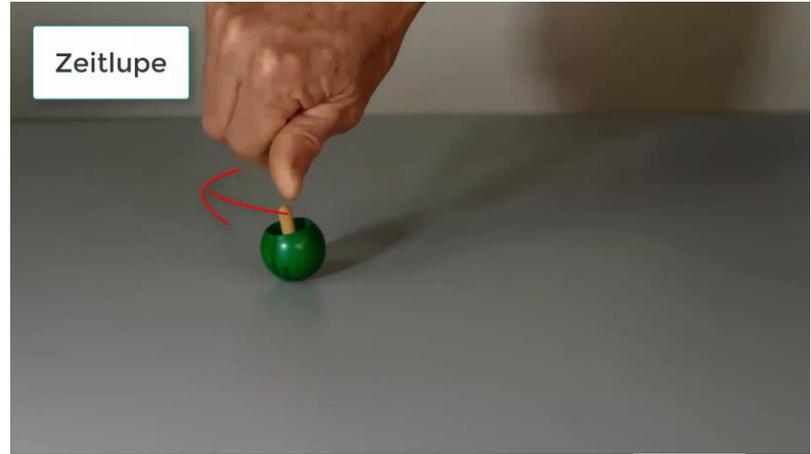
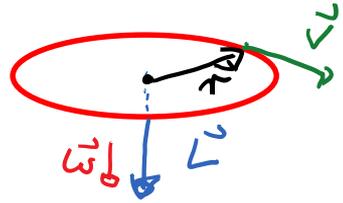
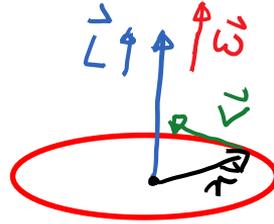
$$\hookrightarrow L = m \cdot r \cdot v$$

• \vec{L} steht entlang der Drehachse ($\parallel \vec{\omega}$)

$$\text{Einheit } [L] = [r] \cdot [p] = 1 \text{ m kg } \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1 \text{ Js}$$



• \vec{L} gibt die Drehrichtung an:



- Drehbewegung kann durch Drehmoment geändert werden:

$$\vec{M} \rightarrow \Delta \vec{\omega} \rightarrow \Delta \vec{L}$$

formal: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \vec{a}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

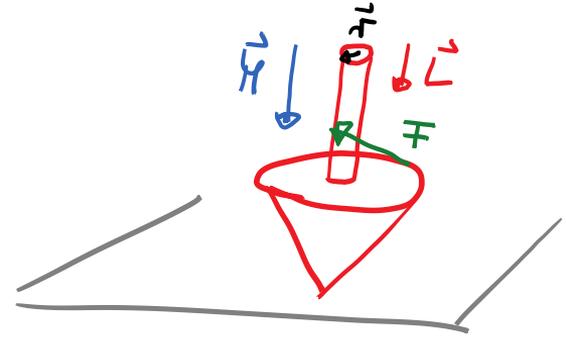
$$\text{mit } \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{r}}_{=\vec{v}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} = 0$$

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \vec{v})$$

↳ $\boxed{\vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{L}}$ das Drehmoment ist die zeitliche Ableitung des Drehimpulses

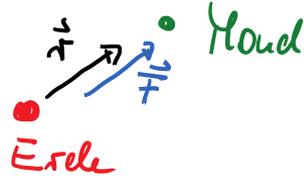
Beispiel: Kreisel



Drehimpulserhaltung:

- Betrachtung von Zentralkräften, d.h.
 $\vec{F} \parallel$ Verbindungslinie

Beispiel • Gravitation



- rotierende Massen an Seil
- Kraft zwischen Elektron & Proton

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad | \quad \vec{r} \times$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = m \vec{r} \times \vec{a}$$

"0, denn $\vec{r} \parallel \vec{F}$ "

$$0 = m \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{r}$$

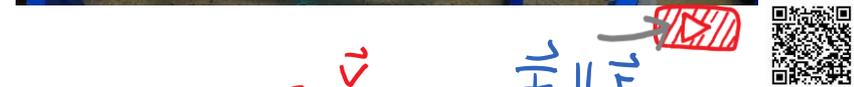
$$\text{mit } \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{r}) = \underbrace{\left(\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)}_{\substack{\text{"}\vec{v}\text{"} \\ = \vec{v} \times \vec{v} = 0}} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}_{= \vec{v} \times \vec{v} = 0}$$

$\hookrightarrow 0 = m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d}{dt} (m \vec{r} \times \vec{v})$
wenn die zeitliche Ableitung von $(\vec{r}) = 0$,
so ist $L = m \vec{r} \times \vec{v}$ konstant.

\hookrightarrow Erhaltungssatz des Drehimpulses:
Im Zentralfeld ist der Drehimpuls
 $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ ($\vec{p} = m \vec{v}$)
bzw. $\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}$
zeitlich konstant.

- Impulserhaltung: keine äußere Kräfte
 $\rightarrow p_a = \sum_i p_i = \text{konstant}$
- Drehimpulserhaltung: kein Drehmoment

Beispiel: Kugel an Faden
 Radius wird verkleinert



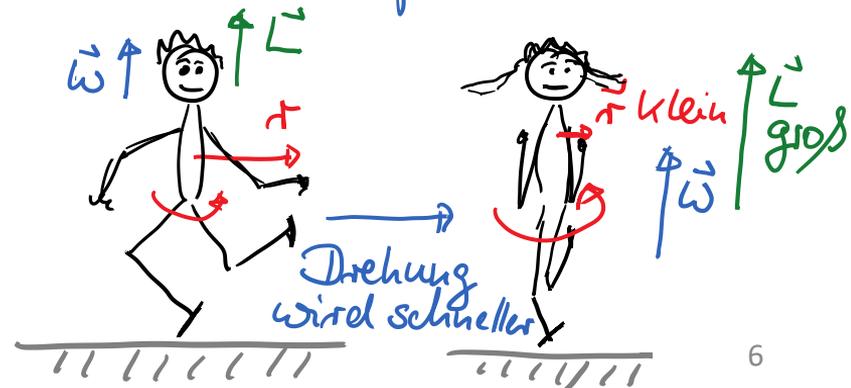
$\vec{F} \parallel \vec{r}$
 $\hookrightarrow \vec{M} = 0$
 \hookrightarrow Drehimpuls-
 erhaltung

$\rightarrow \omega$ wird größer, Energie?

Beispiel: Änderung von ω (Drehgeschw.)
 durch Radiusänderung



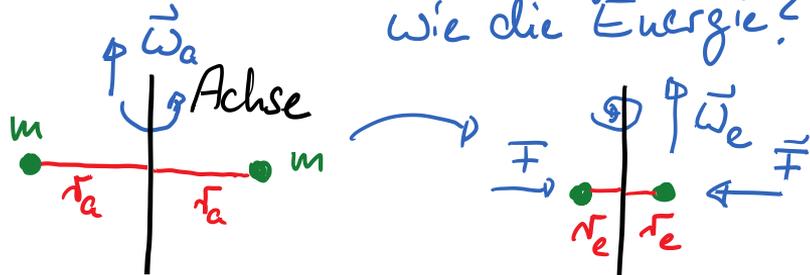
Idealisierter Eisläufer



Idealisierter Eisläufer:

- zwei Massen $m_1 = m_2 = m = 5 \text{ kg}$ drehen sich anfangs im Abstand $r_a = 0,5$ mit einer Frequenz $\nu_a = 0,5 \text{ Hz}$. Durch eine Zentralkraft wird der Radius auf den Endwert $r_e = 0,2 \text{ m}$ verkleinert.

→ Wie ändert sich die Drehfrequenz, wie die Energie?



Ansatz: $\vec{F} \parallel \vec{r}$ (Zentralkraft)

$$\hookrightarrow 0 = \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{L} \text{ ist konstant}$$

$$\rightarrow L_a = L_e \quad (\text{Richtung gleich})$$

$$I_a \omega_a = I_e \omega_e$$

$$\text{mit } I_a = m r_a^2 + m r_a^2 = 2m r_a^2 \quad I_e = 2m r_e^2$$

$$2m r_a^2 \cdot \omega_a = 2m r_e^2 \cdot \omega_e$$

$$\hookrightarrow \omega_e = \omega_a \cdot \left(\frac{r_a}{r_e}\right)^2 \quad \omega = 2\pi \nu$$

$$\nu_e = \nu_a \cdot \left(\frac{r_a}{r_e}\right)^2$$

$$\nu \sim r^2 \quad \nabla \circ$$

hier: $\nu_a = 0,5 \text{ Hz}$

$$\hookrightarrow \nu_e = 0,5 \text{ Hz} \cdot \left(\frac{0,5}{0,2}\right)^2 = 0,5 \text{ Hz} \cdot 6,25 = 3,125 \text{ Hz}$$

Drehung ca. 6x schneller! $\nabla \circ$

Gilt auch Energieerhaltung?

Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_e \cdot \omega_e^2 - \frac{1}{2} I_a \omega_a^2$$

$$= \frac{1}{2} 2m r_e^2 \cdot \omega_a^2 \cdot \left(\frac{r_a}{r_e}\right)^4 - \frac{1}{2} 2m r_a^2 \cdot \omega_a^2$$

$$= m r_a^2 \omega_a^2 \left[\underbrace{\left(\frac{r_a}{r_e}\right)^2}_{> 1} - 1 \right]$$

hier $r_a > r_e \rightarrow [\underbrace{\quad}_{> 1}] > 0$

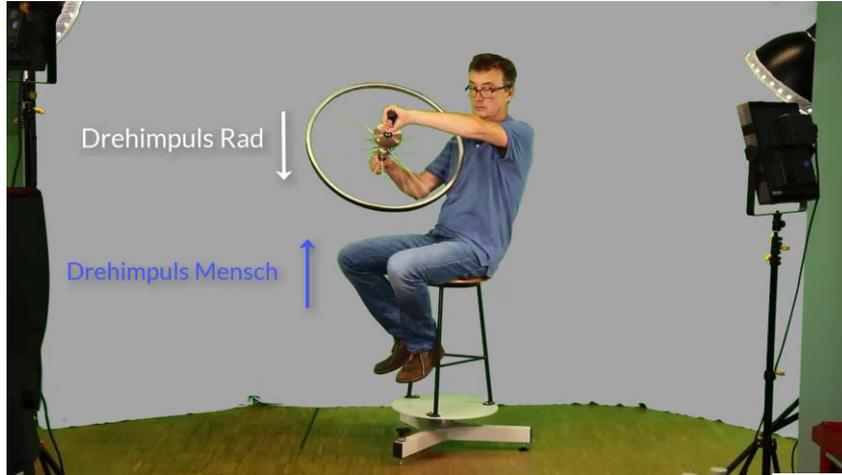
↳ Rotationsenergie wird größer!

Energieerhaltung gilt, denn

beim Verkleinern von r wird

Arbeit $W = \int_{r_a}^{r_e} + dr$ verrichtet

Drehimpulserhaltung \rightarrow Kreisel



- der Gesamt Drehimpuls bleibt erhalten, er kann aber zwischen verschiedenen Teilen übertragen werden.

Analogie der Gleichungen für

Translation

Rotation

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

keine äußere Kraft
 \rightarrow Impulserh.

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$I = \int r^2 dm$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{\vartheta}$$

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$$

kein äußeres Drehmoment
 \rightarrow Drehimpulserhaltung

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

14a. Drehimpuls:
Beispiele

Erhaltungssatz des Drehimpulses:

Im Zentralfeld ist der Drehimpuls

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (\vec{p} = m\vec{v})$$

zeitlich konstant.

mit $\omega = \frac{v}{r}$

L_0

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = m r^2 \vec{\omega} \quad \text{ein Massepunkt}$$

$$\vec{L} = \sum m_i r_i^2 \vec{\omega} \quad \text{viele Massepunkte}$$

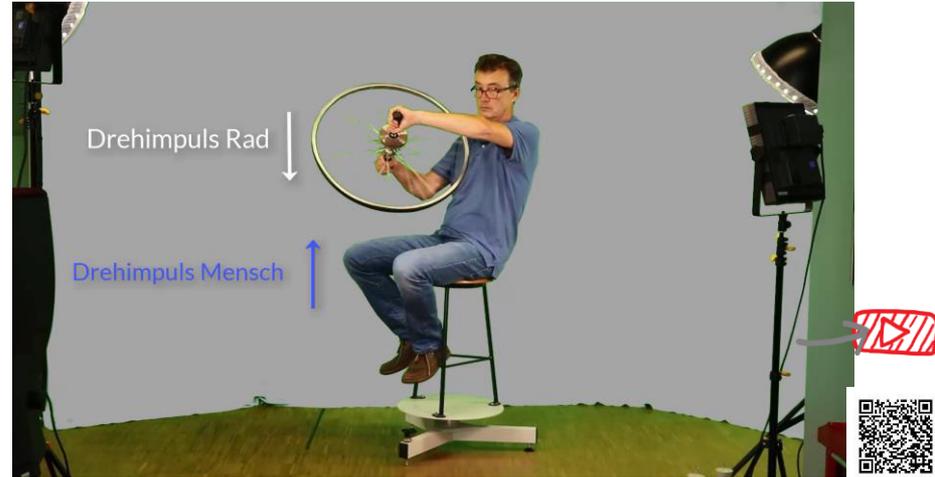
bzw.

$$\vec{L} = \int r^2 dm \vec{\omega} = \vec{I} \vec{\omega} \quad \text{Masseverteilung}$$

Zentralfeld: Drehmoment $\vec{K} = 0$

allgemein: $\vec{K} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

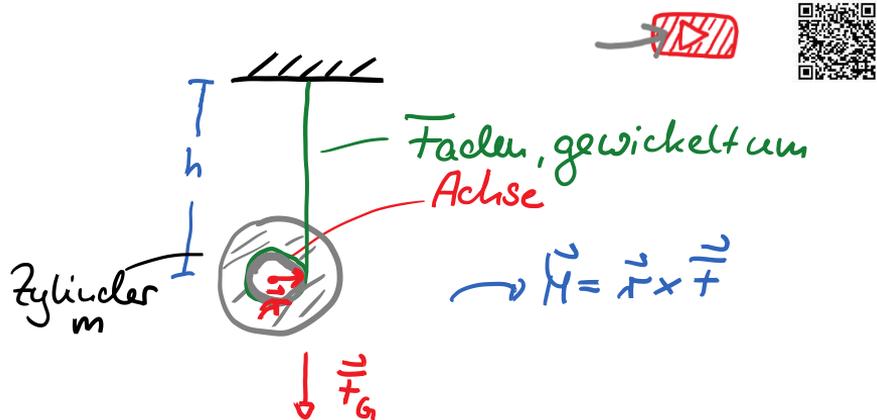
a) Beispiel: Drehstuhl



zur Änderung von \vec{L} ,
ist ein Drehmoment not-
wendig aus den
Armen

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \text{constant}$$

b) JoJo:



$$\vec{F}_G \rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$$

Achsradius

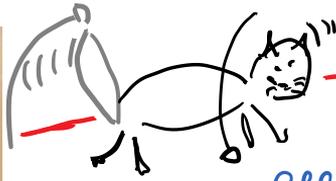
$$\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \rightarrow \Delta\vec{L} = \int \vec{M} dt = I \Delta\vec{\omega}$$

- Einfachste Beschreibung durch Energiebetrachtung:
 oben: potentielle Energie $\bar{E}_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$
 (Wechsel)
 unten: $\Delta\bar{E}_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = m \cdot g \cdot h$

c) Katzen fallen auf die Füße



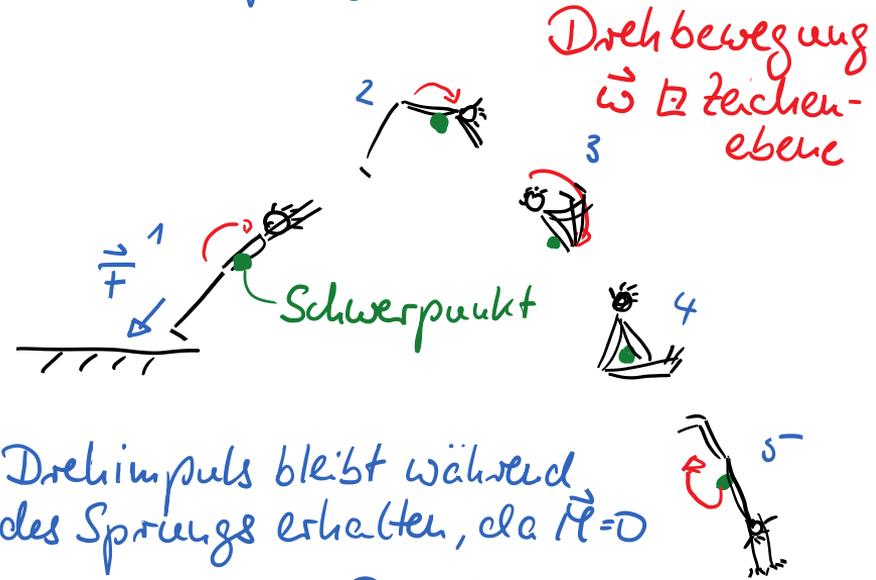
<https://www.youtube.com/watch?v=RtWbpyJqrU> SmarterEveryDay



Rotations-
achse

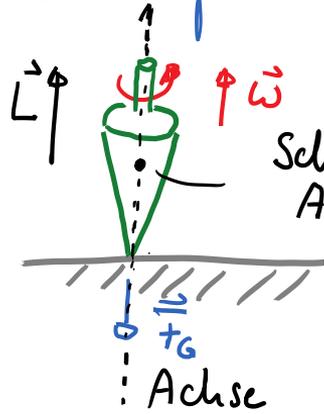
gegenläufige Bewegung
von Körper und Schwanz

d) Wasserspringer



- Drehimpuls bleibt während des Sprungs erhalten, da $\vec{M} = 0$
- Schwerpunkt - Parabelbahn
- Anziehen der Beine & Arme
 → I wird kleiner → ω größer
 → schnelles Drehen

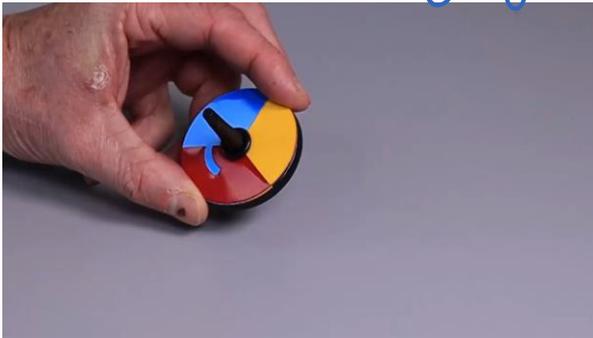
e) Drehimpulserhaltung & Kreisel:



Schwerpunkt auf Achse

ohne Reibung:
Drehbewegung
bleibt erhalten

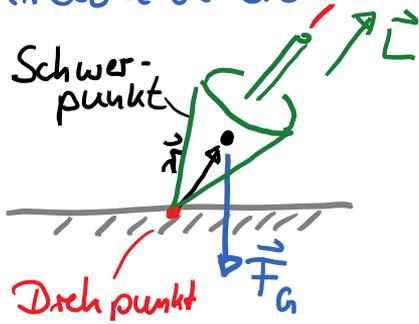
Reale Kreiselbewegungen: Komplizierte
Achsbewegung



Gewichtskraft
 $\vec{F}_G \rightarrow \vec{H}$



Kreisel d Gewichtskraft: Präzession



↳ \vec{F}_G bewirkt ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$$

von Dreh- zum Schwerpunkt

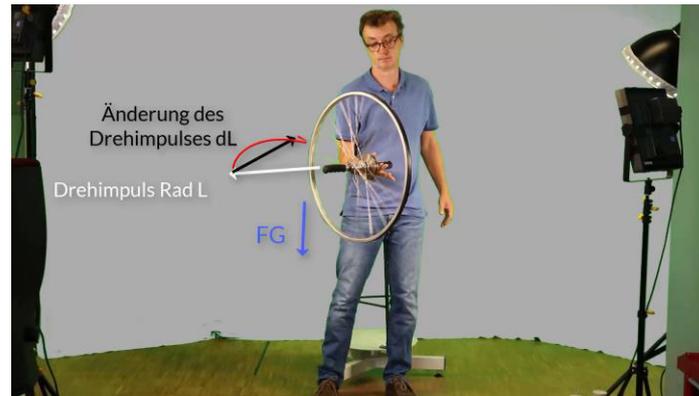
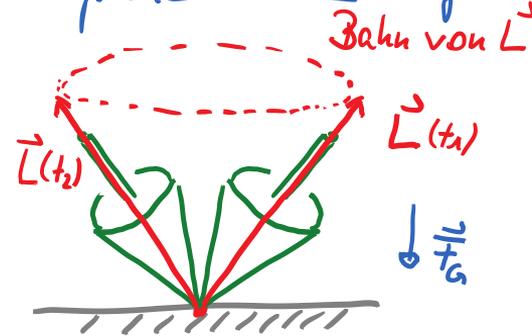
$$= \frac{d\vec{L}}{dt}$$

• da $\vec{r} \parallel \vec{L}$ ist, so ist $\vec{r} \times \vec{F}_G \perp \vec{L}$

↳ Änderung $\frac{d\vec{L}}{dt} \perp \vec{L} \quad \nabla$

→ $|\vec{L}|$ bleibt gleich, aber die Richtung ändert sich

$d\vec{L} \perp \vec{L} \quad \nabla$... daher bewegt sich die Spitze von \vec{L} auf einer Kreisbahn

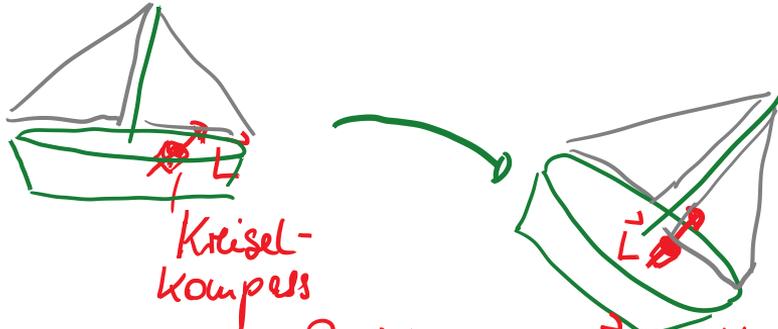


Präzessionsbewegung:



f) Kreiselkompass

auf Schiffen, Flugzeug: Drehkörper mit
großem L , kardanaufgehängt



Richtung von L bleibt,
unabhängig von Bewegungen
des Schiffs

g) Spin von Elektron, Neutron, Proton

- Elementarteilchen besitzen einen Drehimpuls \equiv Spin s

- für Elektron, Proton & Neutron

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$$

mit dem Planck'schen Wirkungsquantum
 $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

- im Atom: Elektron um Kern auf Bahnen
→ Bahndrehimpuls

↳ Kernspintomographie

- für Licht (-teilchen): Photonen $s = 1 \frac{h}{2\pi}$

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl



15. Das Gravitationsgesetz

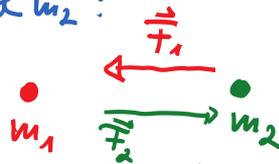
Gravitation = Massenanziehung

bisher: an der Erdoberfläche wirkt auf Masse m eine Kraft bzw. Beschleunigung

$$\vec{F} = m \cdot a = m \cdot g \quad \text{mit } g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ursache: Masse der Erde

gesucht: allgemeines Kraftgesetz zwischen zwei Massen m_1 & m_2 :



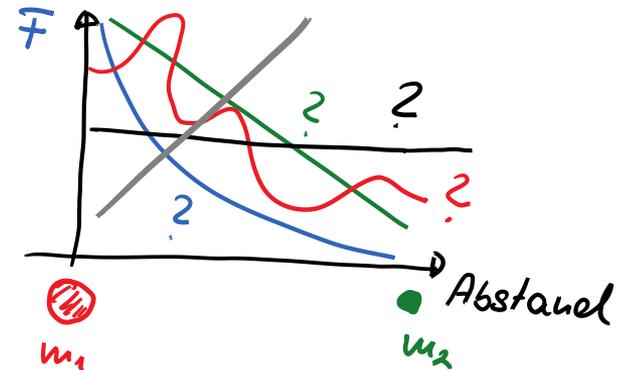
• alle Körper fallen gleich schnell

$$\rightarrow F \sim m_1$$

• Reaktionsprinzip $F \sim m_2$

• Richtung von \vec{F} : \parallel zur Verbindungsachse

• Abstandsabhängigkeit?

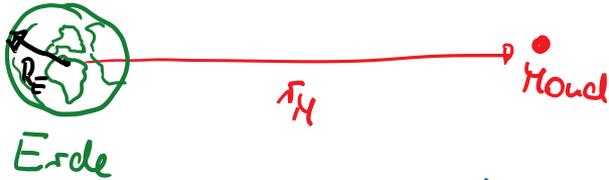


↳ Newton

Newton folgerte aus astronomischen Beobachtungen:

i) an Erdoberfläche: $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
Radius $R_E = 6370 \text{ km}$

ii) Mond hat Umlauf-Bahnradius $r_H = 60 R_E$



iii) Beschleunigung / Kraft von Mond auf Erde
aus Zentrifugalbeschl. $a_H = r_H \cdot \omega_H^2$
mit Kreisfrequenz der Mondbahn $\omega_H = \frac{2\pi}{T_H}$

Umlaufzeit des Mondes $T_H = 27,3 \text{ Tage}$
 $= 27,3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}$
 $\approx 2,36 \cdot 10^7 \text{ s}$

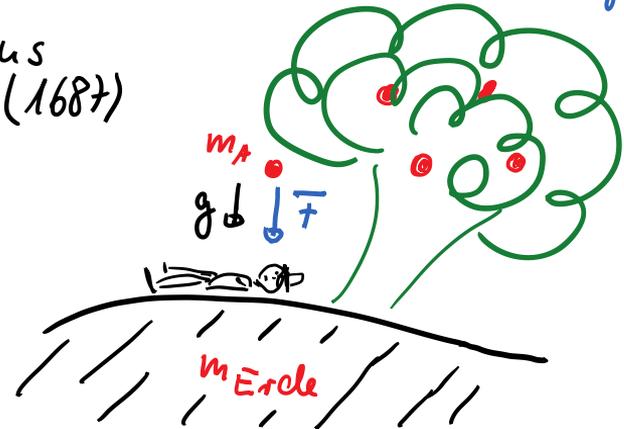
$$\hookrightarrow a_H = 60 \cdot 6370 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \left(\frac{2\pi}{2,36 \cdot 10^7 \text{ s}} \right)^2$$
$$\approx 2,73 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\hookrightarrow \text{Verhältnis } \frac{g}{a_H} = \frac{9,81}{2,73 \cdot 10^{-3}} = 3593 \approx 3600$$

Newtons Folgerung:
da $r_H = 60 R_E$

$\hookrightarrow F \sim \frac{1}{r^2}$ Abstandsgesetz
der Gravitationskraft

Newtons
Apfel (1687)



→ Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_G \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

mit Gravitationskonstante $G = 667 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$

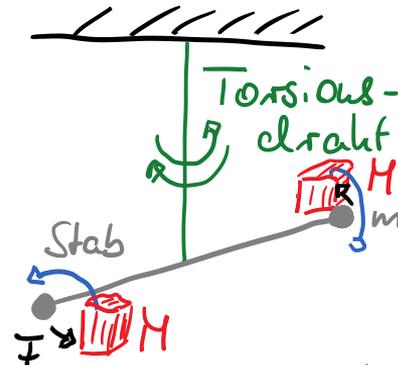
G ist abhängig vom Einheitensystem und muß gemessen werden.

Beispiel: Gravitationskraft zwischen zwei Äpfeln ($m_1 = m_2 = 0,2 \text{ kg}$) im Abstand $r = 0,5 \text{ m}$

$$\hookrightarrow \vec{F}_A = G \cdot \frac{(0,2 \text{ kg})^2}{(0,5 \text{ m})^2} = 1,067 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

extrem klein ▽

Cavendish-Experiment zur Messung von G (1798)



- Stab (2m) mit Massen m ($= 0,7 \text{ kg}$) hängt an Draht
- Position der Massen M ($= 158 \text{ kg}$) wird relativ zu m geändert → Kraftrichtung ändert sich → Torsion / Drehung des Drahtes
- Kraft kann bestimmt werden
- $G = \frac{\vec{F}_G}{m \cdot M} \cdot r^2$

Gravitationskraft, -feld und -potential

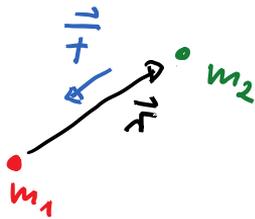
- Gravitation ist symmetrisch bezüglich m_1, m_2

↳ m_1 erzeugt ein Kraftfeld, das auf m_2 wirkt, wobei die Richtung auf m_1 zeigt

↳ ebenso für m_2 auf m_1

$$\vec{F} = -G \cdot \underbrace{\frac{m_1}{r^2}}_{\text{Betrag des Feldes}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{r}}_{\text{Einheitsvektor entlang Verbindungs-}} \cdot m_2$$

entgegen \vec{r}



Einheitsvektor entlang Verbindungs-
linie

↳ $\vec{F} = m_2 \cdot \vec{g}$ mit Gravitationsfeld

$$\vec{g} = -G \frac{m_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

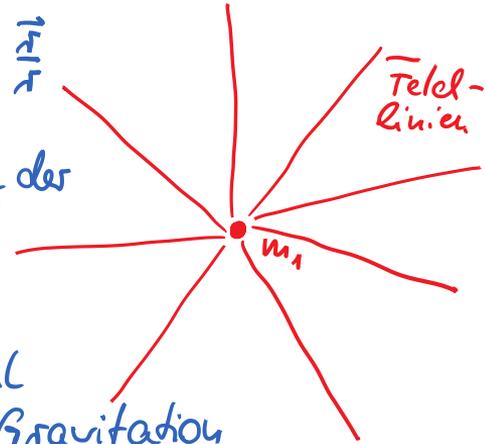
aus „actio = reactio“

$$\vec{F} = -G \frac{m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot m_1$$

Darstellung durch Feldlinien

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

- Feldlinien entlang der Kraftrichtung, also radial
- Dichte proportional zur Stärke der Gravitation
- Kugelsymmetrisch, also im Raum



Warum ist Gravitationskraft $\sim \frac{1}{r^2}$?

... warum nicht $\sim \frac{1}{r}$ oder $\sim \frac{1}{r^{2,1}}$?

Modell der Feldlinien: ausgehend vom m bis in unendliche Entfernung

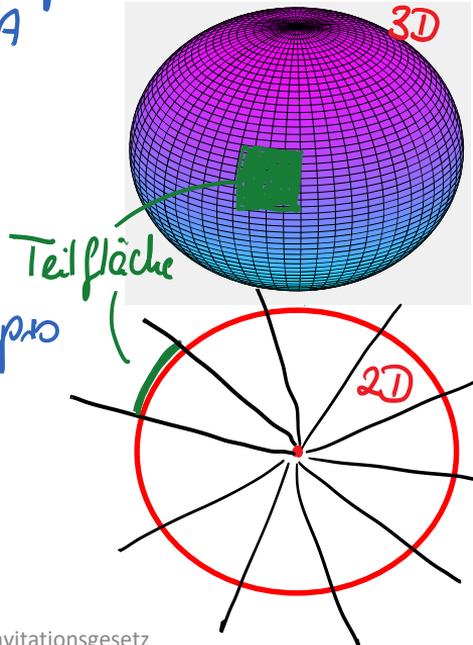
↳ Gravitationskraft „verteilt“ sich auf Oberfläche A

Kugeloberfläche:

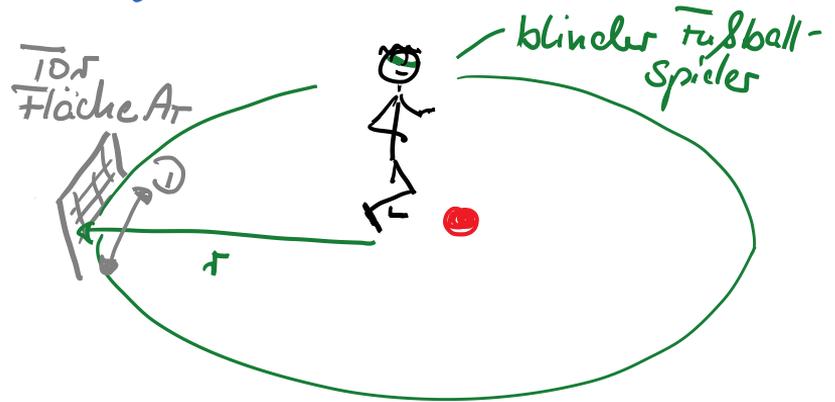
$$A_k = 4\pi \cdot r^2$$

$$A_k \sim r^2$$

Anzahl der Feldlinien pro Fläche nimmt mit $\frac{1}{r^2}$ ab



Analogie:



Wahrscheinlichkeit W für Torabschluss:

- nur horizontale Schüsse: $W = \frac{D}{2\pi r} \sim \frac{1}{r}$
Verteilung auf Kreis

- in 3D, Schuss auch nach oben:

$$W = \frac{A_T}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

Potentielle Energie der Gravitation:

Definition: $E_{\text{pot}}(r) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Bezugspunkt im Unendlichen
(willkürliche Definition)

$$\begin{aligned}
 E_{\text{pot}}(r) &= - \int_{\infty}^r -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} && \vec{r} \parallel d\vec{r} \\
 &= m_2 \int_{\infty}^r G \cdot \frac{m_1}{r^2} dr \\
 &= m_2 \cdot \left(-G \frac{m_1}{r}\right) \Big|_{\infty}^r = m_2 \left(-G \frac{m_1}{r}\right) \\
 &= m_2 \cdot \varphi(r)
 \end{aligned}$$

Potential $\varphi(r) = -G \frac{m_1}{r}$,
das von m_1 erzeugt wird

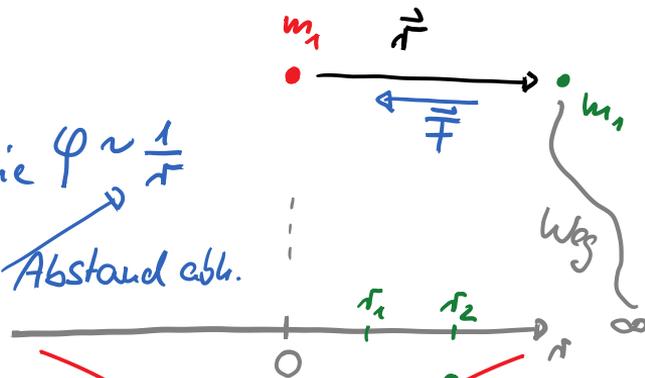
↳ Gravitation eines Massepunktes:

Kraft $F_G \sim \frac{1}{r^2}$

Richtung: entgegen \vec{r}

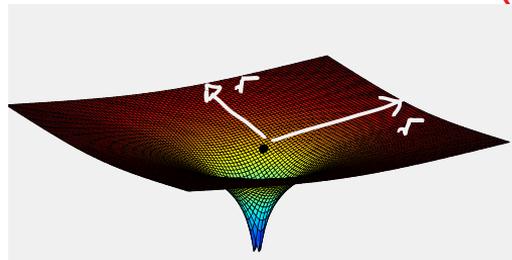
Potential/
Pot. Energie $\varphi \sim \frac{1}{r}$

nur vom Abstand abh.



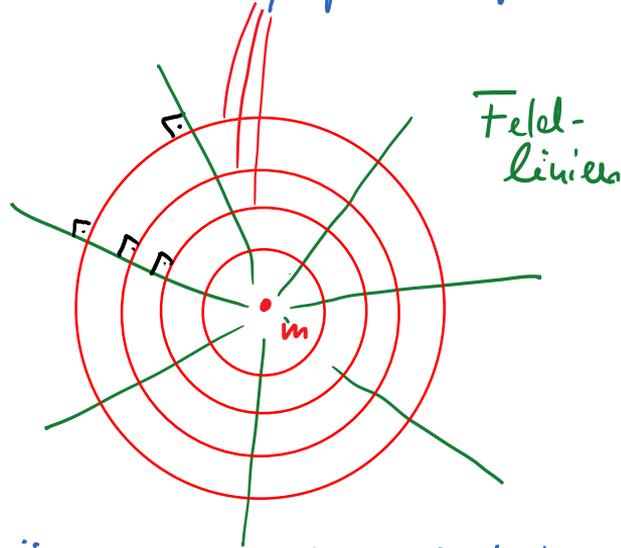
Potential-
"trichter"

$\sim \frac{1}{r}$
Energie/Arbeit
notwendig, um
 m_1 von r_1 nach
 r_2 zu bewegen



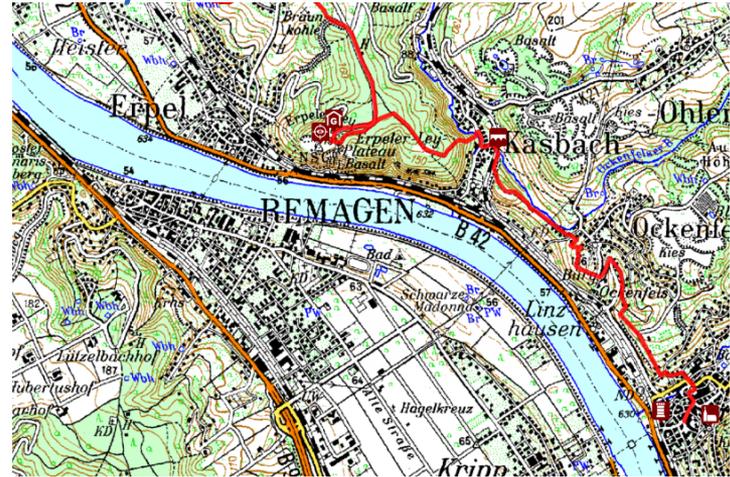
- für Punktmasse:
 $F(r)$ und $\varphi(r)$ sind kugelsymmetrisch

↳ alle Punkte mit gleichem r haben
gleiches Potential ↔ Äquipotentialfläche



→ keine Änderung der potentiellen
Energie auf Äquipot.-flächen

Höhenprofil-Linien auf Karten:
Äquipotentiallinien in 2D



Beispiele zur Gravitation:

- a) Wie groß ist die Gravitation bzw. Erdbeschleunigung auf der Erdoberfläche und auf dem Mount Everest?

Annahme: Erde ist kugelförmig + M.E.

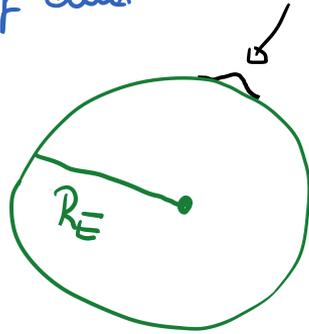
$$R_E = 6370 \text{ km}$$

$$M_E = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

• Erdoberfläche: $\vec{F}_{G,0} = -m \cdot G \frac{M_E}{R_E^2}$

bzw. $a_0 = \frac{\vec{F}_{G,0}}{m} = -G \cdot \frac{M_E}{R_E^2} = -9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

ca. 0,2% größer als der bisher verwendete Wert $g = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



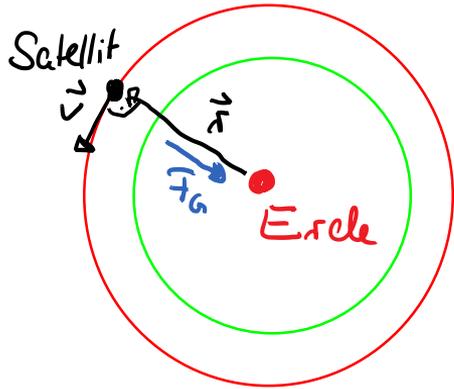
Erklärung: Erde ist keine perfekte Kugel und die Dichte ist inhomogen

- in Höhe des Mount Everest: $h = 8848 \text{ m}$

$$a_{KE} = -G \cdot \frac{M_E}{(R_E + h)^2} = -9,805 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

→ für kleine Höhenänderungen: g kann als Konstante angenommen werden.

b) Satellit auf Kreisbahn um Erde:
Zusammenhang von Umlaufzeit T
und Bahnradius r



Ansatz:

Gravitationskraft = Zentripetalkraft

$$m \cdot G \cdot \frac{M_E}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad \leftarrow \text{Bahngeschw. } v$$

$$v^2 = G \cdot \frac{M_E}{r}$$

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_E}{r}}$$

$$\begin{aligned} \text{Bahngeschwindigkeit } v &= \frac{\text{Umfang}}{\text{Umlaufzeit}} \\ &= \frac{2\pi r}{T} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{G \cdot M_E}}$$

$T \sim r^{3/2} \rightarrow$ große Bahn, lange Umlaufzeit

Beispiel: ISS

Höhe ca. 400 km

$$\hookrightarrow r = (6370 + 400) \text{ km}$$



$$\hookrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(6770 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}}$$

$$= 5541 \text{ s} = 92 \text{ min}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = 7,67 \text{ km/s}$$

Beispiel: geostationärer Satellit
stabile Position über einem Punkt der
Erde (z.B. für Fernsehprogramme)
 \rightarrow Winkelgeschw. von Satellit und Erde gleich

$$\hookrightarrow T_{gs} = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$$

\hookrightarrow Bahnradius r_{gs} aus

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{G \cdot M_E}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{G \cdot M_E}$$

$$r_{gs} = \left(\frac{T_{gs}^2 \cdot G \cdot M_E}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 4,225 \cdot 10^7 \text{ m} = 4,225 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Höhe über Erde $h = r_{gs} - R_E$

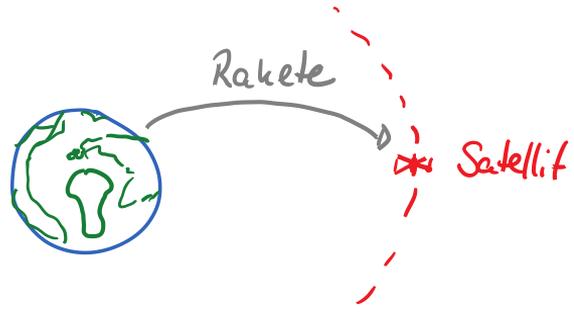
$$= 4,225 \cdot 10^4 \text{ km} - 0,637 \cdot 10^4 \text{ km}$$

$$= 3,588 \cdot 10^4 \text{ km}$$

$$= 35880 \text{ km}$$



c) Gesamtenergie eines Satelliten



Transport des Satelliten von Erde auf Bahn

Gesamtenergie $E_G = E_{kin} + E_{pot}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{immer } > 0} - \underbrace{G \frac{M_E \cdot m}{r}}_{< 0, \text{ da Bezugspunkt } \infty}$$

aus b) $v = \sqrt{G \frac{M_E}{r}}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow E_G &= \frac{1}{2} m G \frac{M_E}{r} - G \cdot \frac{M_E}{r} \\ &= -\frac{1}{2} m G \frac{M_E}{r} = +\frac{1}{2} \bar{E}_{pot} \end{aligned}$$

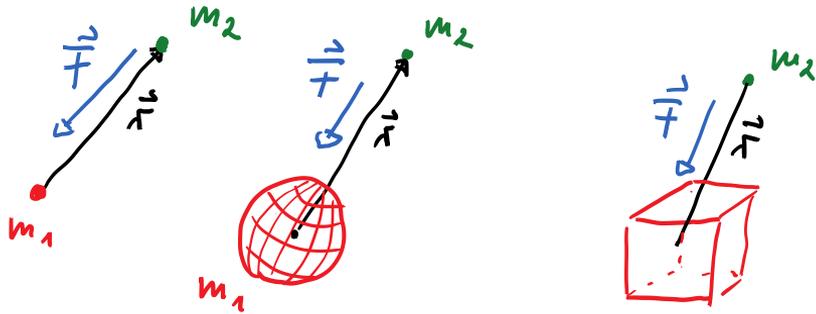
Bindungsenergie < 0

- für jede Kreisbahn ist im Grav.-feld die Gesamtenergie = $\frac{1}{2}$ pot. Energie (Virialsatz)

d) Gravitation einer Punktmasse oder eines Kugel

bisher: $\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ \leftarrow punktförmig

Welche Auswirkung hat die Massenverteilung?



Ist \vec{F} unabhängig von Massenverteilung?

Superpositionsprinzip:

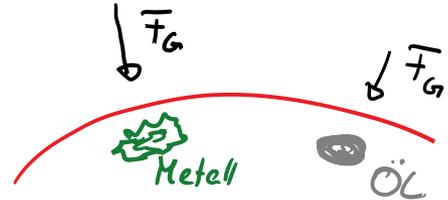
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = G \cdot m_2 \sum_i \frac{\Delta m_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

bzw.
$$\vec{F} = G \cdot m_2 \int \frac{dm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

\rightarrow Masseverteilung bestimmt Gravitationskraft

Beispiel: Erde

hohe Dichte
 $\rightarrow \vec{F}_G$ groß



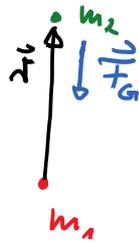
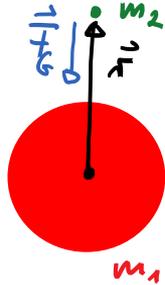
\rightarrow Detektion von Öl oder Metallen durch Gravitation (Exploration)

Sonderfall: homogene Kugel

- außerhalb der Kugel

Gravitation ist identisch mit der eines Massepunktes!

$$\vec{F}_{ka} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$



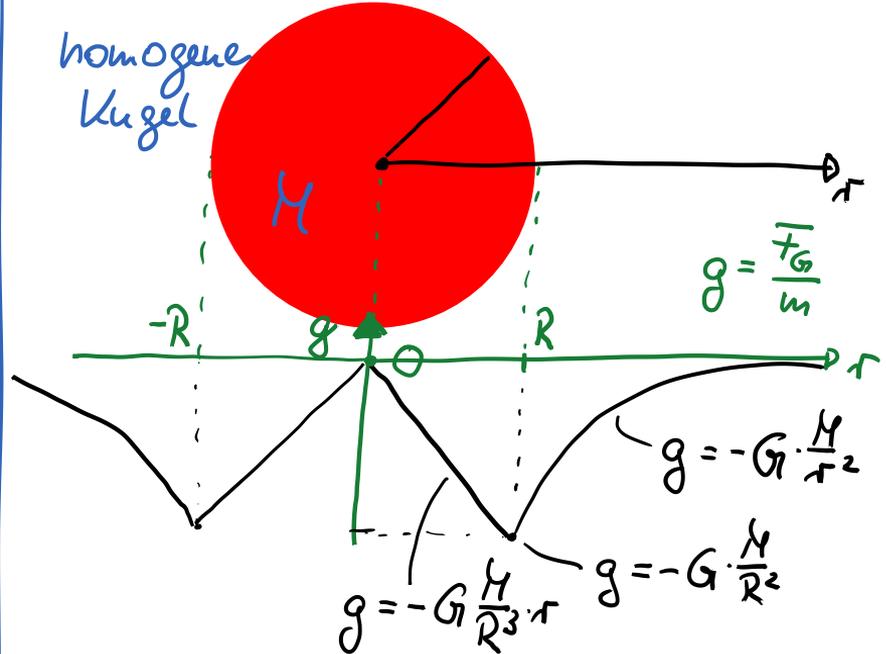
(Beweis \rightarrow Literatur)

- im Zentrum der Kugel

$F_{kz} = 0$, aus Symmetriegründen

- innerhalb der Kugel:
lineare Zunahme von \vec{F}_G

homogene Kugel



\rightarrow Näherung für Erde: Punktmasse

Sonderfall: Hohlkugel; Masse auf Kugelschale

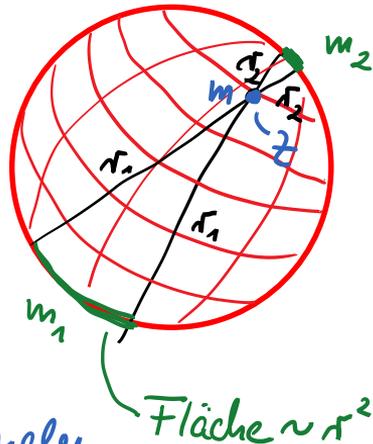
Betrachtung für Massen m_1 & m_2 , die durch Segmente auf der Kugelschale bestimmt werden

r_1 & r_2 : Abstand zu \mathcal{Z}

↳ aus Symmetriegründen

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

↳ Grav.-Kraft auf m in \mathcal{Z}

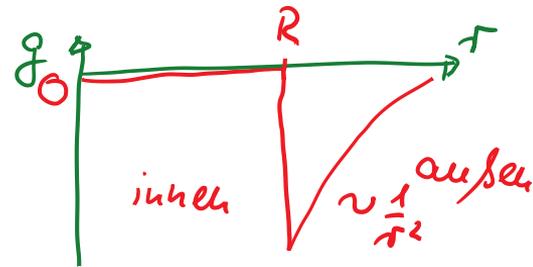


$$\vec{F}_1 \sim \frac{m_1}{r_1^2} \quad \vec{F}_2 \sim \frac{m_2}{r_2^2}$$

$$\frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2} = \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \frac{r_2^2}{m_2} = 1 \quad \text{für den Betrag!}$$

Richtung: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (entgegengesetzt)

↳ Gesamtkraft innerhalb der Hohlkugel ist 0!



e) Kosmische Geschwindigkeiten

- 1. kosmische Geschw. v_{k1}

Masse wird horizontal geworfen und fliegt reibungsfrei.

für v_{k1} fliegt sie kreisförmig um die Erde

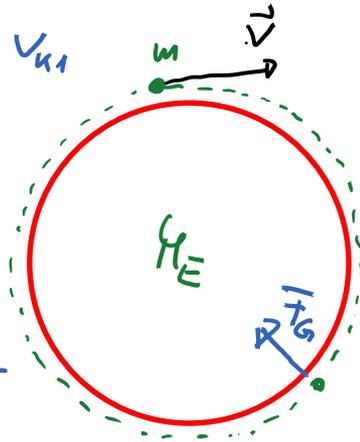
Ansatz: $\vec{F}_G = \vec{F}_Z$

$$m \cdot G \frac{M_E}{R_E^2} = m \frac{v_{k1}^2}{R_E}$$

(siehe oben)

$$v_{k1} = \sqrt{G \frac{M_E}{R_E}}$$

$$= 7,91 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,84 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



- 2. kosmische Geschw. v_{k2}

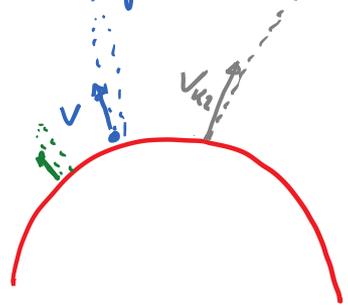
eine Masse, die mit v_{k2} senkrecht auf der Erde geworfen wird, fällt nicht auf die Erde zurück

Ansatz: kin. Energie am Anfang = Δ pot. Energie ($R_E \rightarrow \infty$)

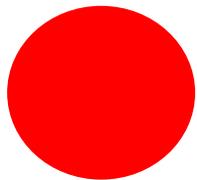
$$\frac{1}{2} m v_{k2}^2 = G m \frac{M_E}{R_E}$$

$$v_{k2} = \sqrt{2G \frac{M_E}{R_E}} = \sqrt{2} \cdot v_{k1}$$

$$= 11,2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$



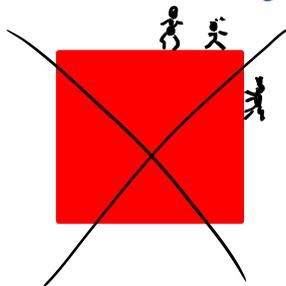
f) Planeten & Sterne sind kugelförmig



• Gravitation zwischen
Massekitchen

→ Kugel ist der

Zustand geringster potentieller Energie

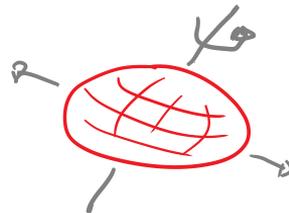


„Würfel-Planet“ gibt es
daher nicht

g) Form der Erde

keine perfekte Kugel, da

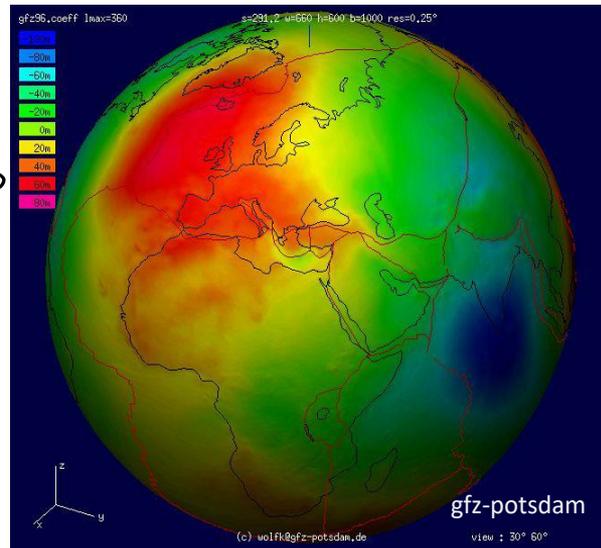
- Eigendrehung führt
zu Ellipsenform



- Dichte von Schichten ist unterschiedlich

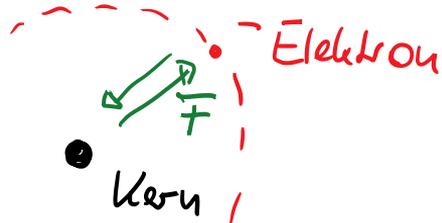
-100m →

+60m →



h) Vergleich der Kräfte: Massen
& elektrische Ladungen q

• im Atom



Gravitations-
kraft

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Elektrostatische
Kraft

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Kraft zwischen Kern und Elektronen
durch elektrische Ladung ca. 10^{40} mal
größer als zwischen Massen ∇

• Sterne & Planeten: elektrisch neutral
→ Wirkung der Gravitation dominiert

Physik: Mechanik

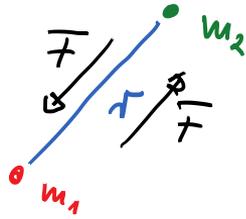
Prof. Dr. Matthias Kohl

16. Beispiele für Gravitation:
Kepler-Gesetze & Ebbe und Flut

Gravitation:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$g = G \cdot \frac{m}{r^2}$$



- Bewegung der Sterne und Planeten wird bestimmt durch Gravitation

Beispiele:

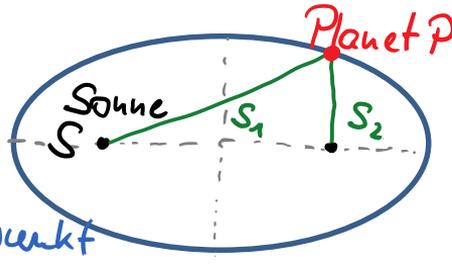
- Planetenbahnen
- Entstehung von Ebbe und Flut

a) Planetenbahnen: Kepler-Gesetze

- in der Renaissance: genaue Beobachtung der Planetenbewegungen

J. Kepler folgerte 1618:

1 Planeten P bewegen sich auf Ellipsen, die Sonne befindet sich in einem Brennpunkt



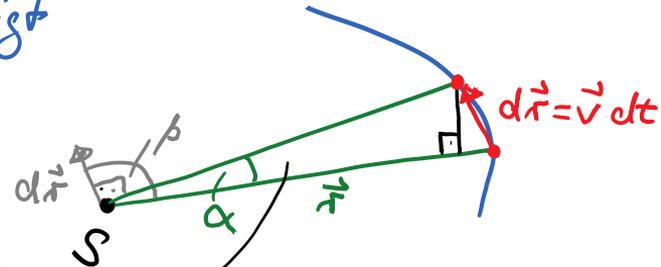
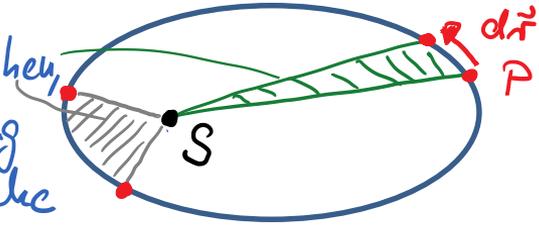
Ellipse: $s_1 + s_2 = C$

2. Radiusvektor von S zu P überstreicht in gleicher Zeit die gleiche Fläche

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Bahnachsen

zu 1) Beobachtung!

zu 2) gleiche Flächen, wenn Bewegung von P die gleiche Zeit benötigt



$$\frac{1}{2} r \cdot v \cdot \sin \beta \cdot dt = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|\vec{L}|}{m} dt \quad \text{mit Drehimpuls } \vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

• im Zentralfeld: Drehimpulserhaltung

$$\hookrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} \text{ bleibt gleich}$$

↑ Fläche/zeit \equiv Drehimpulserhaltung

zu 3)

Beweis für Kreisbahn als Sonderfall der Ellipse

Zentripetalkraft = Gravitationskraft

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

$$v^2 = G \frac{M}{r}$$

mit $v = \frac{2\pi r}{T}$ wird dies zu

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G \frac{M}{r}$$

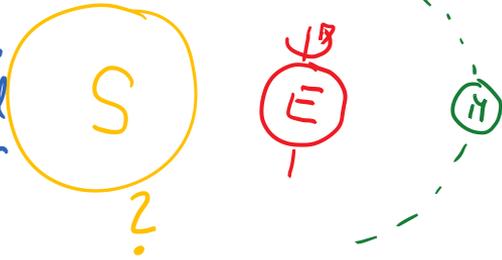
$$T^2 = 4\pi^2 r^3 \cdot \frac{1}{GM}$$

$$T^2 \sim r^3$$

↳ Kepler-Gesetze im Einklang mit Mechanik

Ebbe und Flut (Gezeiten):

- Gezeiten hängen vom Mond und der Drehung der Erde ab!



Aber: Warum gibt es alle ca. 12 Stunden eine Flut? Wie ist die Sonne beteiligt?

Daten

	Masse/kg	Abstand zur Erde/km	Radius/km
Sonne	$m_S = 2 \cdot 10^{30}$	$r_S = 149 \cdot 10^6$	$R_S = 696000$
Erde	$m_E = 6 \cdot 10^{24}$	—	$R_E = 6370$
Mond	$m_M = 7,3 \cdot 10^{22}$	$r_M = 0,384 \cdot 10^6$	$R_M = 1738$

Gravitationsfelder:

- von Sonne auf Erde:

$$g_S = -G \cdot \frac{m_S}{r_S^2} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} \text{kg}}{(149 \cdot 10^6 \text{m})^2} = -0,0060 \text{ N/kg}$$

- von Mond auf Erde:

$$g_M = -G \cdot \frac{m_M}{r_M^2} = -0,0000033 \text{ N/kg}$$

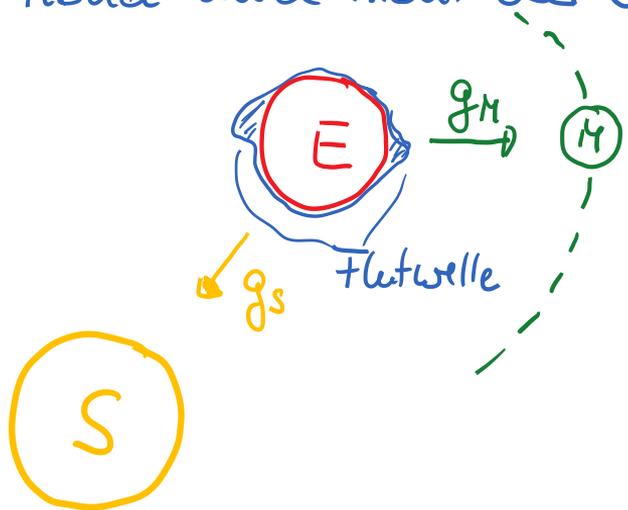
- von Erde auf Erdoberfläche

$$g_E = -9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \quad \left(1 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$\nabla \quad g_S \approx 180 \cdot g_M \ll g_E \quad \nabla$$

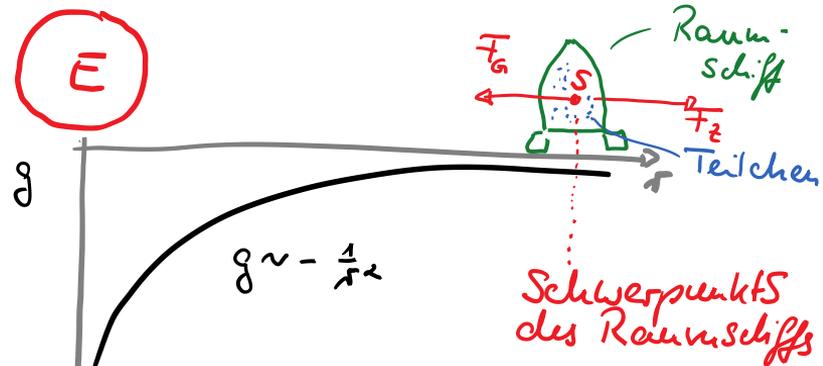
Gravitation der Sonne ist viel größer als die des Mondes (und ca. $\frac{1}{1000}$ von g_E)

→ Warum folgt die Flut dem Mond und nicht der Sonne?



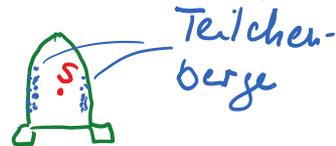
Dazu Nebenbetrachtung

• Raumschiff auf Kreisbahn um Erde



Schwerpunkt S: Gleichgewicht $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$

- für im Raumschiff verteilte Teilchen (z.B. Popcorn)
 - ... stärkere Anziehung durch \bar{F}_1 auf Erdsseite
 - ... schwächere " auf der Außenseite
- ↳ Teilchen sammeln sich innen und außen!



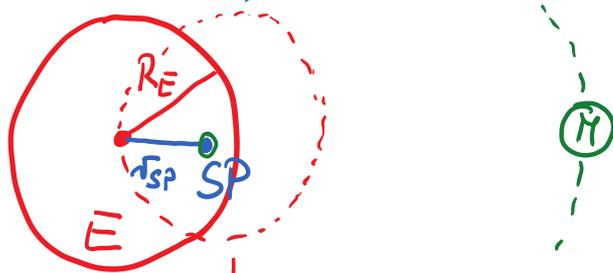
Bewegung des Systems Erde-Mond um Schwerpunkt:

$$r_{SP} = \frac{1}{m_E + m_M} \cdot (m_M \cdot r_M + m_E \cdot 0)$$

Bezugspunkt: Erdmitte

$$= \frac{1}{6,07 \cdot 10^{24} \text{ kg} + 0,73 \cdot 10^{24} \text{ kg}} \cdot 384 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot 0,73 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

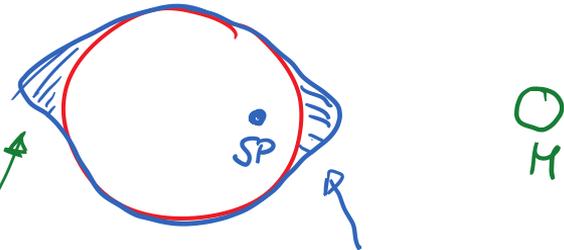
$$= 4618 \text{ km} < R_E = 6370 \text{ km}; \text{ Schwerpunkt liegt innerhalb der Erde}$$



Erddrehung

↳ Erde & Mond drehen sich um gemeinsamen Schwerpunkt

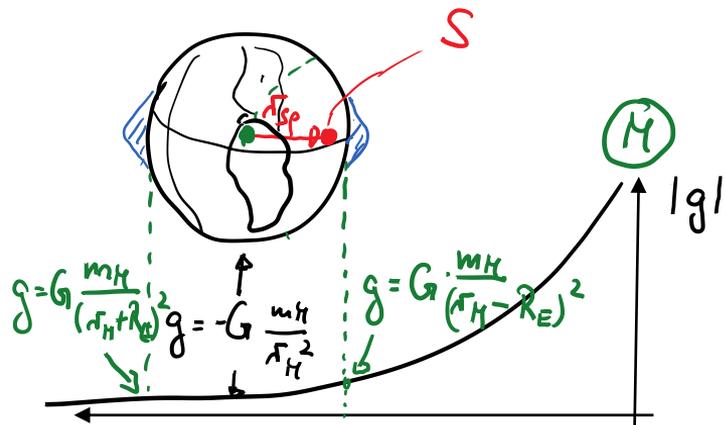
• für Erdmittelpunkt: Gravitationskraft durch Mond = Zentripetalkraft



• auf der dem Mond abgewandten Seite: Abstand zu SP groß → Zentrifugalkraft groß - Flut

• auf der dem Mond zugewandten Seite: kleiner Abstand zum Mond → je groß → Wasser wird angezogen - Flut

zwei Flutwellen!



↳ Differenz der Gravitationsfelder führt zu Gezeiten → Beschleunigung

$$a_{\text{Gezeiten}} = G \cdot m_M \left(\frac{1}{(r_M + r_E)^2} - \frac{1}{r_M^2} \right)$$

Näherung über die Steigung (lineare Entwicklung)

$$a_{\text{Gezeiten}} = \frac{dg}{dr} \Big|_{r_M} \cdot r_E = -2g \cdot m_M \frac{1}{r_M^3} \cdot r_E$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow a_{\text{Gezeiten}, M} &= -2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{1}{(0,384 \cdot 10^6 \text{ km})^3} \\ &= -1,09 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right) \\ &\ll g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

! Beschleunigung durch die Gezeiten des Mondes ist viel kleiner als Erdbeschleunigung !

$$\frac{a_{\text{Gezeiten}, M}}{g} \approx 10^{-7}$$

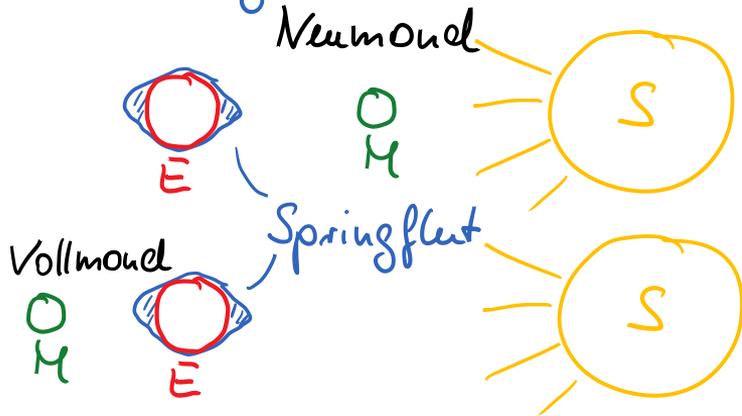
↳ gleiche Überlegung für Sonne

$$\begin{aligned} a_{\text{Gezeiten}, S} &= -2G \cdot m_S \cdot \frac{1}{r_{S3}^3} \cdot r_E \\ &= -0,51 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot a_{\text{Gezeiten}, M} \end{aligned}$$

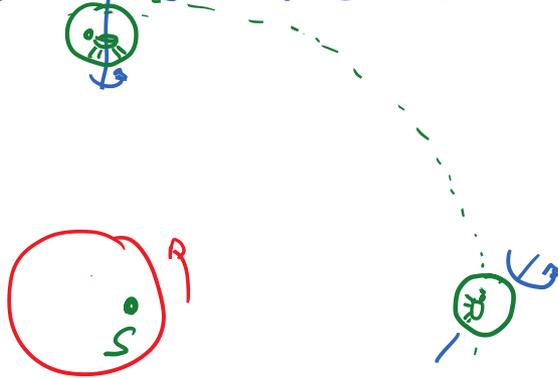
⇒ obgleich das Gravitationsfeld der Sonne ca. 200x größer ist als das des Mondes, ist die Gezeitenkraft der Sonne ca. $\frac{1}{2}$ x so groß!

Begründung: $g \sim \frac{1}{r^2}$ $a_{\text{Gezeiten}} \sim \frac{1}{r^3}$

Orientierung von E, M und S:



Anmerkung: von der Erde ist immer die gleiche Mondseite zu sehen



↳ Drehbewegungen von Mond um Schwerpunkt S und um sich selbst sind synchron

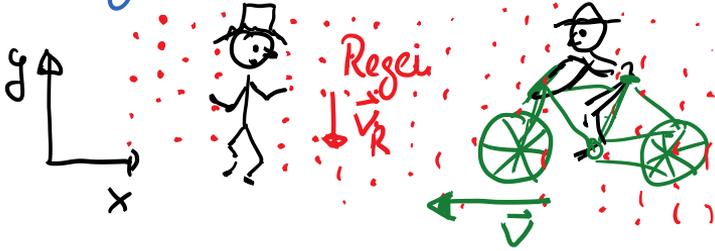
Erklärung: Gezeitenkräfte wirken auch auf dem Mond \rightarrow Verformung
 \rightarrow Energieentzug aus Rotation
 \rightarrow Verlangsamung, bis Synchronisierung:
Ortsfeste Verformung und keine weitere Energieentnahme

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

17. Scheinkräfte in rotierenden
Systemen: Corioliskraft

Alltag: Regen fällt an einem windstillen Tag



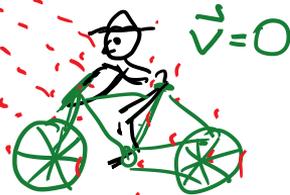
• Wie naß wird man auf dem Fahrrad?

• Bezugssystem ruhend:

Regentropfen: v_R in y -Richtung

• Bezugssystem Fahrrad:

Regen fällt schräg

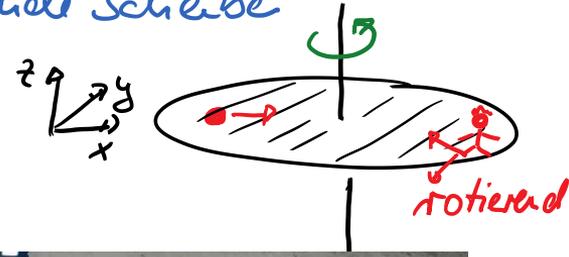


→ Koordinatensystem hat Einfluss auf Beschreibung der Bewegung

Rotierendes System: beschleunigte Bewegung $a = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$ ($\omega = \frac{v}{r}$)

↳ Koordinatensystem rotiert

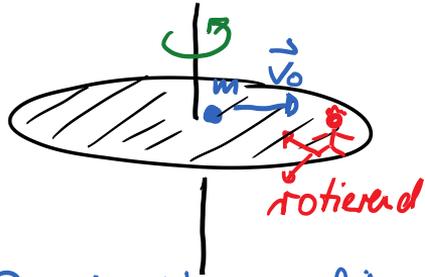
Beispiel: Rotierende Scheibe



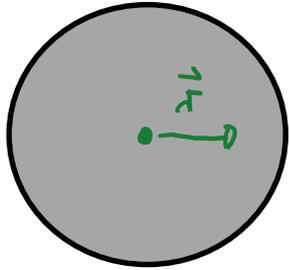
Drehrichtung:
links



Beschreibung: Wurf einer Masse m vom Zentrum nach außen

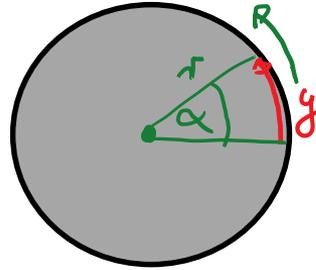


Beschreibung für einen äußeren Beobachter, Bezugssystem in Ruhe:



geradlinige Bewegung
mit $\vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t$
(unabhängig von Rotation)

• Beobachter auf Scheibe: Rotation mit ω , d.h. in Zeit t Drehung um Winkel $\alpha = \omega \cdot t$



Ablenkung um

$$y = \alpha \cdot r = \omega \cdot t \cdot r$$

$$= \omega \cdot t \cdot v_0 \cdot t$$

$$= \omega \cdot v_0 \cdot t^2$$

die Ablenkung y scheint mit t^2 zu wachsen

↳ Beobachter auf der Scheibe schließt auf eine konstante Coriolis-Beschleunigung

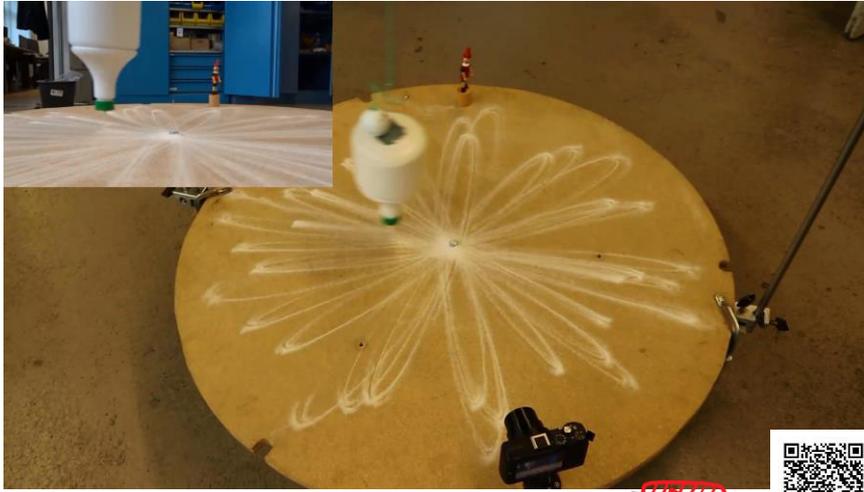
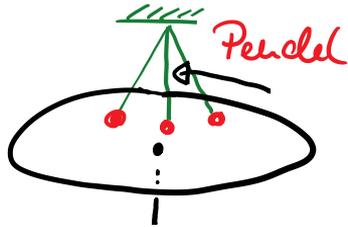
$$a_c = 2\omega v_0$$

die senkrecht zur Drehachse und zur Radialgeschw. steht

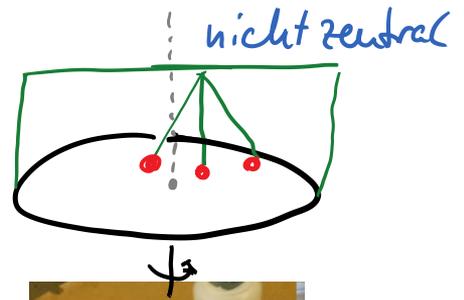
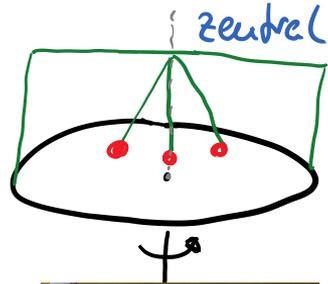
$$a_c \leadsto v_c = a_c \cdot t \leadsto y = \frac{1}{2} a_c \cdot t^2$$

→ Coriolis-Kraft \equiv Scheinkraft

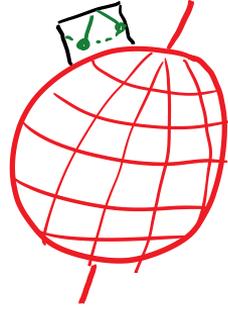
Foucault'sches Pendel: Experiment:



Bahnlinie: Rosetten, nicht geradlinig!



Erddrehung: Pendel
→ Rosettenbahn
abhängig vom
Breitengrad



Foucault (1851) in Paris



https://de.wikipedia.org/wiki/Foucaultsches_Pendel

Anmerkung: Wasserabfluss
in Spüle: Drehrichtung
hängt nicht von Corioliskraft
ab!

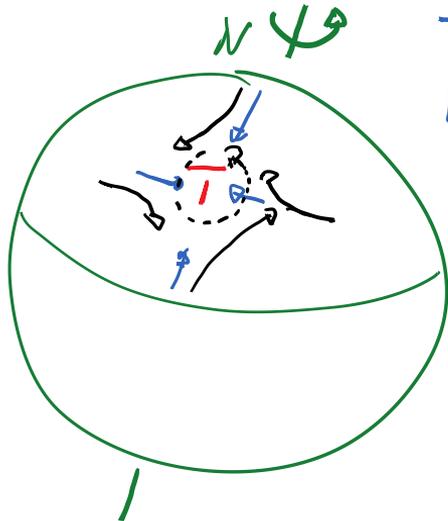


Beispiel Corioliskraft: Erklärung der Drehrichtung von Wirbelstürmen

Wind / Sturm: Luftbewegung von Hochdruck-(H) zu Tiefdruck (T)

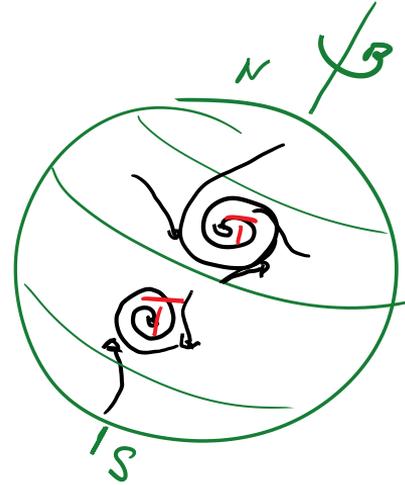
H $\xrightarrow{\text{Wind}}$ T

• auf der Erde:



Tiefdruckgebiet:
Luftstrom wird durch Corioliskraft abgelenkt, da sich die Erde dreht

→ Drehrichtung → Wirbelbildung



• Nordhalbkugel
- gegen Uhrzeigersinn
(Hurrikan, Taifun)

• Südhalbkugel
- im Uhrzeigersinn
(Zyklon)

• Hochdruckgebiet: Umkehrung der Drehrichtung

Physik: Mechanik

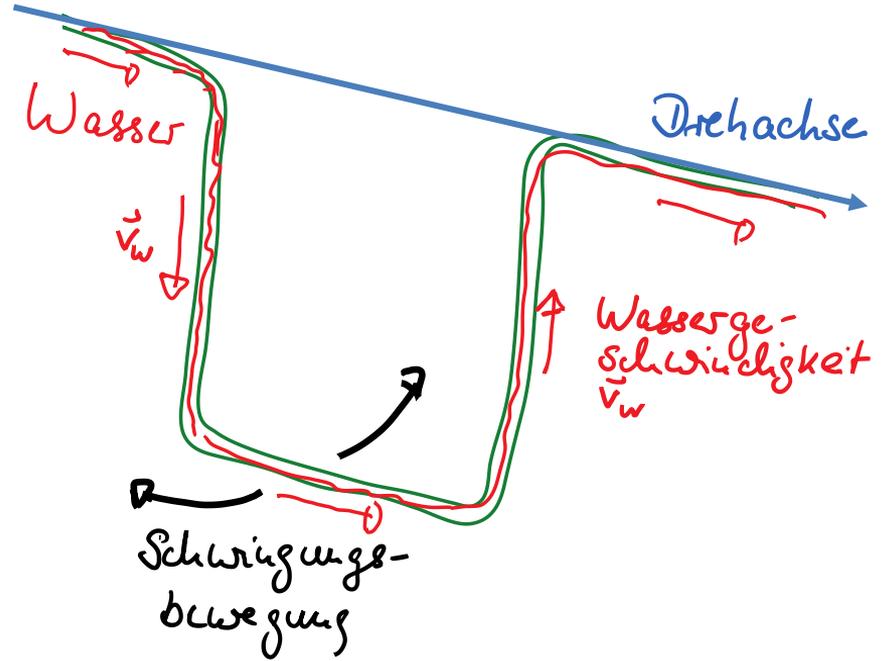
Prof. Dr. Matthias Kohl

Anwendungen und Aufgaben:
Corioliskraft im Wasserschlauch

Experiment: Schaukel mit Wasser-schlauch



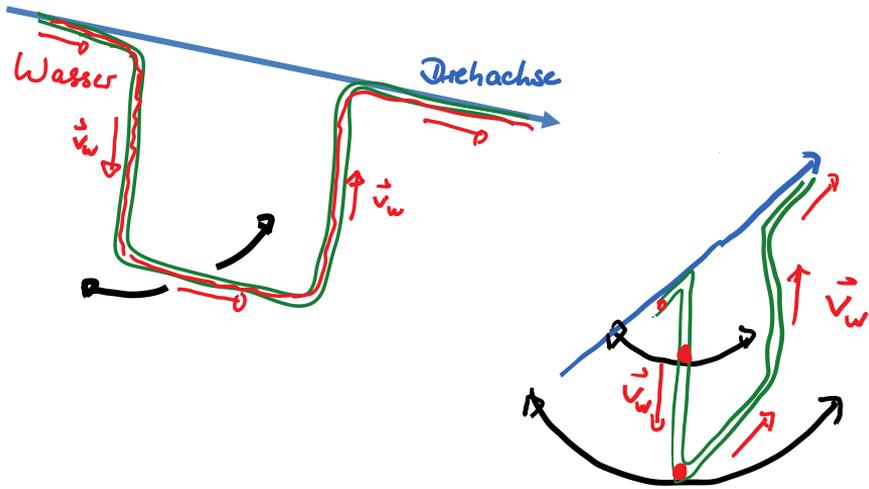
Beobachtung: wenn das Wasser im Schlauch fließt, so ist die Schwingung links und rechts ungleichmäßig



Warum?



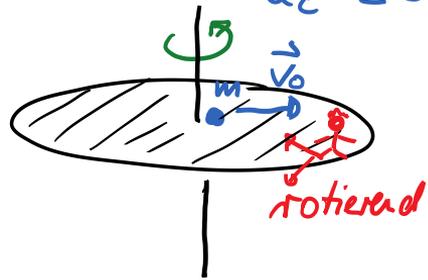
Lösung



Corioliskraft / -beschleunigung:

$$a_c = 2\omega v_0 = 2\omega \cdot (\pm v_w)$$

↑
abhängig von
Fließrichtung



a_c steht senkrecht auf Drehachse
und senkrecht zur Radialgeschwindigkeit
→ a_c / Kraft nach vorne oder
hinten (linker/rechter Schlauch)

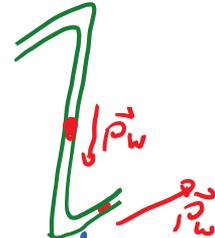
• andere Perspektive:

- Masse des Wassers
gleichmäßig im
Schlauch

- Fließrichtung ändert sich

→ Impuls \vec{p}_w ändert sich

→ Kraft $\vec{F} = \frac{d\vec{p}_w}{dt}$



Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

18. Reibung,
einfachste Überlegungen

bisher: Bewegung ohne Reibung
→ Energieerhaltung

Beispiel: • konservatives Kraftfeld (Grav.)
• Trägheitsprinzip

real: jede Bewegung ist mit Reibung verbunden

Beispiel: Rollen / Schieben eines Wagens auf Bahn \propto Erdbeschl.

Reibung → Kraft notwendig
→ Energieumwandlung
→ Arbeit

ohne Reibung: Autoreifen würde nicht haften, keine Beschleunigung



hier: einfachste Überlegungen zur Reibung

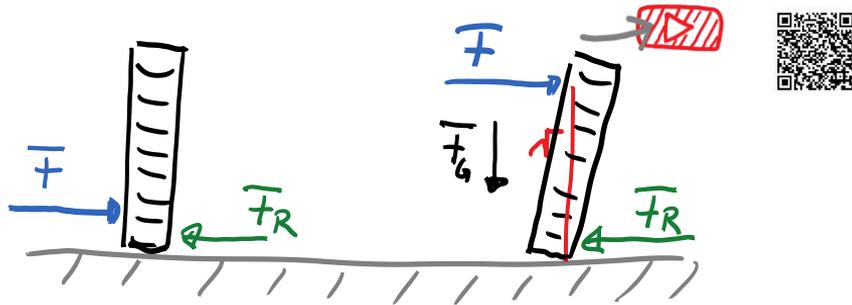
Reibung auf schiefer Ebene
oder durch Kraftmessung



• Haftreibung > Gleitreibung



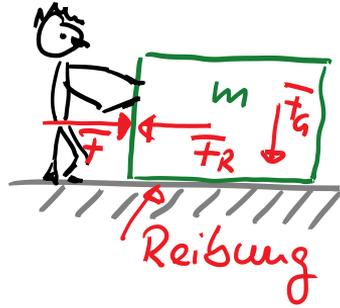
Beispiel: Reibung & Drehmoment



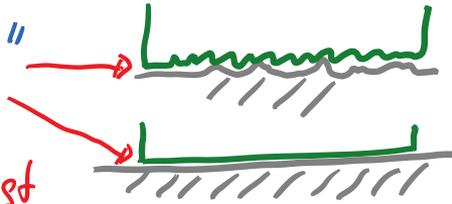
- Drehmoment entsteht, Stabilisierung durch Gewichtskraft wird überwunden.

Einfaches Modell:

- Schieben von Masse m
- Kraft \vec{F} notwendig
- Reibungskraft \vec{F}_R muss überwunden werden



- \vec{F}_R entsteht, da Gewichtskraft \vec{F}_G an der Kontaktfläche durch Unebenheiten zum „Verhaken“ führt
„Sandpapiereffekt“



Reibung hängt von den Oberflächen ab!

\vec{F}_R ist abhängig von

- Oberfläche
- Material
- Rauigkeit
- Anpresskraft (Normalkraft \vec{F}_N)
hier: Gewichtskraft $\vec{F}_G = \vec{F}_N$

aus Experimenten:

$$\vec{F}_R \sim \vec{F}_N (= \vec{F}_G)$$

$$\text{bzw. } \vec{F}_R = \mu \cdot \vec{F}_N$$

Reibungskoeffizient
ohne Einheit

Reibungskoeffizient μ :

- Material- und Oberflächenabhängigkeit
- aus Beobachtung: Reibung (μ) ist größer, wenn Geschw. = 0

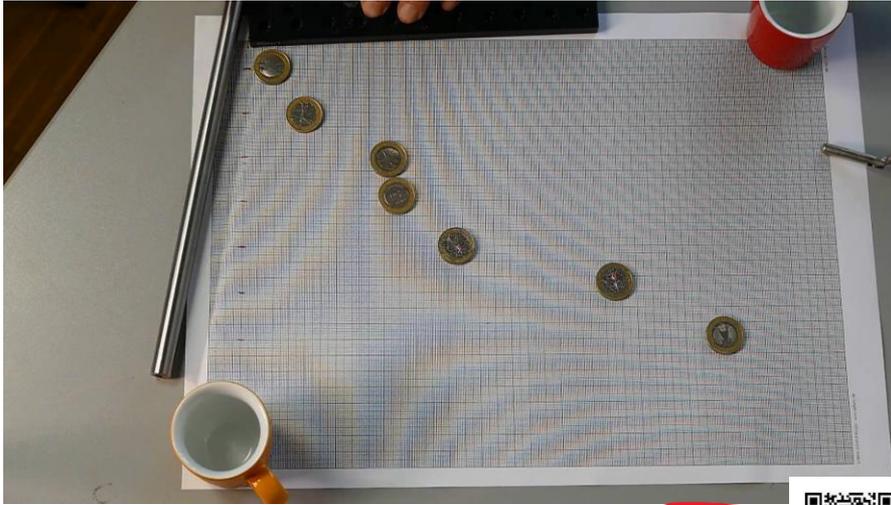
Haftreibung > Gleitreibung

$$\mu_H > \mu_G$$

Material	μ_H	μ_G
Stahl / Stahl	0,75	0,5
Holz / Holz	ca. 0,6	0,4
Glas / Glas	0,94	0,4
Eis / Eis	0,1	0,03
Teflon / Teflon	0,04	0,04
Gummi / Asphalt		
- trocken	0,9	0,8
- nass	0,5	0,4
Gummi / Eis	0,05	0,05

- Teflon für niedrige Reibung
- auf nasser Straßen rutschen Reifen
- Gleiten auf Eis

Experiment: Reibung & Bremsweg

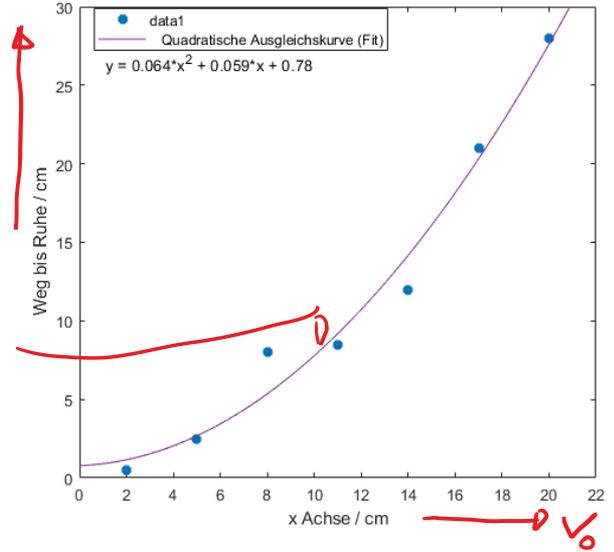


Stoß \rightarrow großer Hebelarm x
 \leftrightarrow große Anfangsgeschw. v_0
 $x \sim v_0$

Auftragung: Bremsweg als Funktion des Hebelarms

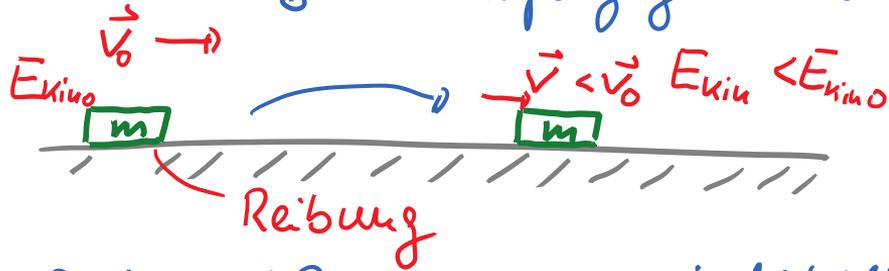
Bremsweg

in guter Näherung:
quadratische Abhängigkeit



\rightarrow Bremsweg $\sim x^2$
 $\sim v_0^2$ } Experiment
 Erklärung gesucht!

Zusammenhang von Bremsweg bzw. Bremszeit t_B und Anfangsgeschw. v_0



- Gleiten mit Reibung — v wird kleiner
 $\rightarrow \Delta E_{kin}$ wird durch Reibung umgewandelt (Wärme)
- Ansatz für Bremsweg x_B als Funktion von v_0

$E_{kin0} = \text{Bremsarbeit auf } x_B$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_0^{x_B} \overline{F}_R \cdot dx = \overline{F}_R \cdot x_B = \mu_n m \cdot g \cdot x_B$$

$\uparrow \overline{F}_R$ sei unabh. von v

$$\hookrightarrow \text{Bremsweg } x_B = \frac{v_0^2}{2 \mu_n g}$$

— x_B ist unabh. von m !

$$- x_B \sim \frac{1}{\mu_n g}$$

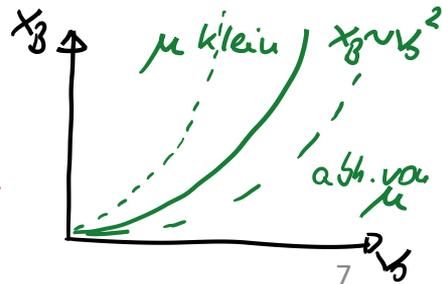
$$- x_B \sim v_0^2$$

\leftarrow wie im Münz-Experiment

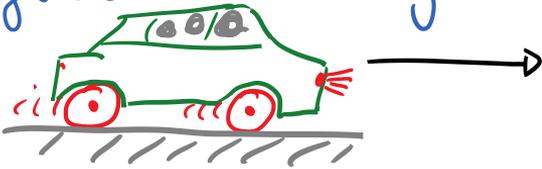
Bremszeit t_B : Reibungskraft ist konstant
 \rightarrow Beschleunigung konstant

$$v_0 = a \cdot t_B = \frac{\overline{F}_R}{m} \cdot t_B = \mu_n g \cdot t_B$$

$$t_B = \frac{v_0}{\mu_n g}$$



Beispiel: Bremsen eines Autos ($v=100\text{km/h}$)
 gesucht: Bremsweg & Bremszeit



Gummi / Asphalt	μ_H	μ_G
- trocken	0,9	0,8
- nass	0,5	0,4

• für trockene Straße, ohne Gleiten

↳ $\mu_H = 0,9$

Bremsweg: $x_{B,H} = \frac{v_0^2}{2\mu_H \cdot g}$

$v_0 = 100\text{km/h}$
 $= 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$= \frac{(27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,9 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 43,8\text{m}$

Bremszeit $t_{B,H} = \frac{v_0}{\mu_H \cdot g} = 3,15\text{s}$

• für nasse Straße:

Bremsweg & Bremszeit um Faktor $\frac{0,9}{0,5}$
 $\approx 1,8$ größer!

• Gleiten - Reifen rutschen auf Straße

↳ x_B & t_B werden um ca. $\frac{0,9}{0,8} \approx 1,25$
 bzw. $0,5/0,4 = 1,25$ größer

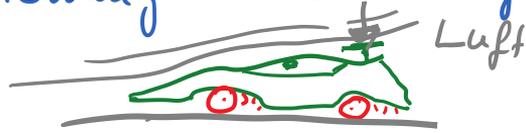
Energieumwandlung:

• Haften: Energie wird von Bremse aufgenommen

• Gleiten: Energie in Reifen und Straße

Reibung und Auto:

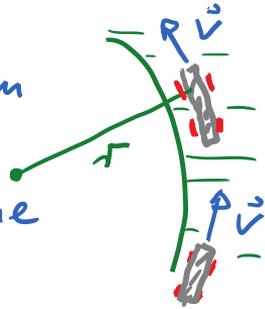
- ohne Reibung keine Beschleunigung möglich
- Kurvenfahrt nur mit Reibung
- Reibung limitiert maximale Beschd.
- Spoiler: Erhöhung der Normalkraft



- Schmiermittel
↳ Herabsetzung der Reibung

Beispiel: Kurvenfahrt mit Auto

- horizontale Straße
- Kurvenradius $r = 50\text{m}$
- gesucht: maximale Geschw. v_H für Fahrt ohne Gleiten



Ansatz: Haftreibung
→ Zentripetalkraft < Haftreibung

für v_H :

$$m \frac{v_H^2}{r} = \mu_H \cdot m \cdot g$$

$$\hookrightarrow v_G = \sqrt{\mu_H \cdot g \cdot r}$$

unabhängig von m

hier mit $r = 50\text{m}$:

trockene Straße: $\mu_H = 0,9$

$$v_{G,t} = \sqrt{0,9 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50\text{m}} = 21 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 76 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

nasse Straße: $\mu_H = 0,5$

$$v_{G,n} = \sqrt{0,5 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50\text{m}} = 15,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 57 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Anmerkung: μ auch abhängig von

- Material
- Temperatur etc.

- bisheriger Ansatz für Reibung ist sehr einfach (falsch)
- unterschiedliche Reibung für Körper & Bewegungen in Gasen oder Flüssigkeiten

grobe Unterscheidung:

a) Coulomb-Reibung

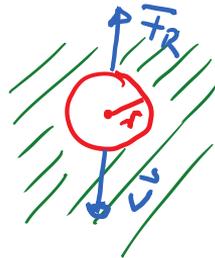
- zwischen festen Körpern
- trocken, ohne Schmiermittel
- unabh. von Geschwindigkeit v

b) Stokes-Reibung

- feste Körper in Gas oder Flüssigkeit,
- für kleine Geschw. v

• für Kugel: $\vec{F}_R = c \cdot r \cdot v$

Konstante,
abh. von Medium



c) Newton-Reibung:

- Festkörper in Gas oder Flüssigkeit
- große Geschw. v

$$\vec{F}_R = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

c_w -Wert:
abh. von Form des Körpers
 c_w klein \leftrightarrow „stromlinienförmig“

ρ Dichte des Mediums
 A Querschnitt des Körpers

Auto: $\vec{F}_R \sim v^2$ bei hoher Geschw.
dominiert Newton-Reibung

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

19. Mechanik deformierbarer
Körper, statischer Druck

bisher: Mechanik von Massepunkten
& Festkörpern

jetzt: Erweiterung für Gase &
Flüssigkeiten
↳ Druck, Auftrieb etc.

Beispiel: Handyhalterung mit Unterdruck



Aggregatzustände der Materie:
grobe Einteilung

	Form- stabilität	Volumen- Kompressi- bilität	Dichte
Gas	/	hoch	gering
Flüssig- keit	/	gering	hoch
Festkörper	✓	gering	hoch

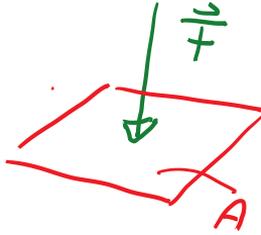
Dichte $\rho = \frac{m}{V}$

Stoff	ρ [kg/m ³]
Wasser, fl	$1 \cdot 10^3$
Luft, 20°C	1,29
Holz	$0,6 - 1,2 \cdot 10^3$
Aluminium	$2,7 \cdot 10^3$
Blei	$11 \cdot 10^3$
Gold	$19 \cdot 10^3$

Definition: Druck
Greift an eine Fläche A
senkrecht eine Kraft F an,
so ist der Druck p

$$p = \frac{F}{A}$$

Einheit: $[p] = 1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa$ (Pascal)



Anmerkung: andere Druckeinheiten

Bar: $1 bar = 10^5 Pa$

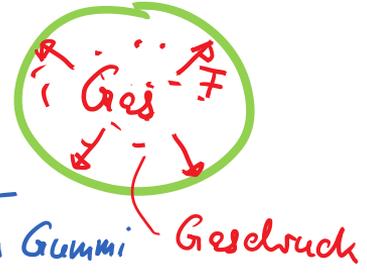
Atmosphäre: $1 atm = 1,013 \cdot 10^5 Pa = 1013 mbar$

Torr: $760 torr = 1 atm$

"Pounds per square inch" $1 psi = 6,9 \cdot 10^3 Pa$

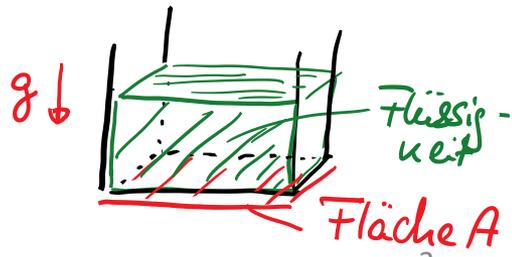
Beispiele:

- Luftballon
innerer Gasdruck
→ Kraft, im Gleichgewicht mit Spannung im Gummi



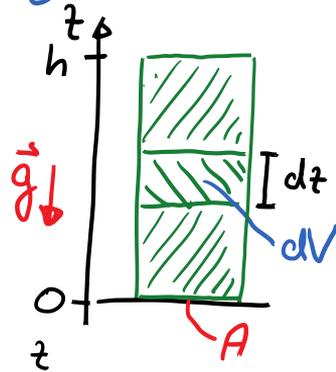
- Flüssigkeit
Gewichtskraft
→ Druck

$$p = \frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A}$$



Statischer Druck in Flüssigkeiten

- Flüssigkeitssäule, Höhe h
- Volumenelement dV mit Höhe dz und Grundfläche A
- Gewicht von dV



$$dF = dm \cdot g = \rho \cdot dV \cdot g$$

Druck von dV

$$dp = \frac{dF}{A} = \frac{\rho \cdot g \cdot dV}{A} = \rho \cdot g \cdot \frac{A \cdot dz}{A} = \rho \cdot g \cdot dz$$

• Gesamtdruck

$$p = \int_{p(z=0)}^{p(z=h)} dp = \int_0^h \rho \cdot g \cdot dz = \rho \cdot g \cdot z \Big|_0^h$$

$$\rightarrow p = \rho \cdot g \cdot h$$

$$p \sim h$$

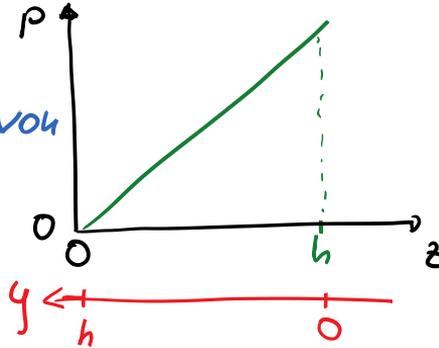
$$p \sim \rho$$

Wenn ρ konstant ist \equiv das Medium nicht kompressibel

• als Funktion der Tiefe $p = \rho \cdot g \cdot z$

oder als Funktion von Höhe $y = h - z$

$$p = \rho \cdot g \cdot (h - y)$$



Beispiel: Druck einer Wassersäule $h = 10 \text{ m}$

$$\text{Masse } m = 10 \cdot 10^3 \text{ kg} = 10^4 \text{ kg}$$

$$p = \rho \cdot g \cdot h \quad \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$= 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 0,981 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ bar}$$

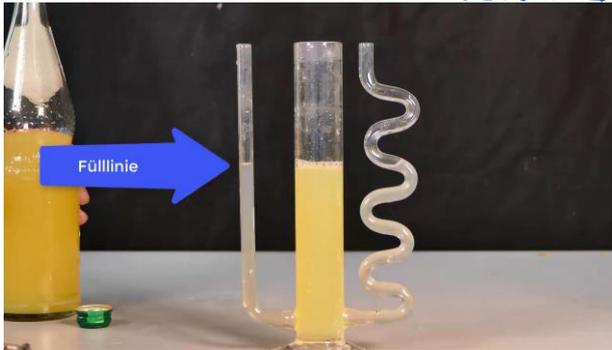
- Druck und Kraftrichtung

$$p = \frac{\vec{F}}{A}$$
 Richtung: \perp Fläche

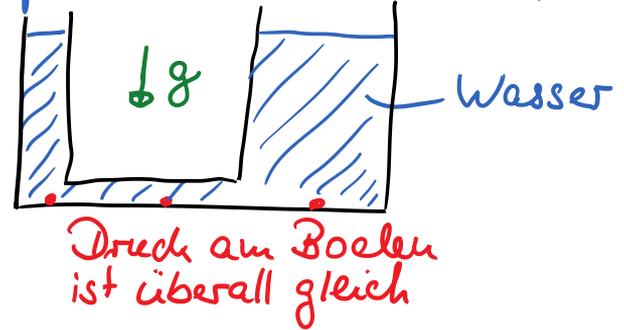
$$p = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{A}|}$$
 Richtung: \perp Fläche

Skalar \rightarrow $p = \frac{F}{A}$ \leftarrow Richtungsabh., Vektor!

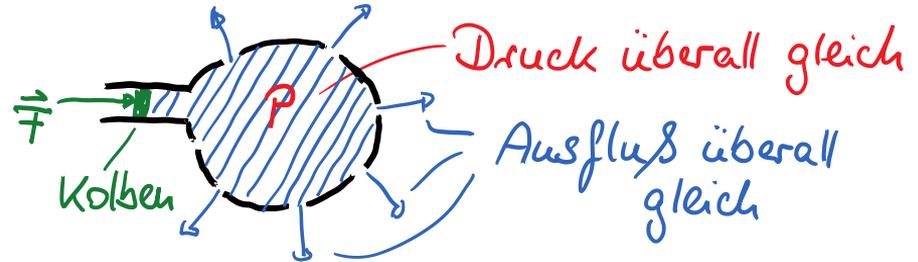
- Hydrostatisches Paradoxon: Druck in Flüssigkeit oder Gas ist unabhängig von der Form



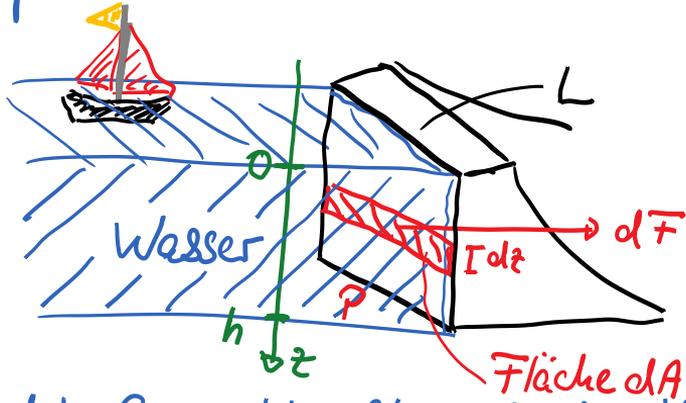
Beispiel: p durch Gewichtskraft



Beispiel: p durch Kraft auf Kolben



Beispiel: Staumauer



gesucht: Gesamtkraft auf die Mauer

- Druck $p = \rho \cdot g \cdot z$
- Kraft auf Flächenelement $dA = L \cdot dz$
 $dF = p \cdot dA = \rho \cdot g \cdot z \cdot L \cdot dz$
- Gesamtkraft

$$F_G = \int dF = \int_0^h \rho \cdot g \cdot L \cdot z \cdot dz$$

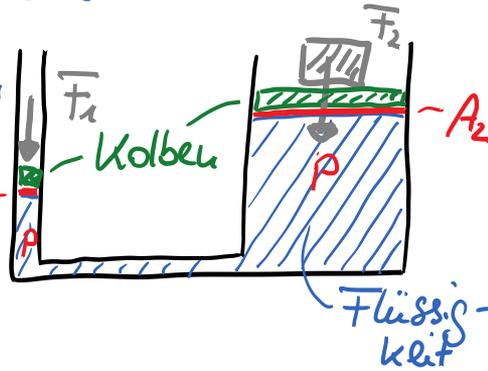
$$\begin{aligned} \bar{F}_G &= \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^h \\ &= \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{1}{2} h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_G &\sim h^2 \quad \nabla \\ &\sim L \quad \circ \end{aligned}$$

aber \bar{F}_G ist unabhängig von der Länge des Sees \circ

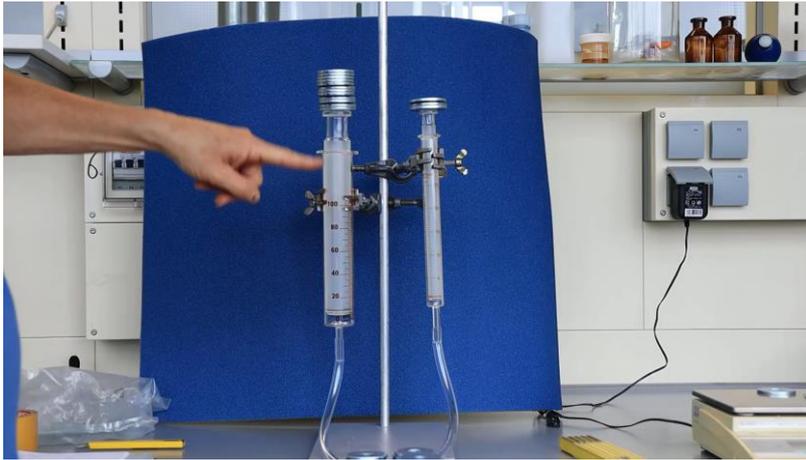
Beispiel: Hydrostatische Presse

- Kraft auf Kolben
↳ Druck ist überall gleich A_1 (+ Druck durch Gewichtskraft)

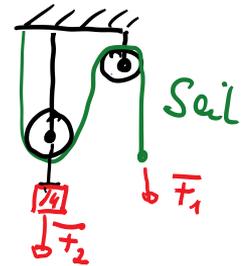


$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \rightarrow \quad F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

d.h. eine kleine Kraft F_1 kann eine große Kraft F_2 überwinden

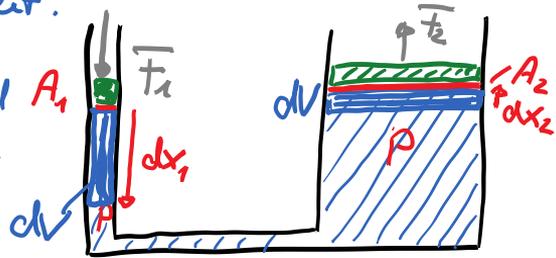


Analogie: Seilwinde



Energie & Arbeit:

Kolben mit \bar{F}_1 wird um dx_1 verschoben



$$\hookrightarrow \text{Arbeit } dW = \bar{F}_1 \cdot dx_1$$

$$= p A_1 \cdot dx_1$$

$$= p A_2 \cdot dx_2$$

$$= p dV \quad \text{mit } p = \frac{\bar{F}_1}{A_1} = \frac{\bar{F}_2}{A_2}$$

inkompressibles
Medium

Die Volumenänderung erfordert unter konstantem Druck p die Arbeit

$$W = \int p dV \quad (\text{Volumenarbeit})$$

Der Auftrieb:

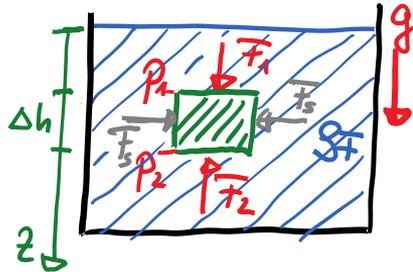
Beobachtung: im Wasser schwimmt Holz,
ein Stein nicht; in Luft steigt
ein Ballon etc.

Betrachtung der Kräfte auf einen Körper
in einer inkompressiblen Flüssigkeit:

Dichte Flüssigkeit $\rho_F = \text{const.}$

Druck: $p = \rho_F \cdot g \cdot z$

$$p_1 < p_2 ; \bar{F}_1 < \bar{F}_2$$



Kräfte auf die Seitenflächen \bar{F}_S heben
sich auf $\bar{F}_{S, \text{rechts}} = \bar{F}_{S, \text{links}}$

nur Kräfte auf Ober- und Unterseite
wichtig:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_F \cdot g \cdot \Delta h$$

und damit gibt es eine Auftriebskraft

$$\bar{F}_A = \bar{F}_2 - \bar{F}_1 = \Delta p \cdot A \leftarrow \text{Fläche des Körpers}$$

$$\bar{F}_A = \rho_F \cdot g \cdot \Delta h \cdot A = \rho_F \cdot g \cdot V$$

$$\bar{F}_A = \rho_F \cdot g \cdot V = g \cdot m_F = \bar{F}_{G, F}$$

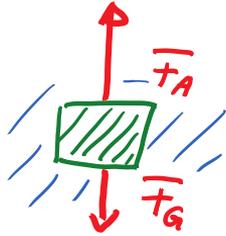
↳ Auftrieb = Gewichtskraft der vom
Körper verdrängten Flüssigkeit

- nur die Dichte des Mediums ist relevant
- Volumen des Körpers geht ein, nicht das
Material oder seine Dichte ρ_K

- auf einen Körper im Medium wirkt die Auftriebskraft der Gewichtskraft \bar{F}_G entgegen:

$$\bar{F}_A = m_F \cdot g = \rho_F \cdot V \cdot g$$

Dichte des Mediums
des Körpers



$$\bar{F}_G = m_K \cdot g = \rho_K \cdot V \cdot g$$

- Schwimmen: $\bar{F}_A > \bar{F}_G$

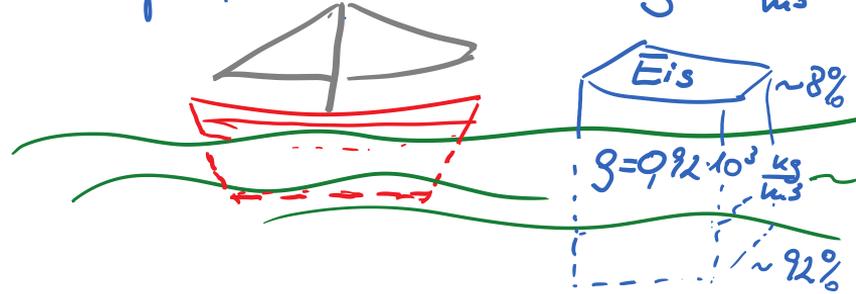
$$\rho_F \cdot V \cdot g > \rho_K \cdot V \cdot g$$

$$\rho_F > \rho_K$$

- Sinken: $\bar{F}_A < \bar{F}_G$ bzw. $\rho_F < \rho_K$

- Schweben: $\bar{F}_A = \bar{F}_G$ $\rho_F = \rho_K$

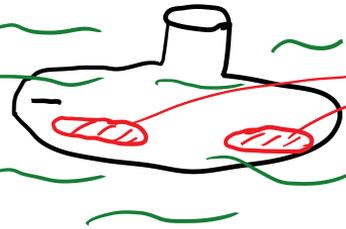
Beispiel: im Wasser schwimmt ein Körper, wenn seine Dichte $\rho < 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$



Beispiel: U-Boot



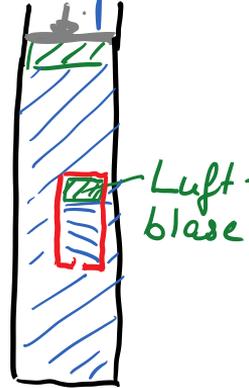
Das Boot
Reg: W. Petersen



Füllen von Kammern mit Luft oder Wasser
 ρ mittlere Dichte des U-Boots wird geändert
 \hookrightarrow Sinken oder Steigen

$$h = 260 \text{ m} \rightarrow \text{Druck} \equiv \text{Gewichtskraft von } 260 \text{ m}^3 \text{ Wasser/m}^2 = \frac{260 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2}$$

Beispiel: Flaschen-Taucher



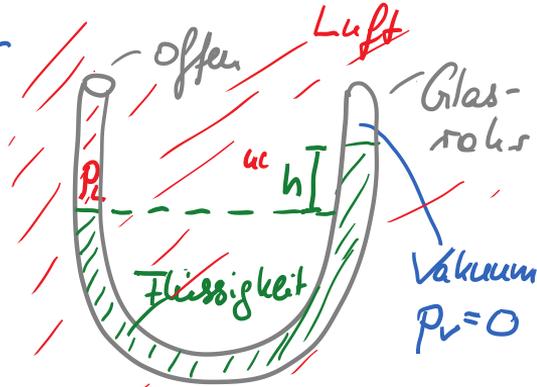
Druckerhöhung \rightarrow Wasser strömt ein, die Luftblase kleiner wird $\rightarrow \rho_k$ wird größer \rightarrow Sinken

Beispiel: Heißluftballon
 Temperatur $\uparrow \rightarrow \rho_k \downarrow$
 \rightarrow Steigen, da $\bar{\rho}$ kleiner wird



Druckmessung

- Luft drückt Flüssigkeit in das Rohr,
Luftdruck p_L



- andere Seite: Vakuum $p_v = 0$
- im Gleichgewicht:

$$\Delta p = p_L = \rho_f \cdot g \cdot h$$

- für normalen Luftdruck:

- für Quecksilber ($\rho_Q = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$)

$$h = 760 \text{ mm}$$

Druckeinheit: $1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr}$
(„760 mm Hg“)

- für Wasser: ($\rho_w = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$)

$$\rho_w = \frac{1}{136} \rho_Q$$

$$h = 10 \text{ m}$$

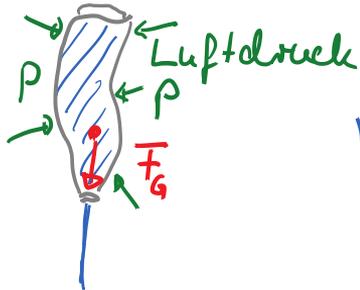
Luftdruck entspricht dem Druck einer Wassersäule der Höhe 10 m!

Beispiele:

- Ausfließende Wasserflasche



Zeitraffer



Vergleich: Luftballon
Spannung im
Gleichni



- Luftdruck hält Bierdeckel



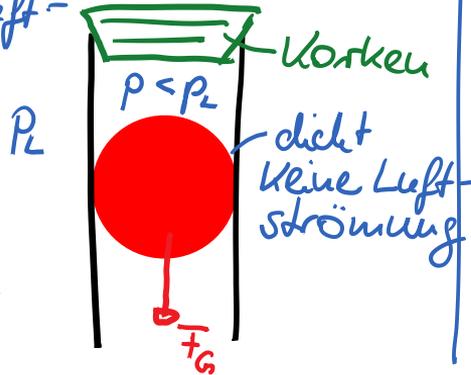
- Vakuum: Luftdruck \rightarrow Kraft



• Glasrohr mit Metallkugel



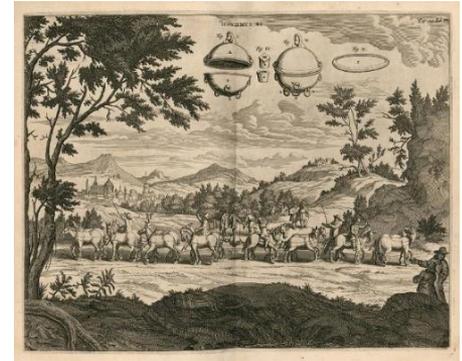
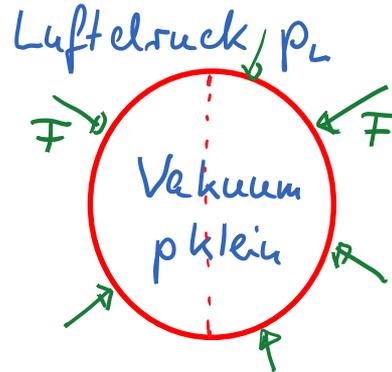
- Korken verhindert Luftströmung
- Kugel bewegt sich nicht
- Unter- / Überdruck
- Kraft



• Magdeburger Halbkugeln



Ventil geschlossen, Vakuum / Unterdruck bleibt bestehen



Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

19a. Druck: Beispiele

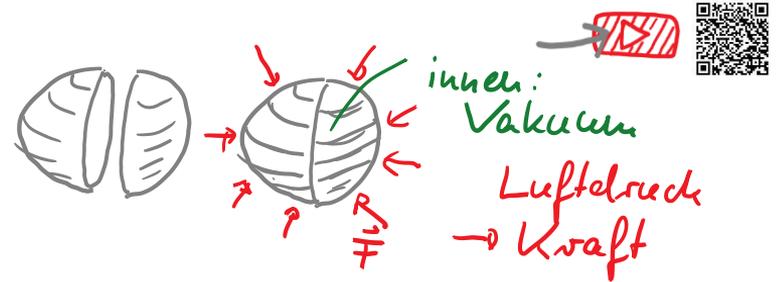
Beispiele:

- a) Magdeburger Halbkugeln
- b) Isolier schreiben
- c) Leistung von Windrädern

Luftdruck auf Halbkugeln



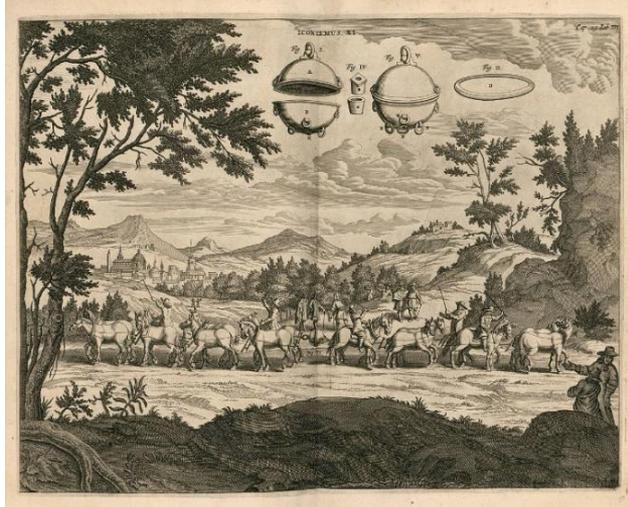
Ventil geschlossen,
Vakuum / Unterdruck bleibt bestehen



a) Magdeburger Halbkugeln:

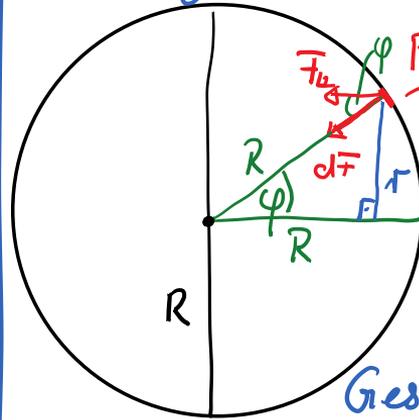
Otto von Guericke (1663): zwei halbe
Hohlkugeln (ca. 42 cm Durchmesser)

Abpumpen des Innengases \rightarrow Luftdruck
presst die Kugeln aneinander
 \rightarrow 16 Pferde können die Halbkugeln
nicht trennen



Wie groß ist die Kraft, die die Kugeln
aneinander presst?

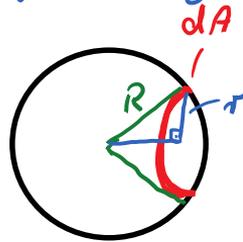
Lösung 1: durch Integration der Kräfte



Flächenelement dA
mit Kraft $d\vec{F} = p dA$
nur die Komponente
 $d\vec{F}_x = d\vec{F} \cdot \cos\varphi$ trägt bei

Gesamtkraft auf Halbkugel:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{\pi/2}^0 d\vec{F}_x = \int_{\pi/2}^0 \cos\varphi \cdot p \cdot dA \\
 &= \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot p \cdot \underbrace{2\pi r \cdot R d\varphi}_{\text{Ring-Umfang}} \\
 &= 2\pi p \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot R d\varphi
 \end{aligned}$$



$$\rightarrow F = 2\pi \rho \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot R \, d\varphi$$

$$\text{mit } 2\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \sin(2\varphi)$$

$$F = \pi \rho R^2 \int_0^{\pi/2} \sin(2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \pi \rho R^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2\varphi)\right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \pi \rho R^2 \left(\frac{1}{2}(1+1)\right)$$

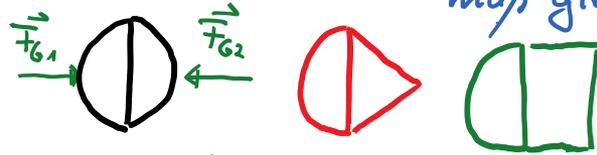
$$= \rho \cdot \pi R^2$$

Querschnittsfläche der Kugel

Form der Kugel geht nicht ein!

2. Lösung: „scharfes Hinsehen“ (smart)

• Gesamtkraft von links und rechts muß gleich sein,



$$\vec{F}_{G_1} + \vec{F}_{G_2} = 0$$

also unabhängig von Form, da sonst eine resultierende Kraft bestehen müßte



↳ Kraft auf Magdeburger Halbkugel:

$$r = 0,22 \text{ m}$$

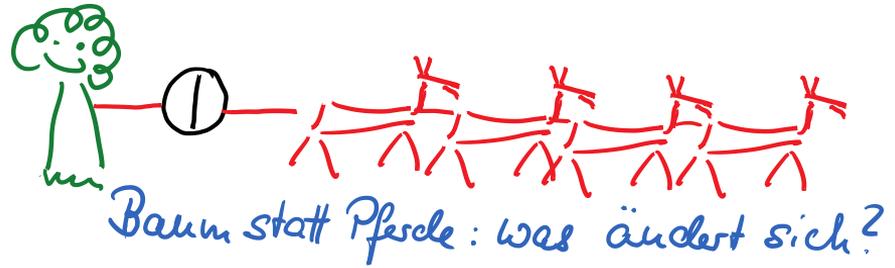
$$\text{mit } p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$F = \pi r^2 \cdot p_0 = 1,54 \cdot 10^4 \text{ N}$$

≙ Gewichtskraft von ca. 1570 kg!

real wird der Druck in der Kugel nicht 0 sein, ca. 10-20% des Luftdruckes
daher ist die Kraft 80%-90% des berechneten Wertes.

Können die Pferde die Kraft aufbringen?



b) Fenster mit Isolierscheiben:

- doppelte / dreifache Glasscheiben
- Vakuum: Wärmedämmung sehr gut
aber: Vakuum \rightarrow Kraft von außen würde die Scheibe zerdrücken

Kraft auf 1m^2 :

$$F = p_0 \cdot A$$

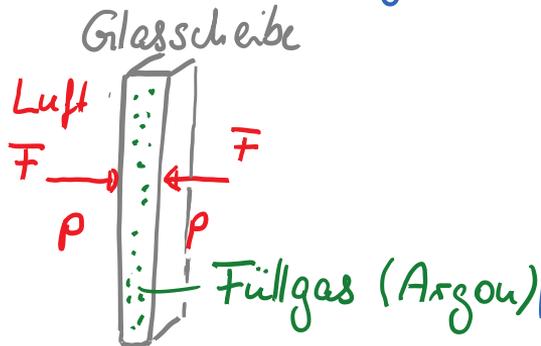
$$= 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 1\text{m}^2$$

$$= 1,013 \cdot 10^5 \text{ N}$$

$\hat{=}$ Gewichtskraft von $\sim 10000 \text{ kg}$



Lösung:
Füllgas zwischen
den Scheiben
mit geringer
Wärmeleitung



- Luftdruck nimmt nach der barometrischen Höhenformel mit der Höhe ab
 \rightarrow wenn Produktionsort und Einbauort in unterschiedlicher Höhe:
Luftdruckunterschied \rightarrow Füllgasmenge muss angepasst werden, da sonst Kraft auf Scheibe

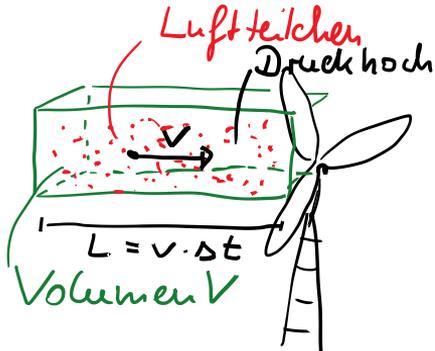
b) Leistung von Windrädern

- Windräder an Küsten oder auf Bergen, da die Windgeschwindigkeit groß
- wie hängt die Energiegewinnung von der Windgeschwindigkeit (v) ab?

→ gesucht: Leistung $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = f(v)$

Ansatz: kinetische Energie der Luftteilchen wird umgewandelt, Druckunterschied

- mittlere Geschwindigkeit v



- Volumen V mit Masse $m = \rho V$ und kinetischer Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

... von der ein relativer Teil ϵ durch das Windrad geerntet wird

- das Volumen $V = A \cdot L$ (Querschnitt A) besitzt die Länge L
- in der Zeit Δt , mit $L = v \cdot \Delta t$, wird dieses Volumen durch das Windrad geblasen

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{Energie aus } V &= \epsilon \cdot \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \epsilon \cdot \frac{1}{2} \rho V \cdot v^2 \\ &= \epsilon \cdot \frac{1}{2} \rho A \Delta t \cdot v^3 \end{aligned}$$

$$\text{Leistung } P = \frac{\text{Energie}}{\Delta t} = \epsilon \frac{1}{2} \rho A \cdot v^3$$

$$P \sim v^3 \quad \nabla$$

die Leistung des Windrades wächst also bei einer Verdopplung der Windgeschw. um Faktor 8!

Physik: Mechanik

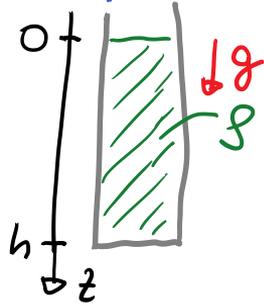
Prof. Dr. Matthias Kohl

20. Barometrische Höhenformel,
statischer Druck in Gasen

bisher: Druck $p = \frac{F}{A}$ in inkompressiblen Medien

→ Dichte ρ ist konstant, z.B. für Wasser

$$\hookrightarrow p = \rho \cdot g \cdot h$$

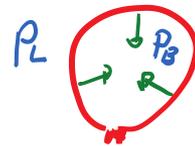


jetzt: Gas als Medium

Volumenänderung leicht durch Druck (Kraft) möglich, also $\rho = \rho(p)$!

Gase sind kompressibel

Beispiel: Volumen von Luftballons und Schaum



Ballon

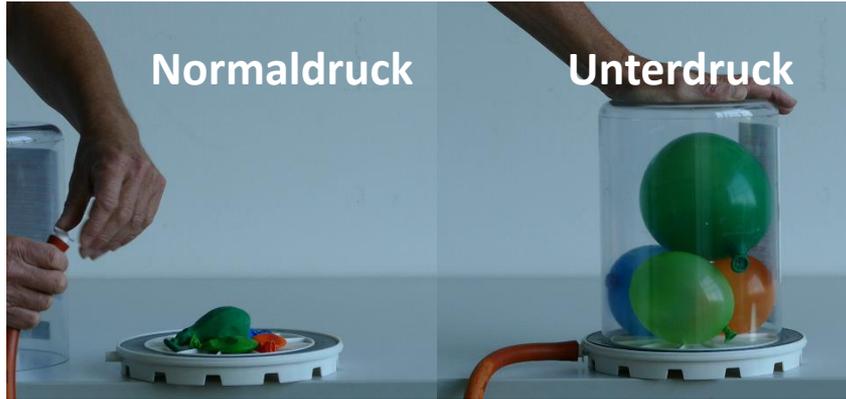
Gleichgewicht von

- p_B im Inneren
- p_L Luftdruck
- Gummispannung

→ $p_L \downarrow \rightarrow$ Kraft → Volumen \uparrow

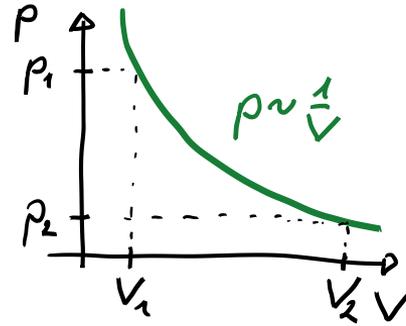


Zusammenhang von p und V :



Luft und viele Gase verhalten sich wie ein ideales Gas, für das gilt:
 $p \cdot V = \text{const.}$ (Gesetz von Boyle-Mariotte)

$$\hookrightarrow p = \frac{\text{const}}{V}$$



→ Halbierung vom Druck resultiert in Verdopplung des Volumens

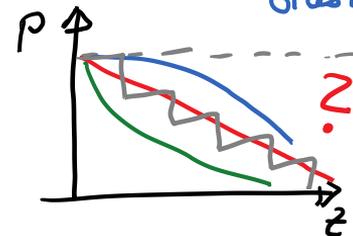
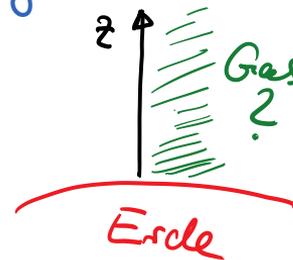
$$\bullet m = g \cdot V \Leftrightarrow g = \frac{m}{V}$$

↳ also ist auch die

Dichte g abhängig vom Druck

↳ in der Atmosphäre also abh. von Höhe

gesucht: Druck p als Funktion von Gashöhe



Herleitung von $p(h)$ im Gas:

• Betrachtung für eine Gasmasse m

$$p \cdot V = \text{const.} \quad m = \rho \cdot V$$

$\hookrightarrow p \cdot \frac{m}{\rho} = \text{const}$ bzw. $p \cdot \frac{1}{\rho} = C = \frac{\text{const.}}{m}$

• am Erdboden: Druck p_0 , Dichte ρ_0 ↑ Konstante

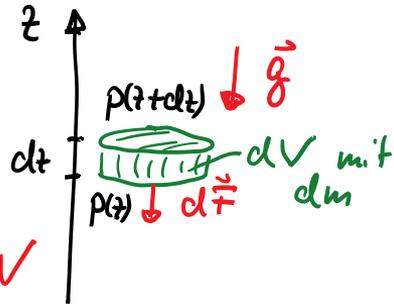
• in Höhe z : $\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p(z)}{\rho(z)}$ (*)

• allgemein für z und $z+dz$:

Volumen dV führt zu Kraft

$$d\bar{F} = -dm \cdot g$$

↑ Abnahme ↑ Masse in dV



$$\rightarrow d\bar{F} = -\rho \cdot dV \cdot g = -\rho \cdot A \cdot dz \cdot g$$

• Druckänderung:

$$dp = \frac{d\bar{F}(z)}{A} = -\rho(z) \cdot dz \cdot g$$

• Lösung durch Integration, aber $\rho(p)$ ↖ ↘

• mit (*) $\rho(z) = p(z) \cdot \frac{\rho_0}{p_0}$

$\hookrightarrow dp = -\underbrace{\frac{\rho_0}{p_0}}_{\text{Konstanten}} \cdot g \cdot p(z) \cdot dz$

↖ Differentialgleichung

• mathematische Lösung durch Variablentrennung

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dz$$

$$\int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp}{p} = \int_0^h \left(-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g\right) \cdot dz$$

↑ Integration über z -Weg
- Druck

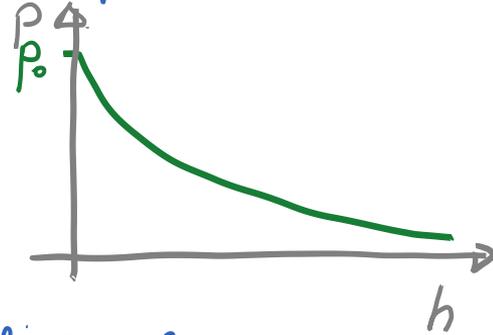
(siehe Analysis, Kap. über Logarithmus,
Kap. Impuls-Beispiele)

$$\ln p \Big|_{p_0}^{p(h)} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot z \Big|_0^h$$

$$\ln p(h) - \ln p_0 = \ln \frac{p(h)}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h$$

$$\boxed{p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}} \quad \text{Barometrische Höhenformel}$$

- Gasdruck nimmt exponentiell mit der Höhe ab



- unter Normalbedingungen

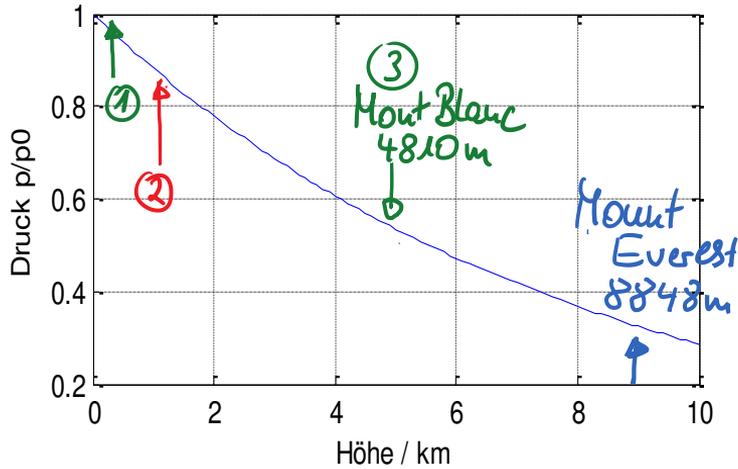
$$\rho_0 = 1,29 \text{ kg/m}^3$$

$$p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\hookrightarrow \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g = 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{\text{m}}$$

$$\hookrightarrow \frac{p(h)}{p_0} = e^{-1,25 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{\text{m}} \cdot h}$$

$$\frac{p(h)}{p_0} = e^{-1,25 \cdot 10^{-4} \frac{1}{m} \cdot h}$$



	h / m	$p(h)/p_0$	Abnahme / %
①	100	0,987	1,23
②	1000	0,882	11,8
③	4810	0,55	45
④	8848	0,33	67

• Zusammensetzung der Luft:
21% O_2 , 78% N_2 , 1% Ar, ... Reste

• Mensch unter Höhenbedingung:
Sauerstoffversorgung reduziert

Vergleich: wenn die Dichte der Luft nicht druckabhängig wäre ($\rho = \rho_0 = 1,29 \frac{kg}{m^3}$)
→ Atmosphäre hätte eine klare Grenze h_G

$$p_0 = \rho_0 \cdot g \cdot h_G$$

$$h_G = \frac{p_0}{\rho_0 \cdot g} = \frac{1,01 \cdot 10^5 Pa}{1,29 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}} = 7980 m$$

↳ darüber wäre keine Luft!

Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

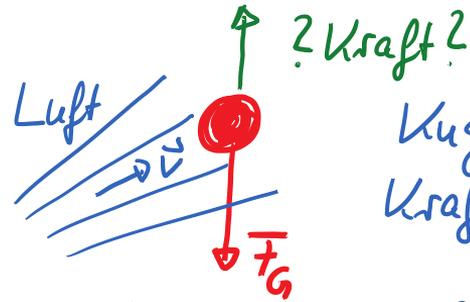
21. Strömungen und
Bernoulli-Gleichung

bisher: Druck $p = \frac{\bar{F}}{A}$ in Flüssigkeiten
und Gasen ohne Bewegung

jetzt: bewegte Medien

- Strömung
Kontinuitätsgleichung
- Druck & Energie
Bernoulli-Gleichung

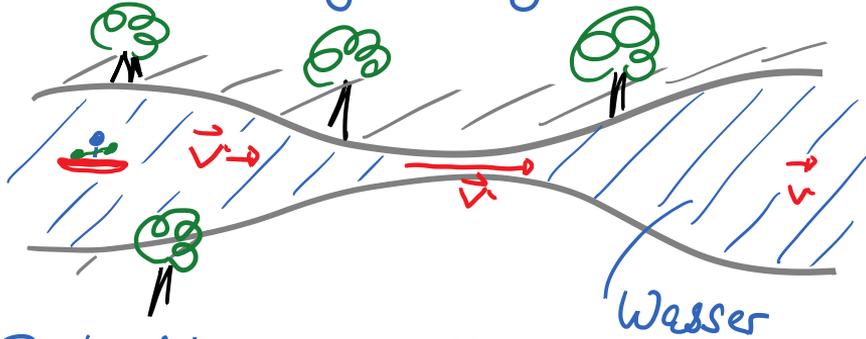
Beispiele:



Kugel steht
Kraft muß \bar{F}_G aus-
gleichen

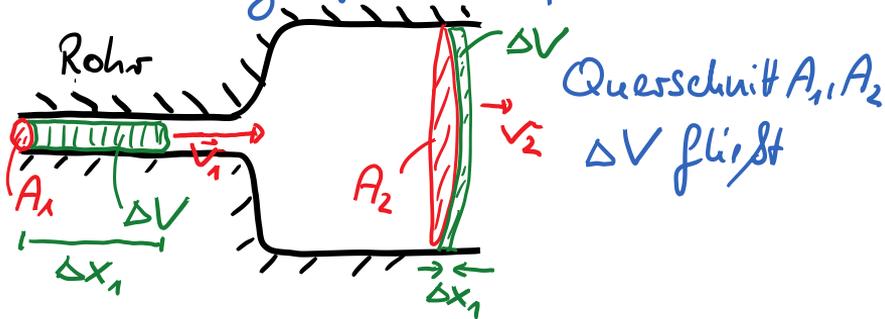
. Wie entsteht die Kraft?

Kontinuitätsgleichung:



Beobachtung: eine Strömung (\vec{v}) ist höher, wenn der Querschnitt klein ist

Beschreibung: für inkompressible Medien



- Volumenelement fließt in Zeit Δt :

$$\Delta V = A_1 \cdot \Delta x_1 = A_2 \cdot \Delta x_2$$
$$= A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

↑ Fließgeschwindigkeit

- Volumenstrom = Volumen, das pro Zeit durch Querschnitt fließt

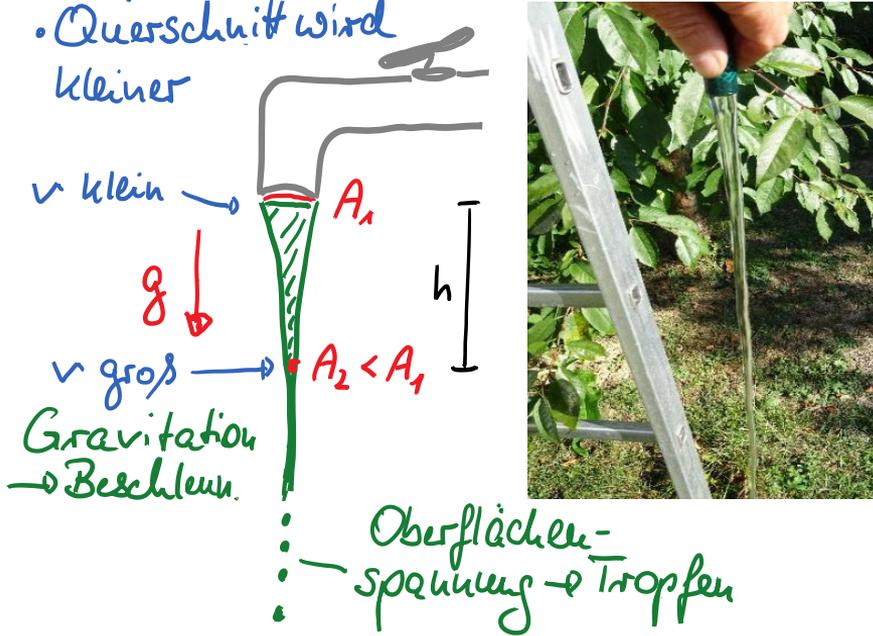
$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{konstant, wenn inkompressibel (ohne Regen oder Verdunstung)}$$

$$\boxed{\dot{V} = A \cdot v = \text{const}} \quad \text{Kontinuitätsgl.}$$

$$\hookrightarrow v \sim \frac{1}{A} \quad \nabla \quad \text{reziproke Abhängigkeit}$$

Beispiel: Wasser aus Wasserhahn / Schlauch

- Querschnitt wird kleiner



Abschätzung: Wasserhahn mit Querschnitt $A_1 = 1 \text{ cm}^2$, es fließe 2 Liter pro Minute.

Wie groß ist A_2 bei $h = 7 \text{ cm}$?

- Ausflußgeschwindigkeit: $v_1 = v(y=0)$

$$\text{aus } \Delta V = A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$$

$$v_1 = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}} = 0,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- freier Fall für $h = 7 \text{ cm}$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (\text{Energieerh.})$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh$$

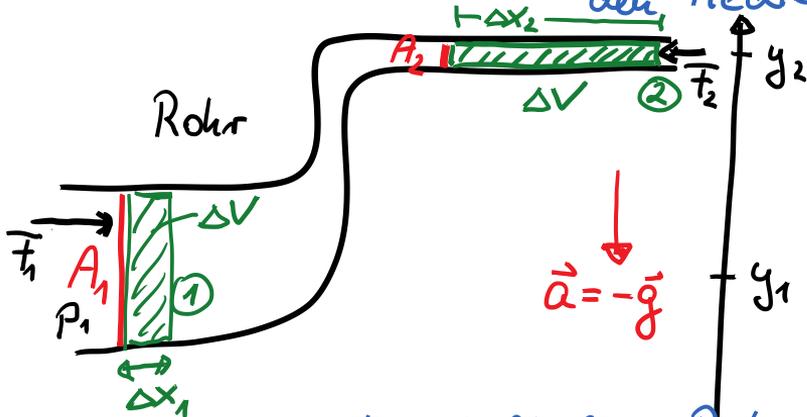
$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

$$= \sqrt{(0,33 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + 2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,07 \text{ m}} = 1,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kontinuitätsgl. $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

$$\hookrightarrow A_2 = A_1 \cdot \frac{v_1}{v_2} = 1 \text{ cm}^2 \cdot \frac{0,33}{1,22} = 0,27 \text{ cm}^2$$

Bernoulli-Gleichung: Druck in strömenden Medien



- Volumenelement ΔV fließt in Rohr
- Änderung von
 - Querschnitt A
 - pot. Energie ($m \cdot g \cdot y$)
 - kin. Energie ($\frac{1}{2} m v^2$)
- Kraft $\vec{F}_1 = p_1 \cdot A_1$ „schiebt“ vorwärts
 $\vec{F}_2 = p_2 \cdot A_2$ drückt zurück
- Masselement $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$

Energiebetrachtung:

- pot. Energie $\Delta E_{\text{pot}} = \Delta m \cdot g (y_2 - y_1)$
 $= \rho \Delta V \cdot g (y_2 - y_1)$ (I)
- kin. Energie $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$
 $= \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$ (II)

• Arbeit:

in ①: \vec{F}_1 schiebt: $W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta x = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot \Delta V$

in ②: \vec{F}_2 drückt: $W_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot \Delta V$ (III)

$$\Delta W = W_1 - W_2 = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V$$

aus I, II, III: $\Delta W = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}}$

! Vorzeichen von ΔW !

Energieerhaltung



$$\rightarrow (p_1 - p_2) \Delta V = \rho \Delta V (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

Terme sortieren nach 1 oder 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

also muß allgemein für jede Position gelten:

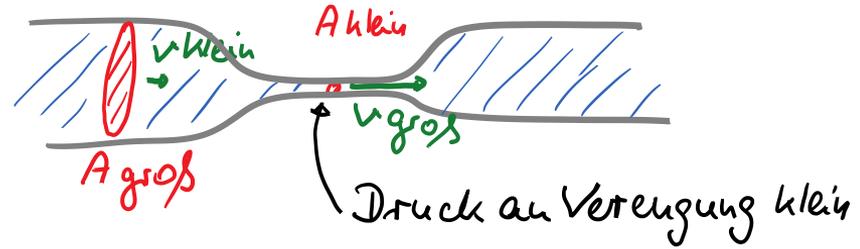
$$\boxed{p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}} \quad \text{Bernoulli-Gleichung}$$

\uparrow "Druckarbeit"
 \uparrow "pot. Energie"
 \nwarrow "kin. Energie"

\rightarrow Druck p hängt also von der Fließgeschwindigkeit v ab und der Lage y

\rightarrow wenn v hoch ist, so ist p klein ∇
(Venturi-Effekt)

Sonderfall: y konstant, ohne Höhenänderung



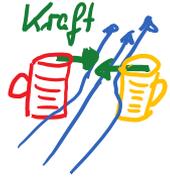
Beobachtungen / Beispiele zum Bernoulli-Effekt

Luftstrom um Kugel

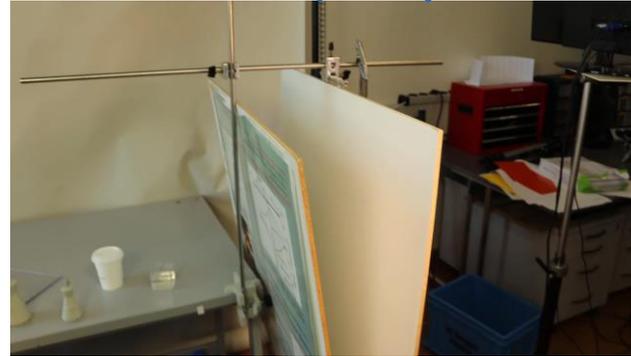
✓ groß \rightarrow p klein \rightarrow Kraft in den Luftstrom



Luftstrom \rightarrow Kraft auf Tassen



Antiehende Kraft auf Platten



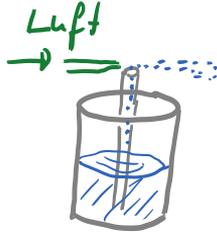
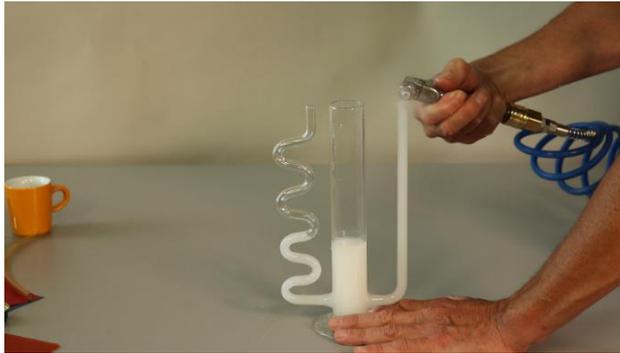
\rightarrow an einander vorbei fahrende Schiffe werden angezogen \rightarrow Havarie



Weitere Beispiele:



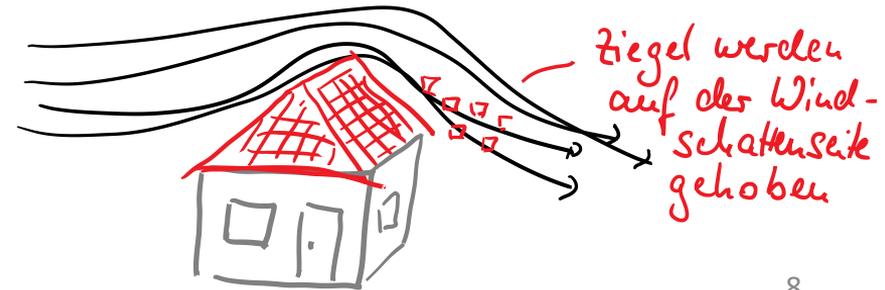
→ Funktion des Schorusteins
Parfümzerstörer



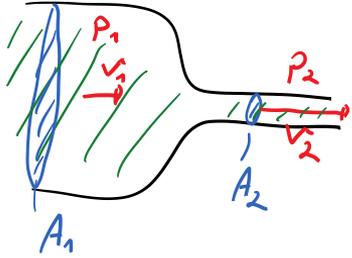
Beispiel: Sturmschäden



- hohe Luft-/Windgeschw.
→ geringer Druck



Anwendung: Messung einer Strömungsgeschwindigkeit



gesucht: v_2
bekannt: A_1 & A_2
gemessen: p_1 & p_2
• Höhenänderung sei 0

$$\text{Bernoulli-Gl: } p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

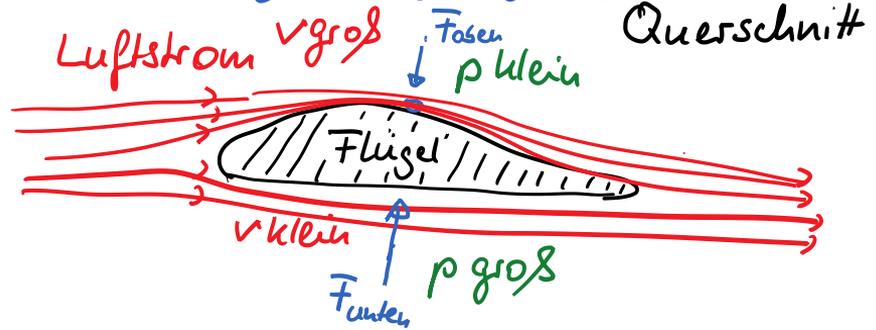
v_1 ist unbekannt, aber kann durch die Kontinuitätsgl. $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$ umgechr. werden

$$\hookrightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_2 \cdot v_2}{A_1} \right)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$v_2^2 = \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1 \right)} \quad \leadsto \quad v_2 = A_1 \sqrt{2 \frac{p_2 - p_1}{\rho (A_2^2 - A_1^2)}}$$

\Rightarrow bei bekannten Querschnittsflächen A_1 & A_2 kann durch Druckmessungen p_1 & p_2 die Strömungsgeschw. bestimmt werden.

Anwendung: Flugzeugflügel



Form des Flügels: Weg der Luft auf Oberseite ist lang; Wirbelfreiheit $\rightarrow v_{\text{oben}} > v_{\text{unten}}$

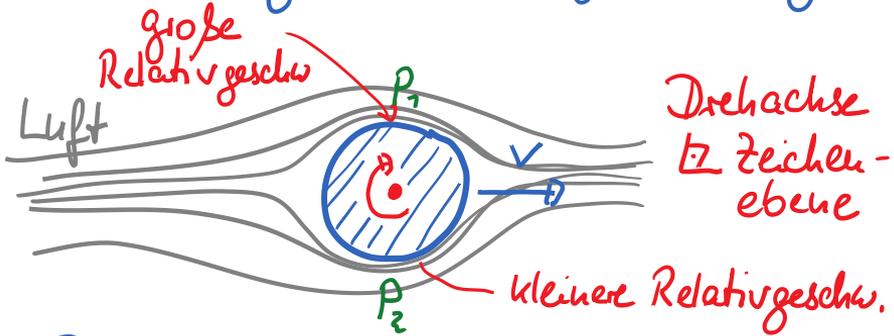
$$\rightarrow p_{\text{oben}} < p_{\text{unten}}$$

$$\rightarrow F_{\text{oben}} < F_{\text{unten}}$$

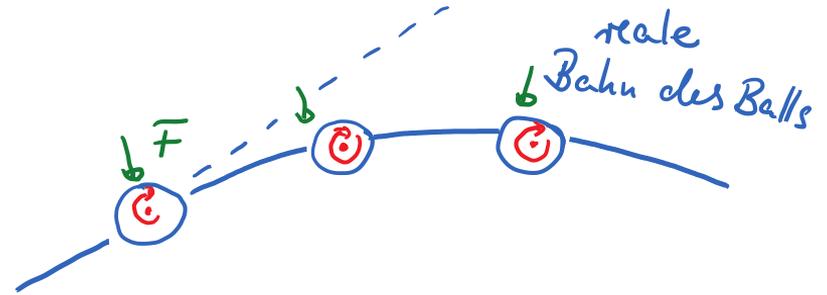
$$\hookrightarrow \text{Auftriebskraft} = F_{\text{unten}} - F_{\text{oben}}$$

(vereinfachte Beschreibung)

Anwendung: Ball mit Eigendrehung



- Ball fliegt mit v in der Luft
- Eigendrehung \rightarrow Relativgeschw. von Balloberfläche und Luft unterschiedlich
 - \hookrightarrow Druckunterschied Δp
 - \hookrightarrow Kraft $F = A \cdot \Delta p$ führt zu einer seitlichen Ablenkung
- Anschneiden eines Balls

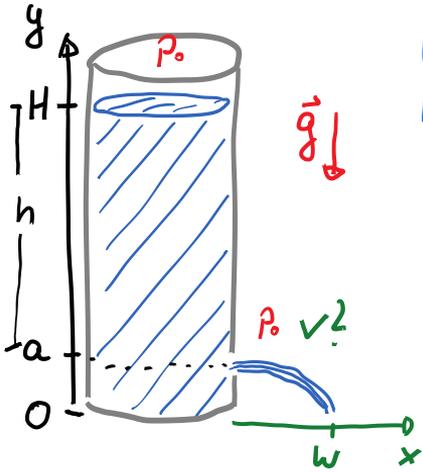


Physik: Mechanik

Prof. Dr. Matthias Kohl

21a. Strömungen und
Bernoulli-Gl.:
Wasserstrahl

Wasserstrahl aus Tonne:



Wassershöhe H
kleines Loch in Höhe a
Luftdruck p_0

Fragen:

a) Wie schnell fließt das Wasser aus?

b) Wie weit reicht der Strahl (w) für

ein Loch 25 cm über den Boden und $H = 1,15$ m?

c) Wo muß das Loch sein, damit der Strahl am weitesten reicht?

Experiment:



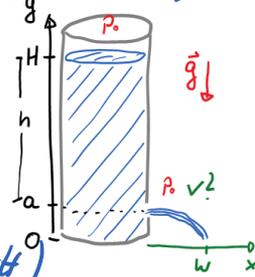
- Luftdruck p_0 oben und unten gleich
- v hängt sicher von h ab,
- in der Tonne: Wasser fällt/fliesst mit v_0

a) Wie schnell fließt das Wasser?

• Kontinuitätsgleichung:

$$v_0 \cdot A_{\text{Tonne}} = v \cdot A_{\text{Loch}}$$

Flächen (Querschnitt)



• Bernoulli-Gleichung:

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g \cdot 0$$

p_0 - Luftdruck \uparrow Wassersäule über Loch

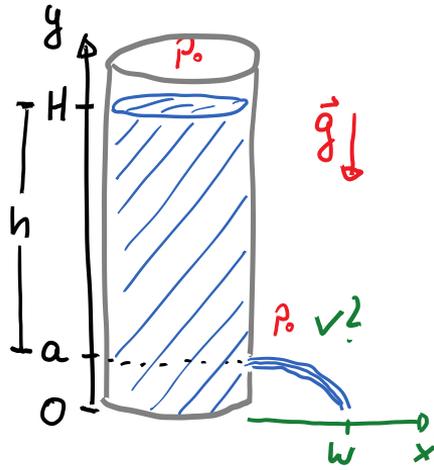
• wenn $A_{\text{Tonne}} \gg A_{\text{Loch}} \rightarrow v_0 \ll v$

$$\hookrightarrow \rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad !$$

• dies ist die gleiche Geschwindigkeit, die ein aus der Höhe h fallender Körper hat
($\Delta E_{\text{pot}} = \Delta E_{\text{kin}} \rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$)

b) Wie weit reicht der Strahl (w) für ein Loch 25 cm über dem Boden und $H = 1,15 \text{ cm}$?



$$v = \sqrt{2gh}$$

mit $h = H - a$

• Wasser fällt als horizontaler Wurf
 $\rightarrow v_x = v; v_y = 0$

Fallhöhe a

Fallzeit t_w : $a = \frac{1}{2} g t_w^2$

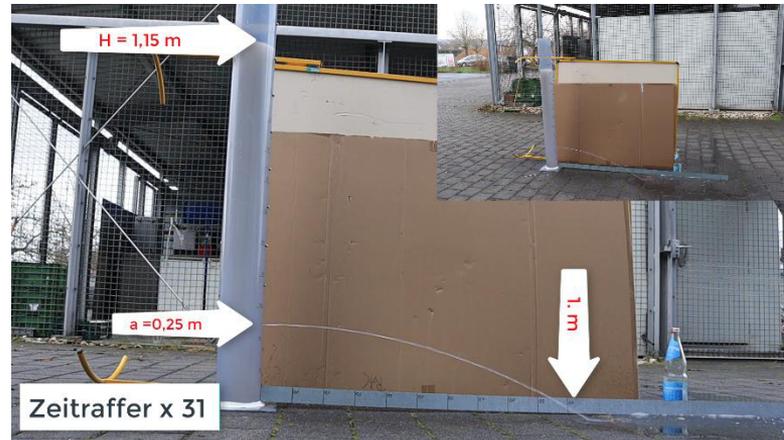
$$t_w = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

Weite x_w : $x_w = v_x \cdot t_w$

$$= \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2a}{g}} = 2\sqrt{h \cdot a}$$

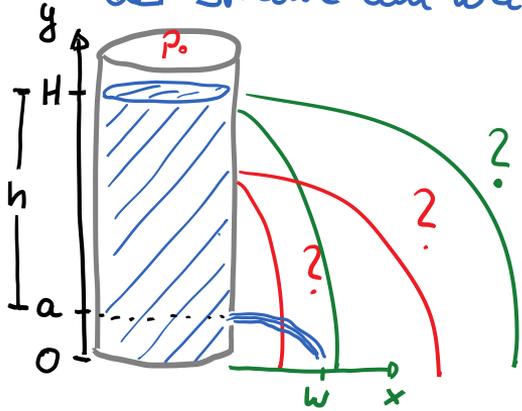
für $a = 0,25 \text{ m}$; $H = 1,15 \text{ cm}$
 $h = H - a = 90 \text{ cm}$

$$\rightarrow x_w = 2\sqrt{0,9 \cdot 0,25} \text{ m} = 0,95 \text{ m}$$



... im Experiment: $w \approx 1,05 \text{ cm}$
 Fehler? Strahl etwas nach oben?
 Boden uneben?

c) Wo muß das Loch sein, damit der Strahl am weitesten reicht?



$$v = 2\sqrt{g \cdot h}$$

Loch oben:
 → geringer Druck,
 v klein... aber
 große Fallstrecke
 Loch unten:
 → v groß

... aber geringe Fallstrecke



Optimierung: gesucht ist das Maximum von x_w für eine gegebene Wassersäule H .
 also: $x_w = 2\sqrt{h \cdot a} = 2\sqrt{(H-a) \cdot a} = 2\sqrt{Ha - a^2}$

Maximum, wenn

$$0 = \frac{dx_w}{da} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{H-2a}{\sqrt{Ha-a^2}}$$

$$\hookrightarrow 0 = H - 2a$$

$$a = \frac{H}{2} \quad \checkmark$$

Maximale Weite also, wenn das Loch in halber Höhe der Wassersäule ist.

Übereinstimmung mit Experiment!



Physik: Mechanik

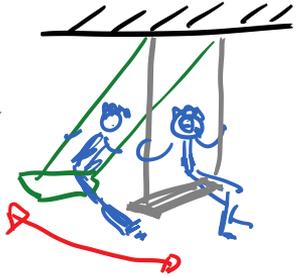
Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

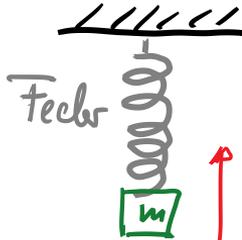
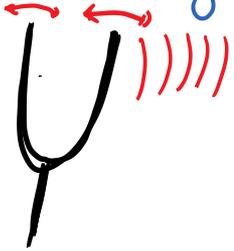
1. Einführung: Federpendel
und harmonische Schwingungen

Schwingungen:
im Alltag:

Schaukel



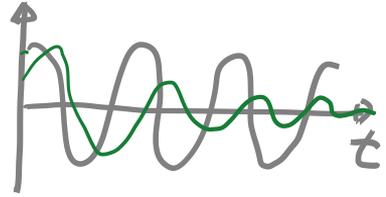
Stimmgabel



Federpendel

Bewegung: periodisch, wiederkehrend

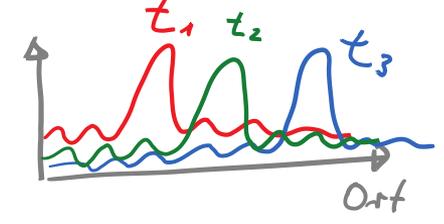
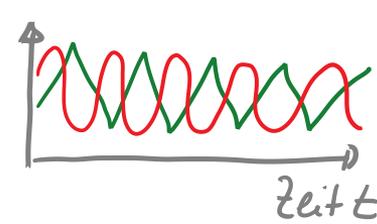
Zeitabhängigkeit



gesucht: Beschreibung der zeitlichen Bewegung einer Schwingung und Erklärung in mathematischem Modell

Unterscheidung:

- Schwingung: nur Zeitabhängigkeit
- Welle: Zeit- und Ortsabhängigkeit
z.B. Wasserwelle, Schall, Erdbeben, Licht



Schwingungen:

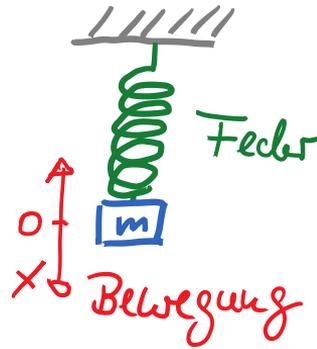
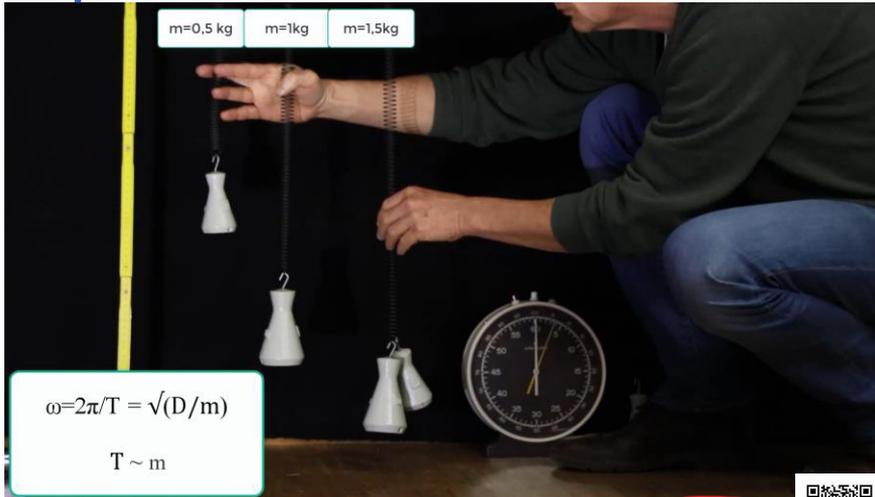
- zentral für viele Bereiche der Physik, z.B. für Mechanik, Akustik, Optik und Technik
- Ziel-Beschreibung von Schwingungen
Übertragung auf Elektromagnetismus und Optik möglich
.... Radio, Ultraschall, Musik....

↳ einfache Schwingungen in Experiment & Mathematik

Federpendel:

- Masse m an Feder
- Bewegung um Ruhelage, regelmäßig,

Experimente:



Beobachtung

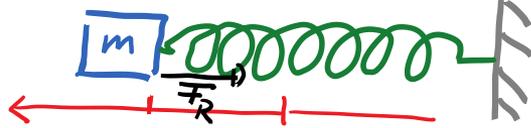
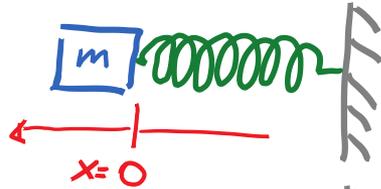
- Federauslenkung $x \sim$ Masse $m \sim \frac{1}{T^2}$
(Hook'sches Gesetz)
- Schwingungsdauer groß für große Masse
- Feder hat Einfluß auf Schwingungsdauer
- Schwingungsdauer / -frequenz unabhängig von Auslenkung

gesucht: mathematische Beschreibung

a) Federpendel: ohne Gewichtskraft

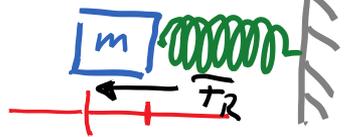
Masse m

Ruhelage $x=0$



Auslenkung aus der Ruhelage \rightarrow

Rückstellkraft \overline{F}_R proportional zu x



$$\overline{F}_R \sim -x$$

\nwarrow entgegen der Auslenkung

$\hookrightarrow \overline{F}_R = -D \cdot x$ (Hook'sches Gesetz)
mit der Federkonstanten D

• D abhängig von Federgröße, Material, Form etc.

• Rückstellkraft $\overline{F}_R \rightarrow$ Beschleunigung von m

$$\overline{F} = m \cdot a = \overline{F}_R$$
$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx} \quad \text{Bewegungsgleichung}$$

• formal, mathematisch: Differentialgleichung 2. Ordnung

gesucht sind Lösungen für $x(t)$, also der Zeitverlauf der Auslenkung, die diese Bewegungsgl. erfüllen:

$$x(t) = ?$$

Also, welches $x(t)$ erfüllt die Bewegungsgl.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx \quad (*)$$

Ansatz: Raten und testen!

- Erfüllt die Funktion $x_A(t) = \frac{1}{2} C t^2$ die Gleichung?

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} x_A = C t ; \quad \frac{d^2}{dt^2} x_A = C$$

und daher ist

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = m \cdot C \neq -D \frac{1}{2} C t^2 \quad \text{für jedes}$$

x_A erfüllt also nicht die Bewegungsgl.

und ist daher keine Lösung

- allgemein: für Lösung muß gelten $\frac{d^2x}{dt^2} \sim x$

- Ansatz: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$ mit Konstanten x_0, ω, δ

$$\hookrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = -\omega \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -\omega^2 \cdot \underbrace{x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)} \\ &= -\omega^2 \cdot x(t) \end{aligned}$$

damit wird (*)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot (-\omega^2) \cdot x(t) = -D \cdot x(t)$$

$\hookrightarrow x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$ ist Lösung der Bewegungsgl. (*), wenn

$$m \omega^2 = D \quad \text{also}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Lösung $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$

Amplitude x_0
maximale Auslenkung

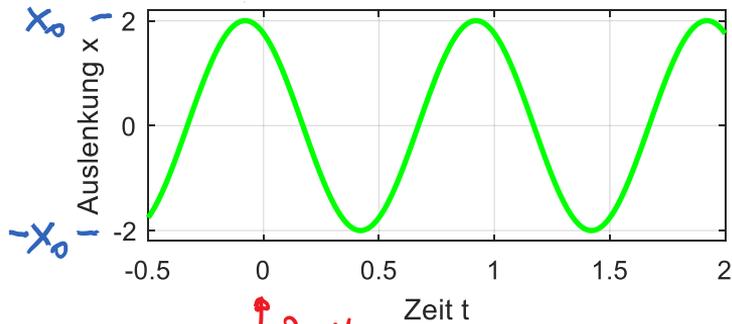
Kreisfrequenz ω

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$

Schwingungsdauer

Frequenz

Phase δ



Zeitnullpunkt

hier für
 $\nu = 1 \text{ Hz}$
 $\hookrightarrow T = 1 \text{ s}$
 $\delta = 0,5$
 $x_0 = 2$

- Periodendauer T , wenn
 $\cos(\omega \cdot (t+T) + \delta) = \cos(\omega t + \delta)$
 $\hookrightarrow \omega T = 2\pi \rightarrow \omega = 2\pi \frac{1}{T}$

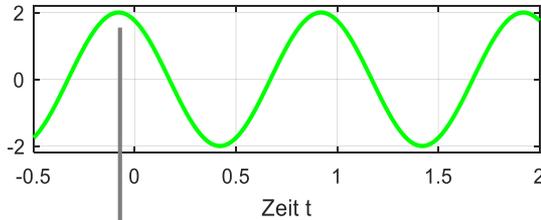
- Bedeutung der Phase δ :
- δ wird durch Wahl des Zeitnullpunkts festgelegt

- auch $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \delta')$ ist Lösung der Bewegungsgleichung, mit einer Phase $\delta' = \delta + \frac{\pi}{2}$

• Periodische Änderung:

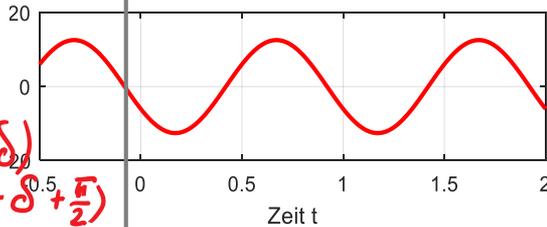
Ort:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \delta)$$



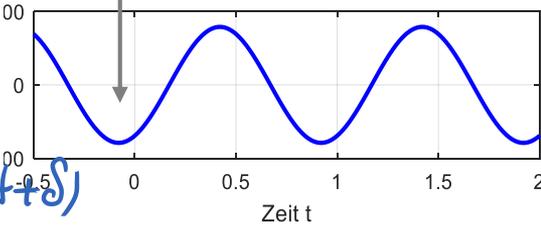
Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} \\ &= -\omega x_0 \sin(\omega t + \delta) \\ &= -\omega x_0 \cos(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$



Beschleunigung

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} \\ &= -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \delta) \\ &= -\omega^2 x \end{aligned}$$



... gleiche ν, T, ω !

• Phasenverschiebung:

- $v(t)$ ist um $\frac{\pi}{2}$ gegen $x(t)$ verschoben

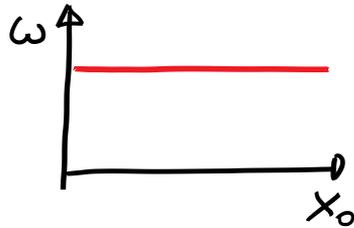
- $a(t)$ " " $\frac{\pi}{2}$ " $v(t)$ " " ,
also um π gegen $x(t)$.

→ wenn x im Maximum (Umkehrpunkt),
ist $v=0$ und a maximal

Kreisfrequenz und Schwingungsdauer:

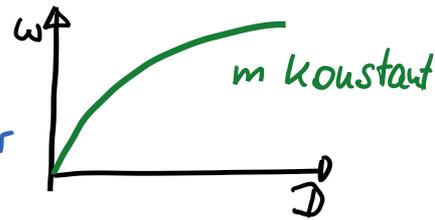
$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

- Unabhängigkeit von Amplitude x_0 \triangleright



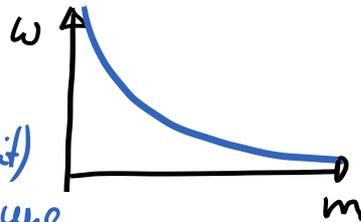
- $\omega \sim \sqrt{D}$; $T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$

höheres D = steife Feder
→ hohe Frequenz



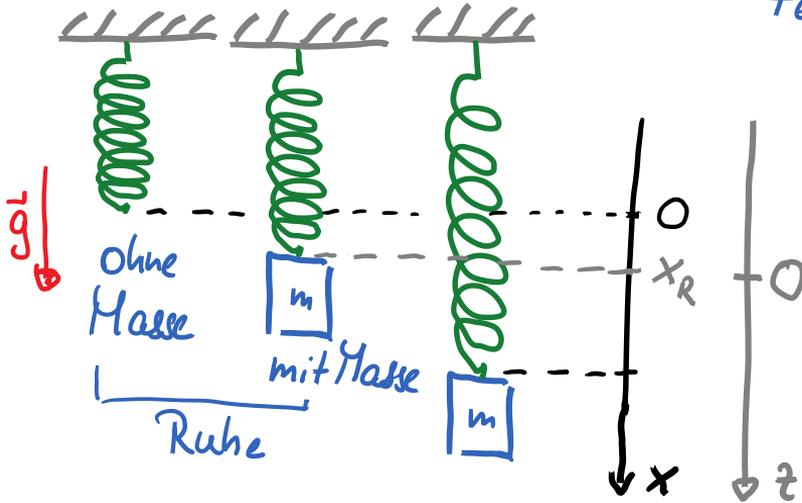
- $\omega \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$; $T \sim \sqrt{m}$

große Masse (Trägheit)
→ langsame Bewegung



b) Federpendel senkrecht

- zusätzliche Gewichtskraft dehnt die Feder



- wie ändert sich die Schwingung (ω, T) durch die zusätzliche Gewichtskraft?

Bewegungsgleichung:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \underbrace{-Dx}_{\text{Feder}} + \underbrace{m \cdot g}_{\text{konstante Gewichtskraft}}$$

- zur Lösung: Koordinatentransformation

$$z = x - x_R \quad \uparrow \text{Auslenkung durch } m \cdot g$$

- Ruhelage: $\vec{F} = 0 = -Dx_R + m \cdot g$

$$\hookrightarrow x_R = m \frac{g}{D}$$

- es gilt: $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (x - x_R) = \frac{d^2 x}{dt^2}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow m \frac{d^2 z}{dt^2} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D(z + x_R) + m \cdot g \\ &= -Dz - D m \frac{g}{D} + m \cdot g \\ &= -Dz \end{aligned}$$



$$\hookrightarrow m \frac{d^2 z}{dt^2} = -Dz$$

• gleiche Form wie Gleichung für horizontales Federpendel

\hookrightarrow gleiche Lösung:

$$z(t) = z_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

die Gewichtskraft führt nur zu einer Verschiebung der Ruhelage!

Frequenz und Schwingungsdauer ist gleich!

$$\text{Federpendel} \rightarrow x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

Harmonische Schwingung wird eine Schwingung bezeichnet, wenn sie durch eine cos- oder sin-Funktion beschrieben wird.

- mathematisch einfach
- von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ (unbegrenzt)
(\rightarrow unrealistisch)
- gute Näherung für viele Schwingungen
- Bewegungsgl. $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Dx$ als Start;

$$\text{Lösung: } x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$
$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

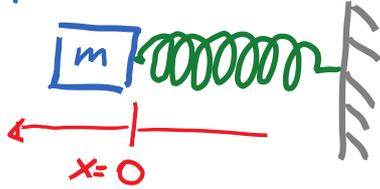
Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

2. Fadenpendel,
physikalisches Pendel,
Torsionspendel

bisher: Federpendel



• Federkraft $F_R = -Dx$

↳ Bewegungsgleichung

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx$$

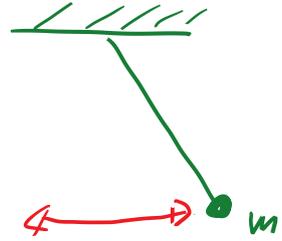
↳ Lösungsansatz:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

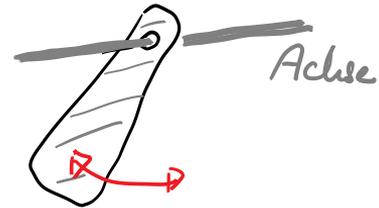
→ $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ Kreisfrequenz ($\omega = \frac{2\pi}{T}$)

jetzt: andere schwingende Systeme

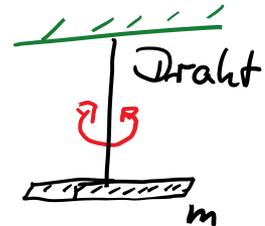
a) Fadenpendel



b) Physikalisches Pendel

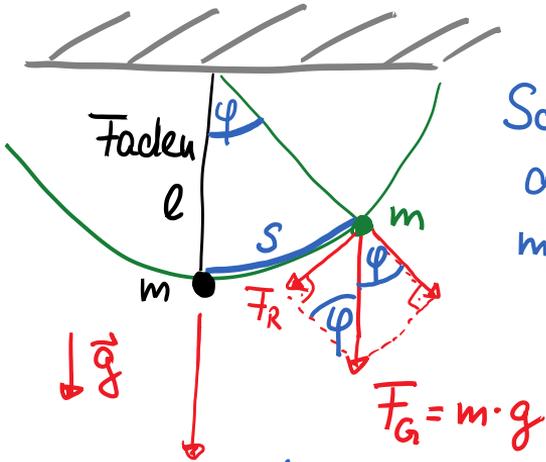


c) Torsionspendel



Ansatz: Bewegungsgleichung

a) das Fadenpendel



Schwingung von m
auf Kreisbahn
mit Radius l

- Faden: Masse vernachlässigbar
- Beschreibung der Bewegung über
 - Auslenkung s ($s=0$ Ruhelage)
 - Winkel φ
- Rückstellkraft $\vec{F}_R = \vec{F}_G \cdot \sin\varphi$

↳ Bewegungsgleichung:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 s}{dt^2} = - m g \sin\varphi$$

↳ Rückstellung

zwei sich zeitlich ändernde Größen $s(t)$ und $\varphi(t)$, die voneinander abhängen: $\varphi(t) = \frac{s(t)}{l}$

$$\hookrightarrow m \frac{d^2 s}{dt^2} = - m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{s}{l}\right) \quad \left. \vphantom{\frac{d^2 s}{dt^2}} \right\} \text{ nur } s$$

oder

$$\hookrightarrow m l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - m g \sin\varphi \quad \left. \vphantom{\frac{d^2 \varphi}{dt^2}} \right\} \text{ nur } \varphi$$

- diese Gleichungen entsprechen nicht der Bewegungsgl. des Fadenpendels

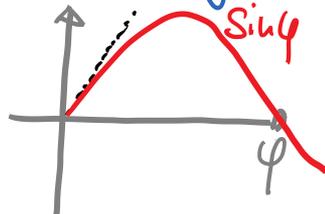
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - D x$$

• Näherung: für kleine Winkel gilt

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

- linearer Ansatz

- φ in rad!



φ [rad]	φ [grad]	$\sin \varphi$
0	0	0
0,0175	1	0,0175
0,0524	3	0,0523
0,175	10	0,1736

damit wird $\sin\left(\frac{s}{l}\right) \approx \frac{s}{l}$ und

(*)

$$\left. \begin{array}{l} \hookrightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s \\ \hookrightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \varphi \end{array} \right\} \text{Bewegungsgl.}$$

Lösung durch Vergleich mit Federpendel

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ \varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta) \end{array} \right. \quad \varphi = \frac{s}{l}$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

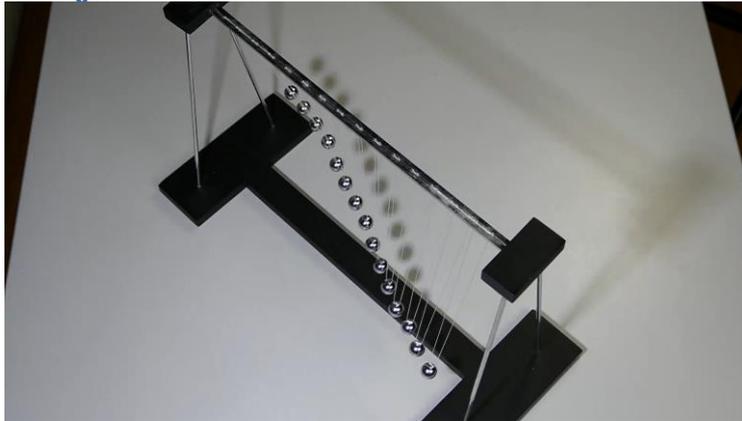
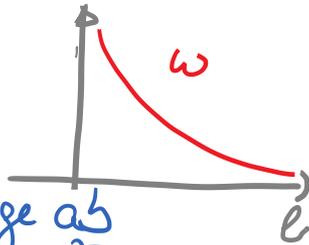
s_0 bzw. φ_0 : maximale Auslenkung
bzw. max. Winkel

Lösungen für $s(t)$ und $\varphi(t)$ äquivalent

- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, also ist

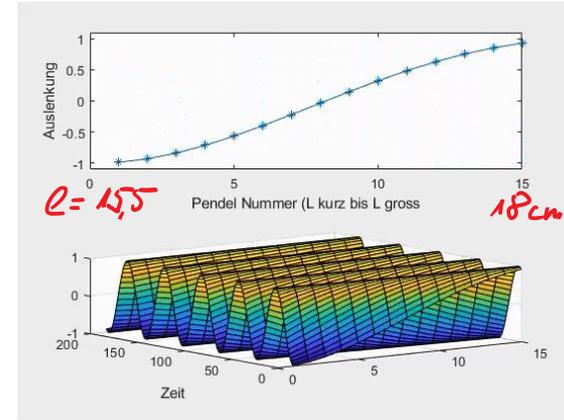
$$\omega \sim \frac{1}{\sqrt{l}} \quad \text{und} \quad T \sim \sqrt{l}$$

Kreisfrequenz und Schwingungsdauer hängen von Fadenlänge ab
 l groß $\rightarrow \omega$ klein, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ groß



Berechnung der Auslenkung

für $l = 15,5$ bis $18,0$ cm



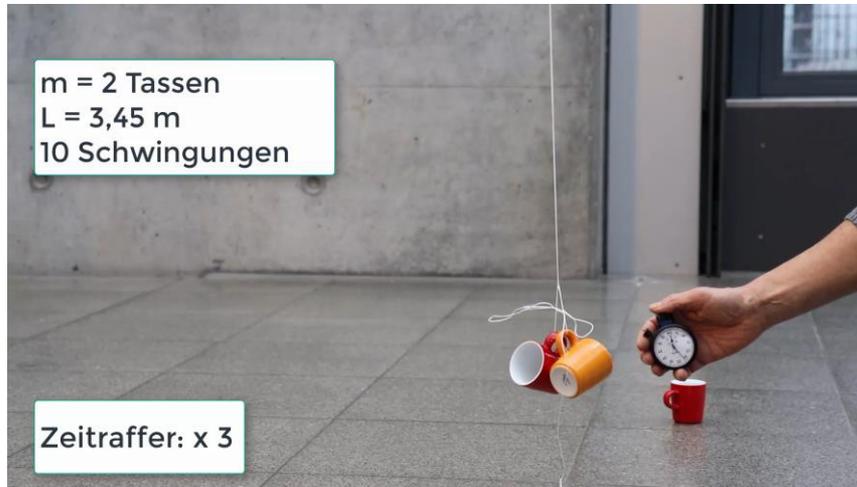
- für $l = 18$ cm $T = 0,78$ s
 $l = 1$ m $T = 2,00$ s $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

• Pendeluhr: Einstellung durch Variation der Pendellänge

- $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ unabhängig von Masse

- Bestimmung von g aus Messung von T und l

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot l$$



- aus Experiment:

Auslenkung s_0 : 10cm, 20cm
 $l = 345$ cm



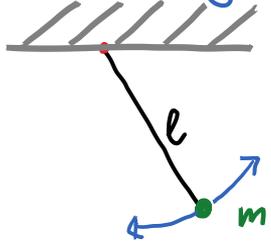
$\hookrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{s_0}{l}\right) = 1,66^\circ$ bzw. $3,3^\circ$
 ... also klein

Messung für 1, 2 oder 3 Tassen: $T = 3,72$ s

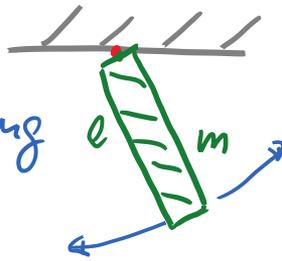
$\hookrightarrow g = 9,84 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Abweichung vom richtigen Wert nur 3% ?
 mögliche Fehler in Längenmessung (ca. 1cm)
 und durch Form der Tasse, also l nicht
 gleich für alle Teilmassen

b) das Physikalische Pendel



Einfluß der Massenverteilung auf ω & T ?



Experiment:

Fadenpendel	physikalisches Pendel mit Stab		
	Masse mittig	Masse am Ende	Massenverteilung

$T = 8/5 \text{ s}$

$T = 13/5 \text{ s}$

$T = 12/5 \text{ s}$

$T = 9/5 \text{ s}$



• allgemeine Beschreibung schwingender Massen: Physikalisches Pendel

- beliebiger Körper

- Drehachse

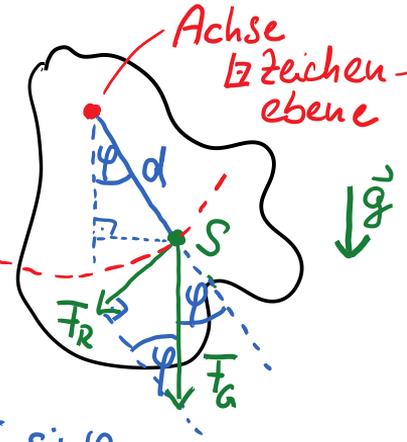
im Abstand d von Schwerpunkt S , der sich auf Kreisbahn bewegt.

Rückstellkraft $\vec{F}_R = -\vec{F}_G \cdot \sin\varphi$

↳ Drehmoment entsteht

$$M = \vec{F}_R \cdot d = -mg \cdot d \cdot \sin\varphi$$

$$\vec{F}_R \perp d \vec{v}$$



↳ allgemein gilt: $M = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Trägheitsmoment Winkelbesch.

und damit

$$I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin\varphi$$

• wie beim Fadenpendel: für kleine φ gilt $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\hookrightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \varphi \quad \text{Bewegungsgl.}$$

$$\text{Lösung: } \varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \mathcal{S})$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

oder mit Bahn $s = d \cdot \varphi$

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega t + \mathcal{S})$$

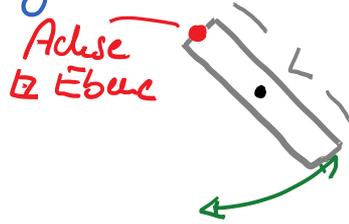
$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Größe und Massenverteilung bestimmt ω (dT)

• wenn Masse in einem Punkt
→ $I = m d^2$ → $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{m d^2}} = \sqrt{\frac{g}{d}}$,
also die Lösung des Fadenpendels

Beispiel: Stab der Länge L ist an einem Ende aufgehängt

Wie groß ist die Schwingungsdauer?



Trägheitsmoment

$$I = \frac{1}{3} m \cdot L^2$$

$$\text{(da } I = \int_0^L r^2 dm = \int_0^L r^2 \cdot \underbrace{g}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{A}_{\text{Querschnitt}} \cdot dr = gA \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^L$$
$$= g \cdot A \cdot \frac{1}{3} L^3 = \frac{1}{3} (g \cdot A \cdot L) \cdot L^2 = \frac{1}{3} m \cdot L^2)$$

• Schwerpunkt: $d = L/2$

$$\hookrightarrow \omega_s = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}} = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L/2}{\frac{1}{3} m L^2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{L}}$$

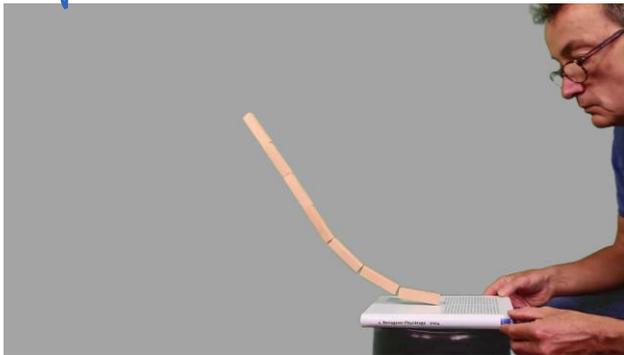
- ω_s - unabh. von m
- Vergleich mit Fadenpendel ($\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$):
für $L = l$:
 ω_s um Faktor $\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$ höher!

Fallender Schornstein: warum bricht er?

Beobachtung:

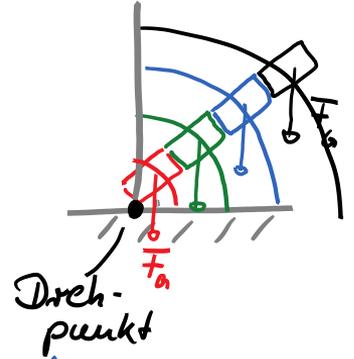


Experiment:



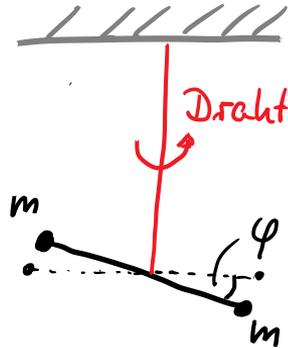
- bereits diskutiert im Kap. über Drehbewegung
- hier als Ergänzung und alternative Beschr.:

Schornstein fällt um Drehpunkt, jedes Teil hat ein unterschiedliches $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$;
Spannung zwischen Stücken & Brechen



c) Torsionspendel

- Masse an Draht
- Drehung um φ
↳ rücktreibende Kraft bzw. Drehmoment entsteht
- Scherungskraft
- für viele Drähte gilt $M \sim \varphi$

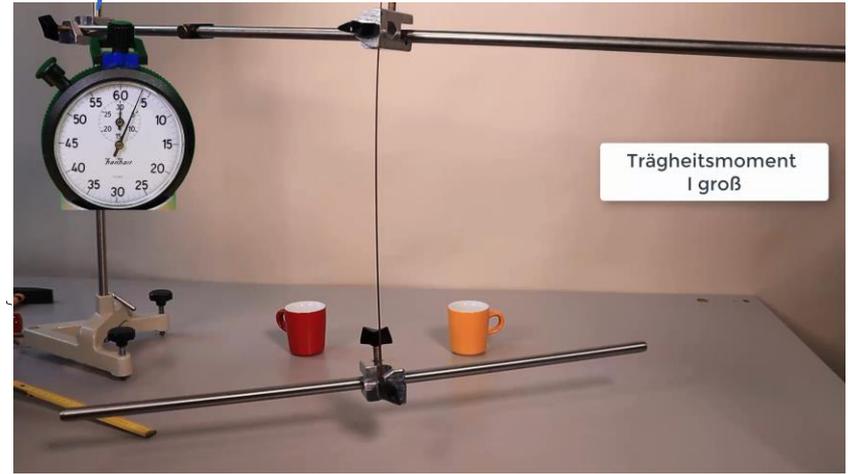


$$\hookrightarrow M = -D \cdot \varphi$$

rücktreibend

Konstante für Draht,
abh. von Länge, Querschnitt,
Material etc.

Experiment



$$\hookrightarrow M = I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi \quad \text{Bewegungsgl.}$$

$$\text{Lösung: } \varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$

Schwingung: I groß $\rightarrow \omega$ klein, T groß

Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

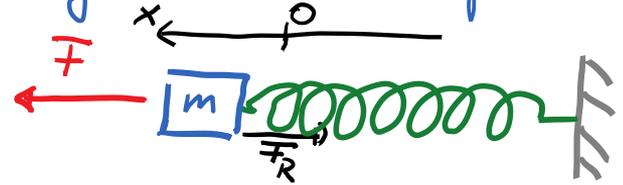
3. Energiebilanz bei harmonischen Schwingungen

- Energie in Bewegung (kinetische Energie) und Lage (potentielle Energie)
- Arbeit \leftrightarrow Energieumwandlung
- Energieerhaltung (ohne Reibung, Wärme)

$$E_G = E_{kin} + E_{pot}$$

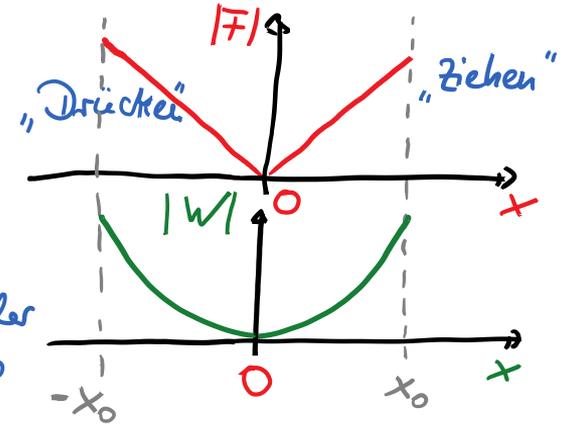
\hookrightarrow Beschreibung für Schwingungen

Beispiel: Energiebilanz des Federpendels



$$\vec{F} = -D\vec{x}$$

$$|\vec{W}| = E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2$$



• Wenn $x = x_0$ oder $x = -x_0$, so

ist die Masse in

Ruhe ($v=0$), also $E_{kin}=0$, und die potentielle Energie maximal

$$\rightarrow E_G = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2 = \text{constant}$$

$$\hookrightarrow \bar{E}_G = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

- maximal Auslenkung: $v=0$; $x=x_0$

$$\bar{E}_G(x=x_0) = 0 + \frac{1}{2} D x_0^2 \quad (*)$$

- minimale Auslenkung: $x=0$; $v=v_{\max}$

$$\bar{E}_G(x=0) = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + 0$$

- Wechsel zwischen \bar{E}_{kin} und \bar{E}_{pot} aus den Lösungen: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$ $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
 $v(t) = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \delta)$ \oplus

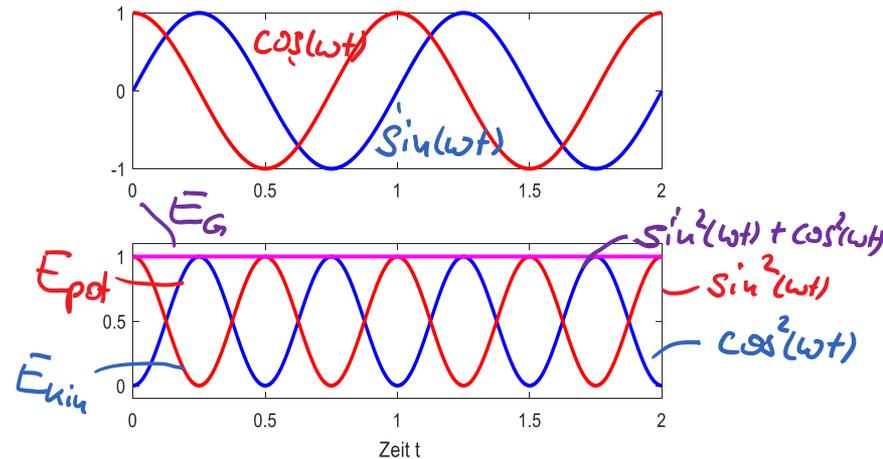
zu jeder Zeit muß gelten:

$$\begin{aligned} \bar{E}_G &= \frac{1}{2} D x_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2 \\ &\quad \uparrow \text{mit } (*) \\ &= \frac{1}{2} m x_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t + \delta) \\ &\quad + \frac{1}{2} D \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

$$\oplus \text{ mit } D = \omega^2 \cdot m \quad \rightarrow$$

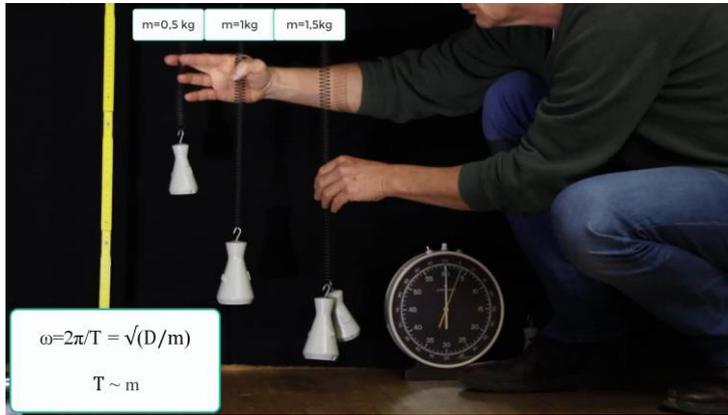
$$\rightarrow \frac{1}{2} D x_0^2 = \frac{1}{2} D x_0^2 \cdot \underbrace{[\sin^2(\omega t + \delta)]}_{\bar{E}_{kin}} + \underbrace{\cos^2(\omega t + \delta)}_{\bar{E}_{pot}}$$

- allgemein gilt für jedes α : $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, daher ist dieser Ausdruck verständlich



Zeitlicher Wechsel zwischen \bar{E}_{kin} & \bar{E}_{pot}

Beispiel: Federpendel, Masse $m = 1,5 \text{ kg}$
 Schwingung mit Amplitude $x_0 = 8 \text{ cm}$
 und Schwingungsdauer $T = 2 \text{ s}$
 gesucht: Gesamtenergie & v_{max}



• $E_G = \frac{1}{2} D x_0^2$, also muß D bekannt sein
 • D hängt mit T zusammen: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

$$\hookrightarrow D = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \cdot m$$

$$\hookrightarrow E_G = \frac{1}{2} D x_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m \cdot x_0^2$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi^2}{(2 \text{ s})^2} \cdot 1,5 \text{ kg} \cdot (0,08 \text{ m})^2 = 0,047 \text{ J}$$

• aus $E_G = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2$

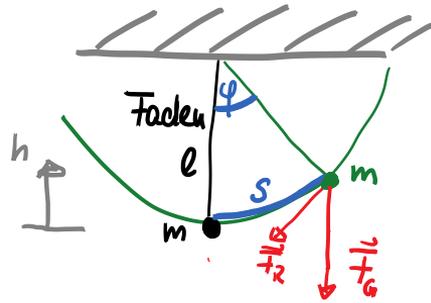
$$\hookrightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 E_G}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 0,047 \text{ J}}{1,5 \text{ kg}}} = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Energiebilanz Fadenpendel:

$$E_G = E_{kin} + \bar{E}_{pot}$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 \quad = m \cdot g \cdot h$$



- einfache Beschreibung für kleines φ :

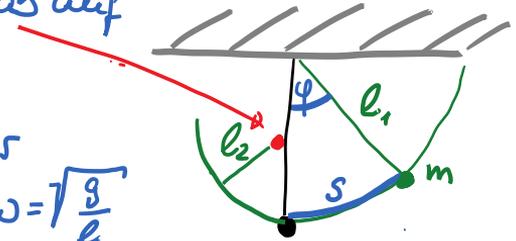
$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

unten: E_{kin} maximal, $\bar{E}_{pot} = 0$

oben: $\bar{E}_{kin} = 0$, $\bar{E}_{pot} = m \cdot g \cdot h$

Beispiel: Änderung der Fadenlänge $l_1 \rightarrow l_2$ durch festen Stab auf einer Seite

→ Änderung der Schwingung $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$



Beobachtung: Pendelhöhe unabh. von $\omega(T)$
→ Energieerhaltung!

Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

4. Gedämpfte Schwingungen

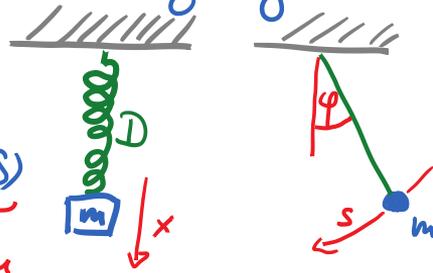
bisher: harmonische Schwingung

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx$$

Lösung: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$

mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

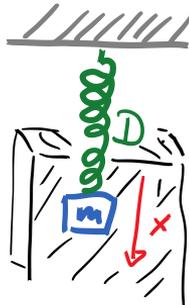
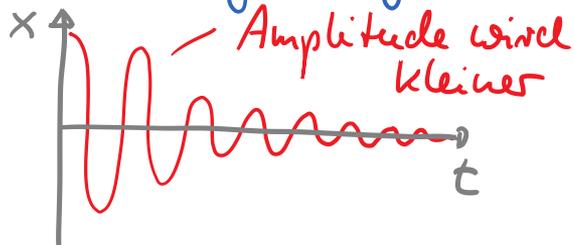
zeitlich
unbegrenzt



reale Schwingungen sind gedämpft,
d.h. die Amplitude nimmt ab

Beispiel: Federpendel in Wasser

→ Reibung, Energieverlust



gesucht: Bewegungsgleichung und Lösung
Ansatz: Bremskraft $v = \frac{dx}{dt}$

$$\hookrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - b \frac{dx}{dt}$$

entgegen der Bewegung

Formal: Differentialgleichung

Lösungsansatz: e-Funktion, nicht cos

dazu notwendig: komplexe Zahlen

↳ Zusammenfassung zu komplexen Zahlen
in Ergänzung / Video

Schritt 1: e-Fkt. & ungedämpfte Schwingung
Schritt 2: e-Fkt. & gedämpfte Schwingung

Schritt 1: ungedämpfte Schwingung & e-Fkt.

Bew.-gl: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx$ (*)



bisher: Raten der Lösung & Einsetzen in Bew.-gl

jetzt: allgemeine Bestimmung der Lösungen durch komplexen Ansatz

$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ mit Konstante λ ,
die bestimmt werden muss

Einsetzen in (*) mit $\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x_0 e^{\lambda t}$
 $\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 \cdot x_0 e^{\lambda t}$

$$m \lambda^2 x_0 e^{\lambda t} + D x_0 e^{\lambda t} = 0$$

$m \lambda^2 + D = 0$ charakteristische Gleichung
 $\lambda^2 = -\frac{D}{m}$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{D}{m}} = \pm \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot i \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}$$

damit ergeben sich zwei Lösungen für λ
und damit auch für $x(t)$:

$$x_1(t) = A \cdot e^{i\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t}$$

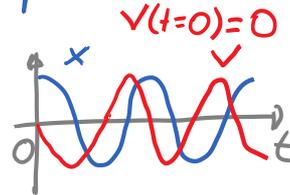
$$x_2(t) = B \cdot e^{-i\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t}$$

↑ Konstanten

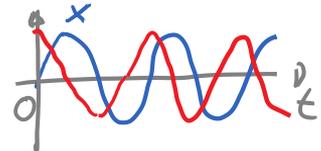
allgemein: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$
mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

die Amplituden A & B müssen bestimmt werden aus den Anfangsbedingungen $x(t=0)$ & $v(t=0)$

Beispiel: $x(t=0) = x_0$



$x(t=0) = 0$
 $v(t=0) = v_0$



i) Anfangsbedingungen sei $\left\{ \begin{array}{l} a) x(t=0) = 0 \\ b) v(t=0) = v_0 \end{array} \right\}$

Einsetzen in allge. Lösung \oplus

a) $x(t=0) = 0 = A \cdot e^{i\omega \cdot 0} + B e^{-i\omega \cdot 0} = A + B$
 $\hookrightarrow B = -A$

b) $v(t=0) = v_0 = \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0}$
 $= i\omega A e^{i\omega \cdot 0} - i\omega B e^{-i\omega \cdot 0}$
 $v_0 = i\omega A - i\omega B = 2i\omega A$
 $\hookrightarrow A = \frac{v_0}{2i\omega} ; B = -\frac{v_0}{2i\omega}$

damit wird die Lösung

$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cdot \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$
 $= \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$

Eulersche Formel
 (siehe Komp. Z.)

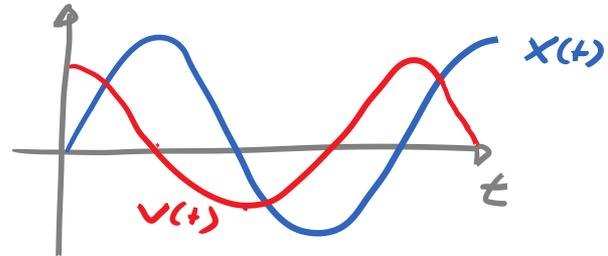
aus den Anfangsbedingungen hat sich eine spezielle Lösung gebildet

$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$

$\underbrace{\frac{v_0}{\omega}}_{= X_0}$
 Amplitude

$\uparrow \delta = 0$
 $\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

x_0 und Phase δ sind also festgelegt



ii) Anfangsbedingung sei a) $x(t=0) = x_0$
b) $v(t=0) = 0$

Einsetzen in allgem. Lösung \oplus

$$a) x(t=0) = x_0 = A \cdot \underbrace{e^{i\omega 0}}_{=1} + B \cdot \underbrace{e^{-i\omega 0}}_{=1} = A + B$$

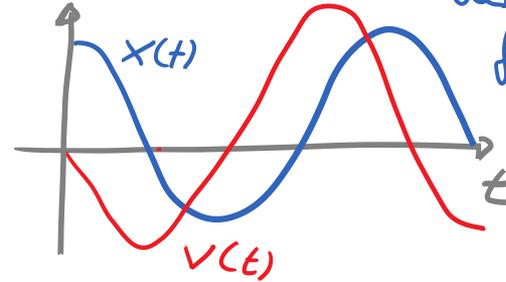
$$b) v(t=0) = 0 = i\omega A e^{i\omega 0} - i\omega B e^{-i\omega 0} = A i\omega - B i\omega$$

$$\hookrightarrow A = B$$

$$\hookrightarrow x_0 = 2A \rightarrow A = B = \frac{x_0}{2}$$

$$x(t) = x_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})}_{\text{Euler'sche Formel}} \\ = x_0 \underbrace{\cos(\omega t)}$$

• wieder eine spezielle Lösung $x(t)$, in der x_0 & Phase festgelegt sind



c) andere Anfangsbedingungen
 \rightarrow andere Lösung

Hinweis: ändert sich die Schwingung/
die Physik / die Welt, wenn die
Uhr verstellt wird?

Schritt 2: gedämpfte Schwingung

Dämpfungskraft \rightarrow
für viele Medien ist Reibung
 $F_D \sim v$

(und dies ist gut zu rechnen)

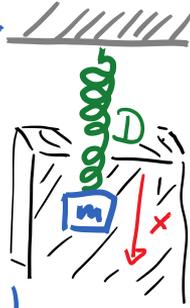
\hookrightarrow Bewegungsgleichung

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - b \frac{dx}{dt}$$

„Federkraft“ Dämpfung $\sim v$

mit $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$; ω_0 im ungedämpften Fall

$2\gamma = \frac{b}{m}$; γ = Dämpfungskonstante



$$\hookrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Lösungsansatz: $x(t) = c e^{\lambda t}$
Konstanten

\hookrightarrow Bestimmungsgleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

und daraus die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

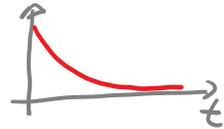
\hookrightarrow allgemeine Lösung

$$\otimes x(t) = e^{-\gamma t} \cdot [c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}]$$

die Konstanten c_1 & c_2 müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

$$x(t) \sim e^{-\gamma t}$$

Schwingung?



Unterscheidung von mehreren Fällen:

a) schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$
mit der Abkürzung $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 > 0$
wird $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{-\omega^2} = \gamma \pm i\omega$
und $x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$

spezielle Lösung für Wahl der

Anfangsbedingungen: $x(t=0) = x_0$
 $v(t=0) = 0$

$$\hookrightarrow x(t=0) = x_0 = 1 \cdot (c_1 + c_2)$$

$$\hookrightarrow v(t=0) = 0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -\gamma(c_1 + c_2) + i\omega c_1 - i\omega c_2$$
$$= -\gamma x_0 + i\omega(c_1 - c_2)$$

diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn

$$\operatorname{Re}(c_1 - c_2) = 0$$

$$\hookrightarrow c_1 = c_2$$

$$\text{und damit } c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$$

Der Realteil $x(t)$ wird somit

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(\frac{x_0}{2} e^{i\omega t} + \frac{x_0}{2} e^{-i\omega t} \right)$$

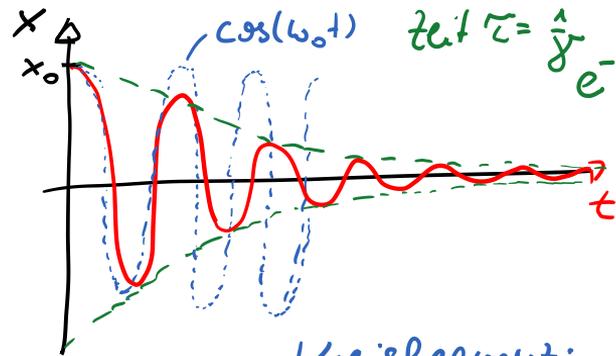
und wieder mit der Eulerschen Formel

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$$

Amplitude

exponentielle Abnahme
der Amplitude

„Einhüllende“: nach
Zeit $\tau = \frac{1}{\gamma}$ Abfall auf
 $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$



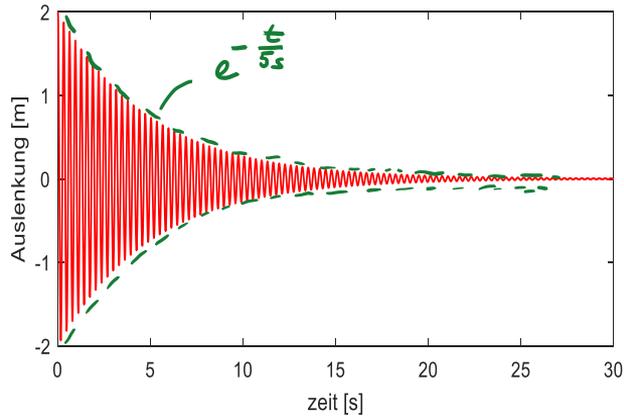
Kreisfrequenz:

gedämpft $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$ ungedämpft

Beispiel: $\omega_0 = 20 \text{ Hz}$; $\gamma = 0,2 \frac{1}{\text{s}}$

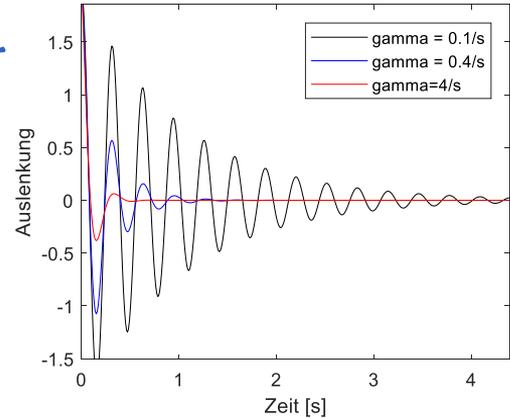
$\hookrightarrow T = \frac{1}{\gamma} = 5 \text{ s}$ \rightarrow nach $t=5 \text{ s}$ Abfall der
Einhüllenden auf $\frac{1}{e} = 0,37$

$\hookrightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{20^2 - 0,04} \text{ Hz} = 19,99 \text{ Hz}$
etwas kleiner
als $\omega_0 = 20 \text{ Hz}$



andere Anfangsbedingungen \rightarrow andere
Lösungen

Einfluss von γ



b) starke Dämpfung: $\gamma \gg \omega_0$

damit ist: $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\hookrightarrow \lambda_{1,2}$ ist reell

allgemeine Lösung: $x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t})$

wieder können die Konstanten c_1 & c_2 aus
den Anfangsbedingungen gewonnen werden.

i) Anfangsbed. $x(t=0) = 0$, $v(t=0) = v_0$
 aus $x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t})$

wird $x(t=0) = 0 = c_1 + c_2 \rightarrow c_2 = -c_1$
 sowie $v(t=0) = v_0 = -\gamma \underbrace{e^{-\gamma \cdot 0} (c_1 e^{\alpha \cdot 0} + c_2 e^{-\alpha \cdot 0})}_{\oplus}$
 $+ e^{-\gamma \cdot 0} \alpha (c_1 e^{\alpha \cdot 0} - c_2 e^{-\alpha \cdot 0})$

es ist $\oplus = x(t=0) = 0$

$$\hookrightarrow v_0 = \alpha (c_1 - c_2) = 2\alpha c_1$$

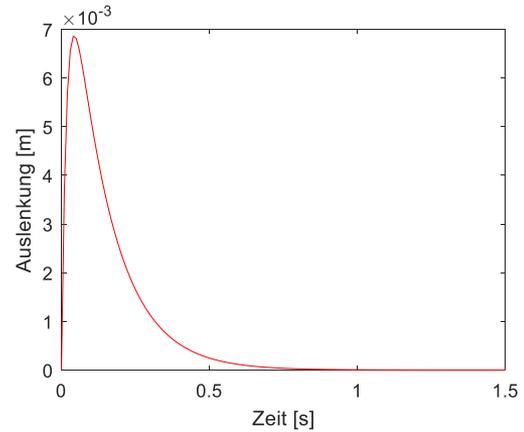
$$\rightarrow c_1 = \frac{v_0}{2\alpha}; \quad c_2 = -\frac{v_0}{2\alpha}$$

• damit wird die Lösung:

$$x(t) = \frac{v_0}{2\alpha} \cdot e^{-\gamma t} \underbrace{(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})}_{\text{red bracket}}$$

$$= \frac{v_0}{2\alpha} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \underbrace{\sinh(\alpha t)}_{\text{red bracket}}$$

Zeitverlauf entspricht einer Auslenkung, die für $t \rightarrow \infty$ gegen $x=0$ geht.



\hookrightarrow für eine starke Dämpfung $\gamma \gg \omega_0$:
 Amplitude geht für großes t langsam gegen 0: Kriechfall

ii) Anfangsbed. $x(t=0) = x_0$, $v(t=0) = 0$

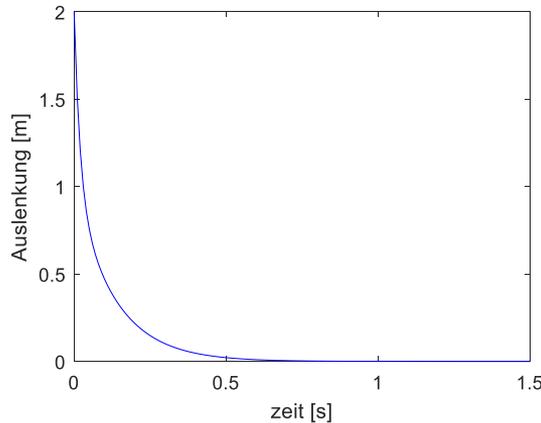
ähnliche Rechnung liefert

$$\begin{aligned} \hookrightarrow x(t) &= \frac{x_0}{2} e^{-\gamma t} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \\ &= x_0 e^{-\gamma t} \cosh(\alpha t) \end{aligned}$$

für $\omega_0 = 20 \text{ Hz}$

$\gamma = 40 \text{ /s}$

$x_0 = 2 \text{ m}$



c) aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$

• die Dämpfung γ ist der Kreisfreq. ω_0 im ungedämpften Fall angepasst:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma$$

also $\lambda_1 = \lambda_2$ („entartet“)

Ansatz für Lösung $x(t)$:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 + c_2 t) = e^{-\gamma t} C \quad (C = c_1 + c_2 t)$$

• dies kann nicht die richtige Lösung sein, da zwei Integrationskonstanten vorhanden sein müssen.

• Ansatz: „Variation der Konstanten“

$C = c_1 \cdot t + c_2$ erfüllt die Bewegungsgleichung \rightarrow

Ansatz $C = c_1 \cdot t + c_2$ erfüllt die Bewegungsgl.

denn: $x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 \cdot t + c_2)$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\gamma e^{-\gamma t} (c_1 \cdot t + c_2) + e^{-\gamma t} c_1 \\ &= -\gamma x + e^{-\gamma t} c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\gamma (-\gamma x + e^{-\gamma t} c_1) - \gamma e^{-\gamma t} c_1 \\ &= \gamma^2 x - 2\gamma c_1 e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

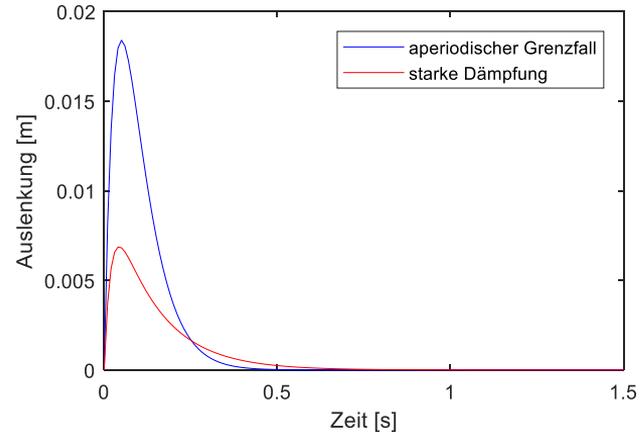
durch Einsetzen sieht man leicht, daß damit die Bewegungsgl. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ erfüllt wird.

wieder lassen sich c_1 und c_2 durch die Anfangsbedingungen festlegen:
sei $x(t=0) = 0$ & $v(t=0) = v_0$

$$\hookrightarrow x(t=0) = 0 = c_1 \cdot 0 + c_2 \rightarrow c_2 = 0$$

$$v(t=0) = v_0 = -\gamma x(t=0) + e^{-\gamma \cdot 0} c_1 = c_1$$

$\hookrightarrow x(t) = v_0 \cdot t e^{-\gamma t}$ aperiodischer Grenzfall



Schnelleres Abfall der Amplitude für aperiodischen Grenzfall als für starke Dämpfung (überdämpfung)

→ Anpassung der Dämpfungskonstante
 $\gamma = \omega_0$, damit die Amplitude schnell
fällt!

↳ Schwingungsdämpfer

- in Autos
- in Maschinen etc.

Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

5. Erzwungene Schwingungen

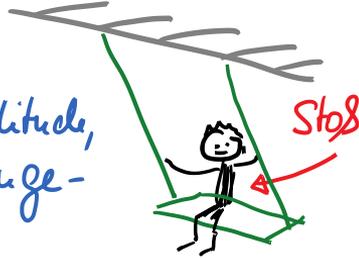
bisher: freie & gedämpfte Schwingung

jetzt: zusätzliche äußere Störung
↳ erzwungene Schwingung

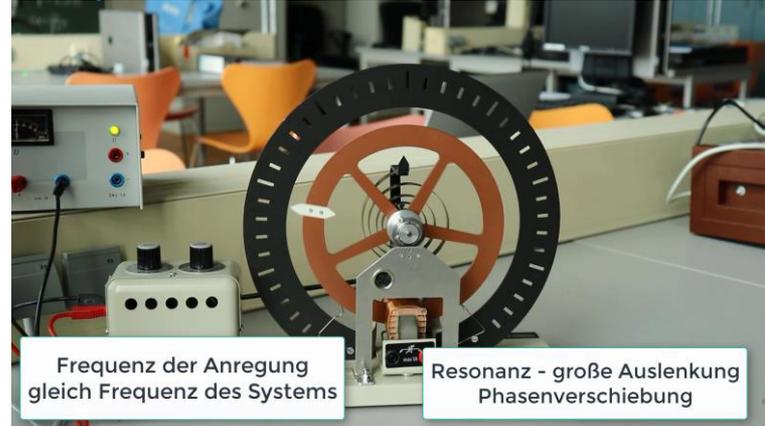
Beispiele:

- Schaukel: periodische Stöße erhöhen die Amplitude, wenn die Zeitpunkte angepasst sind
- Brücke: periodische Anregung → große Schwingungsamplitude
- Glas, das durch Schall zerspringt

Energiezufuhr notwendig



Beispiel: Erzwungene Schwingung



Zeitverlauf abhängig von

- Eigenfrequenz des Systems
- Dämpfung
- Amplitude / Stärke sowie
- Frequenz und Phase der äußeren Anregung

Beispiel: Resonanz bei Stimmgabeln

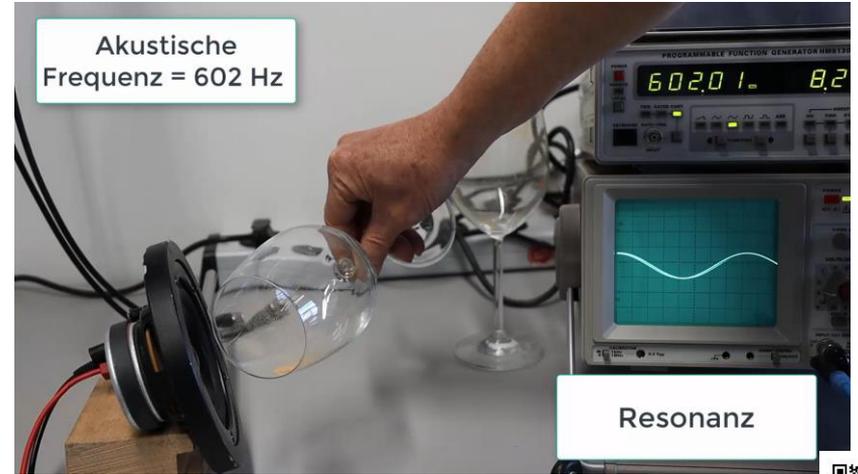


Übertragung von Schwingungsenergie
hier, wenn

Anregungsfrequenz = Eigenfrequenz

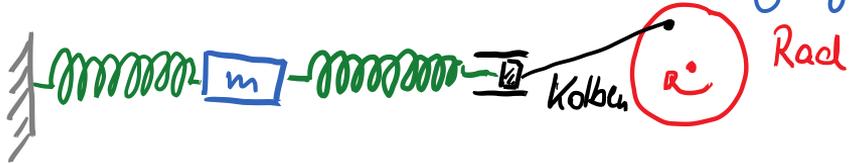


Beispiel: Resonanz



- Korkmehl „tanz“ in Weinglas, wenn
Anregungsfrequenz = Eigenfrequenz
... Glas schwingt

Federpendel mit periodischer, äußerer Anregung



Masse m zwischen zwei Federn;
Drehen des Rades \rightarrow Kolben bewegt sich
und überträgt Kraft \rightarrow Anregung
Bewegungsgl.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + Dx = F_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$= F = m \cdot a$ $\underbrace{\hspace{2cm}}$ Dämpfung $\underbrace{\hspace{2cm}}$ Federkraft $\underbrace{\hspace{2cm}}$ äußere Anregung mit ω

mit $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$, $\gamma = \frac{b}{2m}$, $K = \frac{F_0}{m}$

$\hookrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = K \cos(\omega t)$

inhomogene Differentialgl.

Allgemeine Lösung hier ohne Beweis:

$$x(t) = \underbrace{A_1 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{A_2 \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{inhomogene Lös.}}$$

mit $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und Phasen φ_1 & φ

• für große Zeiten t nach dem Einschwingen:

homogene Lösung = 0 (Dämpfung)

stationärer Fall $x(t) = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

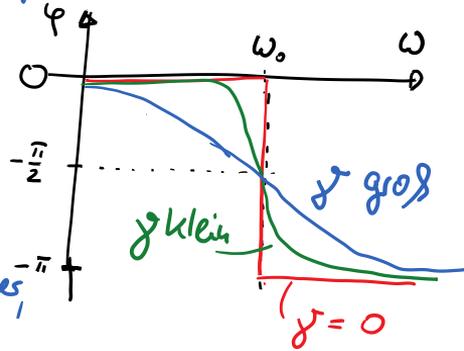
\uparrow Amplitude?
 \uparrow Phase

A_2 & φ als Funktion von ω_0, γ, ω

→ längere Rechnung liefert:

$$\tan \varphi = -\frac{2\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

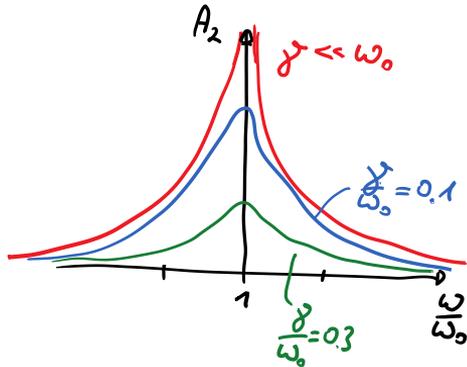
- Phasenverschiebung φ wächst von 0 auf π ,
- $\varphi < 0$, d.h. die Schwingung läuft der Anregung hinterher,
- Phasensprung um π für $\gamma = 0$ bei $\omega = \omega_0$



$$A_2 = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 - 4\gamma^2 \omega^2}}$$

Amplitude abhängig von

- $A \sim K = \frac{F}{m}$ äußere Kraft
- Dämpfung γ
- von Eigenfrequenz ω_0 und Anregungsfrequenz ω
- Resonanz für $\omega = \omega_0$, A_2 groß für γ klein.

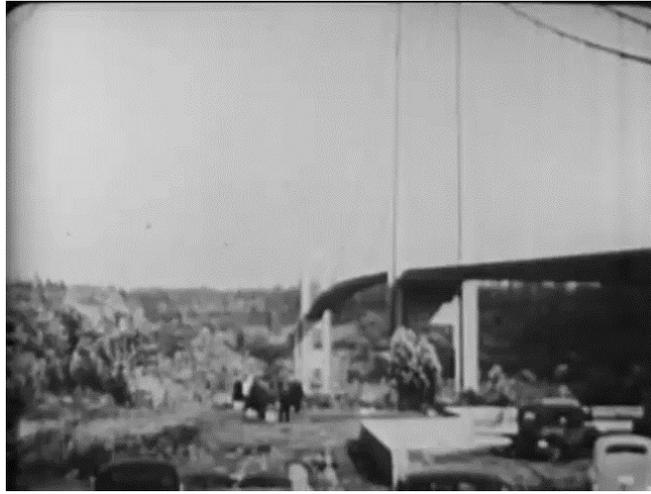


• Resonanzkatastrophe:

kleine Dämpfung; mit jeder Schwingung erhält das System zusätzliche Energie durch die äußere Anregung

→ Amplitude wächst, theoretisch bis ∞

Beispiel: Einsturz Tacoma Bridge (1940)



- Anregungsenergie: Wind & Bernoulli-Effekt

Beispiel: Fackelpendel

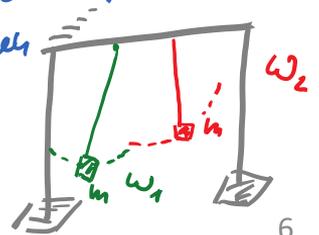
- Resonanz \rightarrow Energieübertragung
- hier durch schwingendes Gerüst



... Anregungsfrequenz \equiv Eigenfrequenz

\hookrightarrow Energie wird übertragen

... Träg. muß angepasst sein



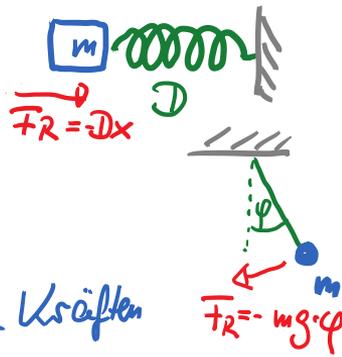
Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

6. Gekoppelte Schwingungen

bisher: Schwingungen mit einer Rückstellkraft



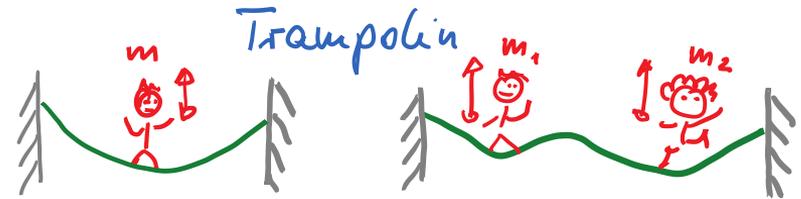
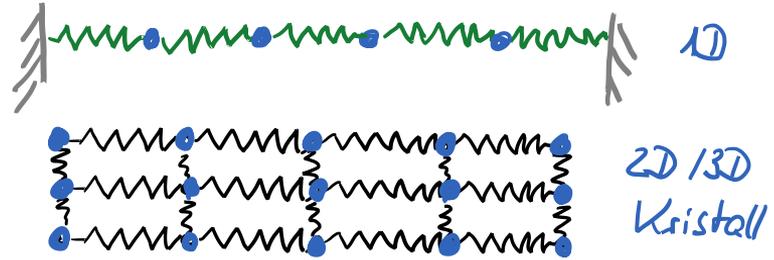
jetzt: System mit mehreren Massen und mehreren Kräften

Beispiel: zwei gekoppelte Schaukeln

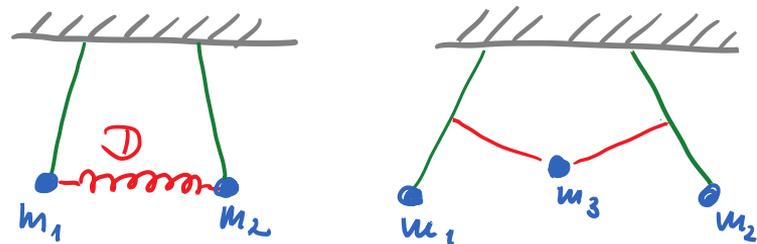


Gekoppelte Schwingungen:

Beispiel: mehrere Massen & Federn



gekoppelte Pendel

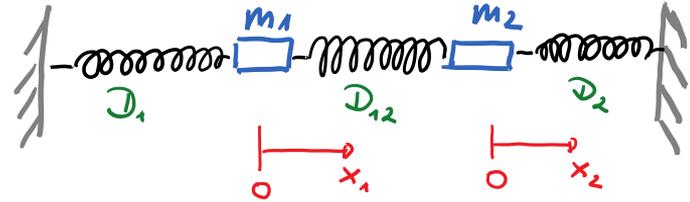


Beispiel: zwei Fadenpendel, über dritte Masse gekoppelt



- Beobachtung: Bewegung / Energie / Amplitude wechselt zwischen den Massen
- mathematische Lösung für einfache Fälle

Betrachtung für gekoppeltes Federpendel mit zwei Massen



- m_1 & m_2 mit Koordinaten x_1 & x_2
- Bewegungsgleichungen:

$$\begin{cases} F_1 = m_1 \ddot{x}_1 = -D_1 x_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \\ F_2 = m_2 \ddot{x}_2 = -D_2 x_2 - D_{12}(x_2 - x_1) \end{cases}$$

↑ Auslenkung der mittleren Feder

$\dot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

- zwei Differentialgleichungen
- Kopplung: die Beschl. jeder Masse hängt von beiden Koordinaten ab

• Sonderfall: es sei $m_1 = m_2 = m$ und $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$

$$\hookrightarrow m \cdot \ddot{x}_1 = -\mathcal{D}x_1 - \mathcal{D}_{12}(x_1 - x_2) \quad \textcircled{\text{I}}$$

$$m \cdot \ddot{x}_2 = -\mathcal{D}x_2 - \mathcal{D}_{12}(x_2 - x_1) \quad \textcircled{\text{II}}$$

$$\text{I} + \text{II} : m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\mathcal{D}(x_1 + x_2)$$

$$\text{I} - \text{II} : m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -\mathcal{D}(x_1 - x_2) - 2\mathcal{D}_{12}(x_1 - x_2)$$

• mit der Koordinatentransformation

$$z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

$$\hookrightarrow \left. \begin{aligned} m \ddot{z}_1 &= -\mathcal{D}z_1 \\ m \ddot{z}_2 &= -(\mathcal{D} + 2\mathcal{D}_{12})z_2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Gleichungen für} \\ \text{harmonische} \\ \text{Schwingungen!} \end{array}$$

• damit ergeben sich als Lösungen:

$$z_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{D}}{m}}$$

$$\text{und} \quad z_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{mit} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{D} + 2\mathcal{D}_{12}}{m}}$$

mit Amplituden A_1 & A_2 und Phasen φ_1 & φ_2

→ in diesen neuen Koordinaten z_1 & z_2 ergeben sich harmonische Schwingungen

→ Normalkoordinaten

• Rücktransformation in x_1 & x_2 notwendig, wenn die Bewegung der einzelnen Massen gesucht ist.

• für Sonderfall $A_1 = A_2 = A$

$$\hookrightarrow x_1 = z_1 + z_2 = A \cdot [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]$$

$$x_2 = z_1 - z_2 = A [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]$$

aus Formelsammlung für trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

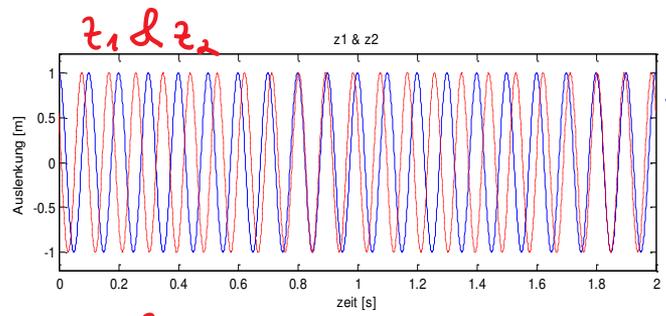
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

also:

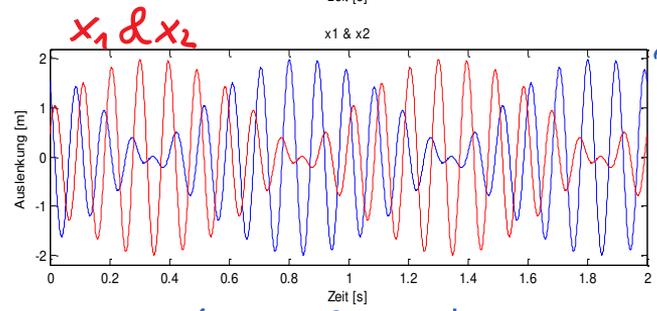
$$x_1 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$$x_2 = -2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Darstellung $z_1(t)$ & $z_2(t)$ und $x_1(t)$ & $x_2(t)$ für:
 $\omega_1 = 2\pi \cdot 10 \text{ Hz}$, $\omega_2 = 1,1 \cdot \omega_1$, $A_1 = A_2 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1 \text{ rad}$



Normalkoord.
 • untersch. Freq.



Position der
 Massen

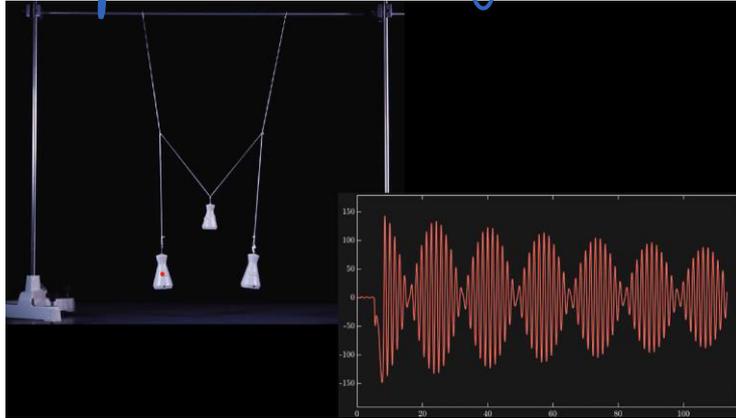
z_1 & z_2 : Schwingung mit unterschiedlichen Frequenzen
 x_1 & x_2 : Amplituden wechseln mit kleiner Frequenz

Wechsel der Amplituden zwischen Maximum und Ruhe
 → Geschwindigkeit & Energie wechselt zwischen m_1 & m_2

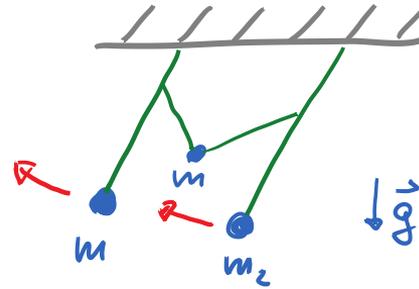
Gekoppelte Schwingungen:

- Normalkoordinaten & Normalfrequenzen

Beispiel: Beobachtung der Normalfreq.

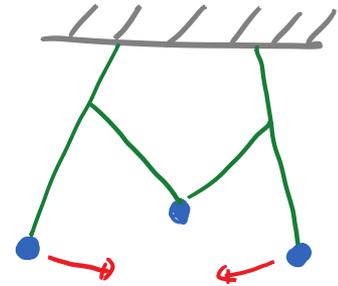


- zwei Frequenzen $\nu_1 = 0,691 \text{ Hz}$, $\nu_2 = 0,636 \text{ Hz}$



synchrone Schwingung
beider Massen in gleiche
Richtung (in Phase)

$$\rightarrow \nu_2$$

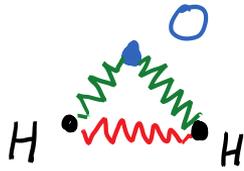


gegenläufige Schw.,
Phasenverschiebung
um π

$$\rightarrow \nu_1$$

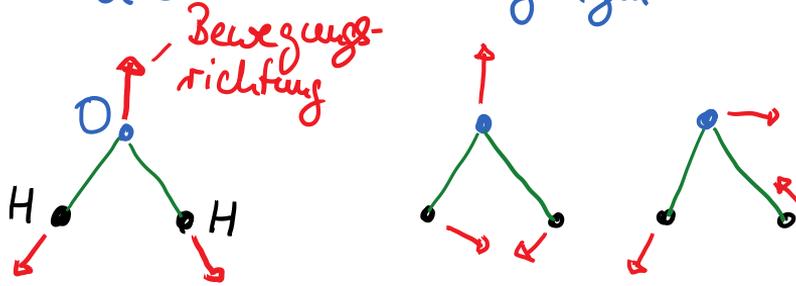
Beispiel: Molekülschwingungen

im H_2O :



Model: Kräfte halten
Atome im Gleichgewicht

drei Normalschwingungen



unterschiedliche Frequenz in Normalschw.
↳ Licht untersch. Frequenz (Wellenlänge)
wird absorbiert

Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

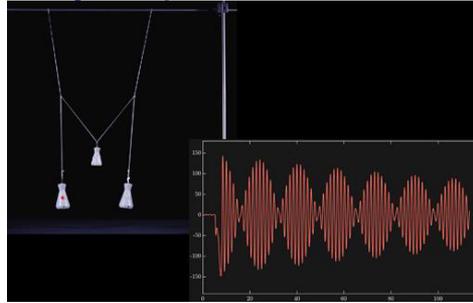
Prof. Dr. Matthias Kohl

7. Überlagerung von
Schwingungen

- gekoppelte Schwingungen

- Amplituden addieren sich

- unterschiedliche Frequenzen



↳ Überlagerung von Schwingungen

hier: Betrachtung der Überlagerung

- für gleiche / ungleiche Frequenzen
- in Abhängigkeit von Phase

a) Schwingungen mit gleicher Frequenz

Sei: $z_1 = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$
 $z_2 = b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$

unterschiedl. Phase

untersch. ↑
Amplitude

↑ gleiche Frequenz

mit: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Umformung liefert (Rechnung im Anhang):

$$z = z_1 + z_2 = A \cdot \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$= C \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

mit $A = a \cos\varphi_1 + b \cos\varphi_2$

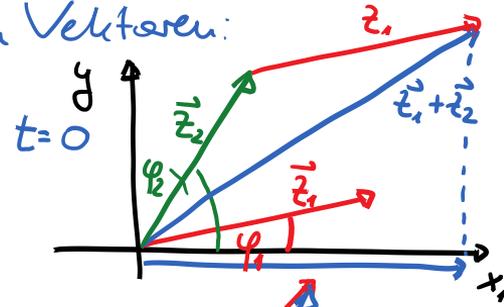
$B = -a \sin\varphi_1 - b \sin\varphi_2$

$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\tan\varphi = -\frac{B}{A}$

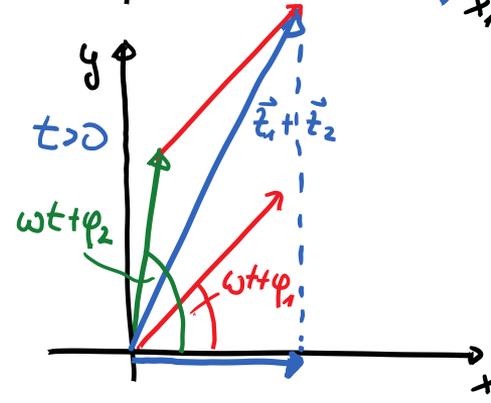
→ die Frequenz ω bleibt erhalten!

Darstellung durch Vektoren:

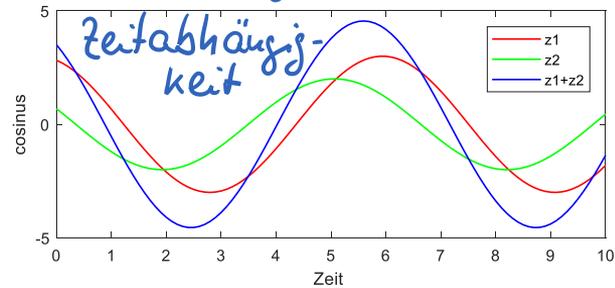
\vec{z}_1 & \vec{z}_2 rotieren mit der Zeit um Ursprung; betrachtet wird die



\vec{z}_1 , \vec{z}_2 & $\vec{z}_1 + \vec{z}_2$ rotieren in Phase, aber mit unterschiedlichen Winkel.



↳ Projektion auf x-Achse: cos-förmig



Beispiele

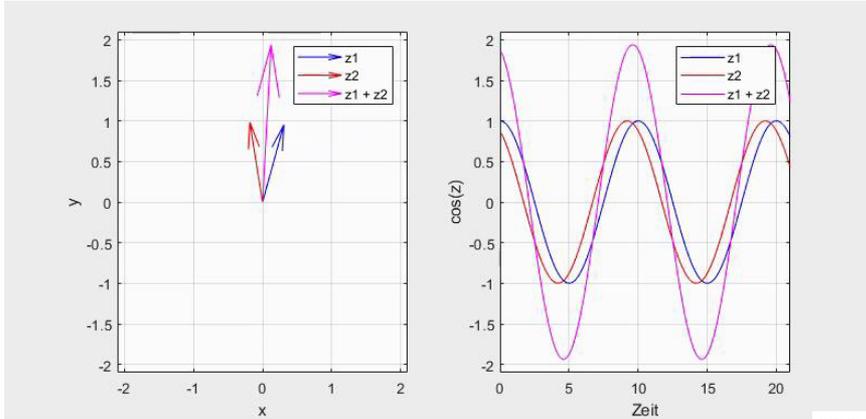
Schwingung mit gleicher Frequenz

sei: $z_1 = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$

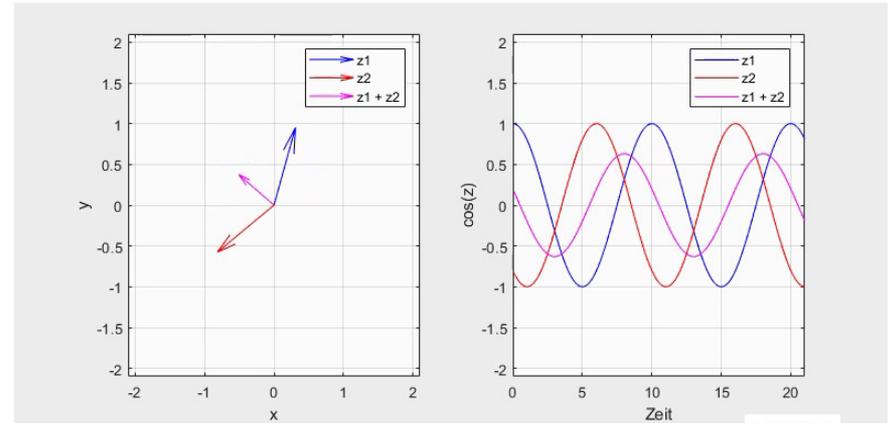
$z_2 = b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$

$\hookrightarrow z_1 + z_2$

für $a=b=1$; $\varphi_1=0$; $\varphi_2=0,5 \text{ rad}$
 $\omega_1=\omega_2=2\pi \cdot 0,1$



für $a=b=1$; $\varphi_1=0$; $\varphi_2=2,5 \text{ rad}$
 $\omega_1=\omega_2=2\pi \cdot 0,1$



b) Schwingung mit verschiedenen Frequ.

$$z_1 = a \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \quad \text{Phasen} = 0$$

$$z_2 = b \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$$

$$\text{mit } \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Sei $a = b$:

$$z = z_1 + z_2 = 2a \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

A halbe Differenz d. Kreisfreq. mittlere Kreisfreq.
B

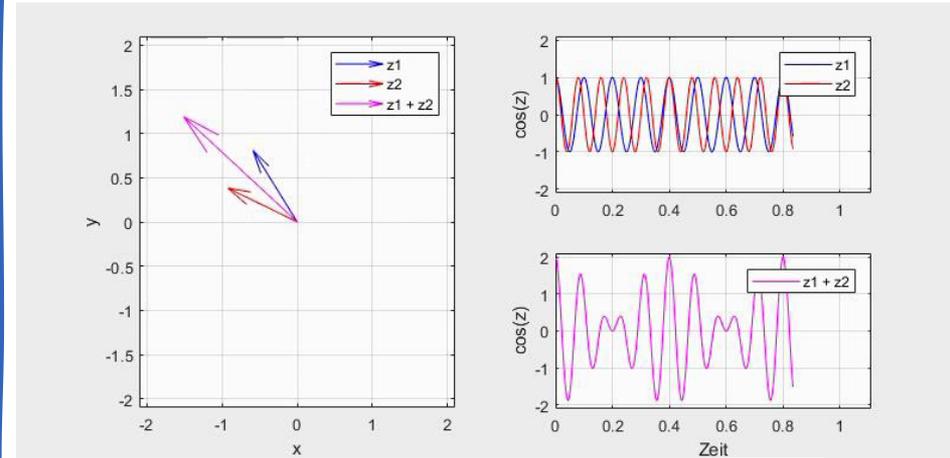
• Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$, also ähnliche Frequenzen:

$$\hookrightarrow \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$$

\hookrightarrow die Modulation $\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$ ist schneller als die von $\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$

$\rightarrow 2a \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ als langsam modulierte Amplitude des schnell modulierten Signals
 \rightarrow periodisches Signal z mit 2 Freq.

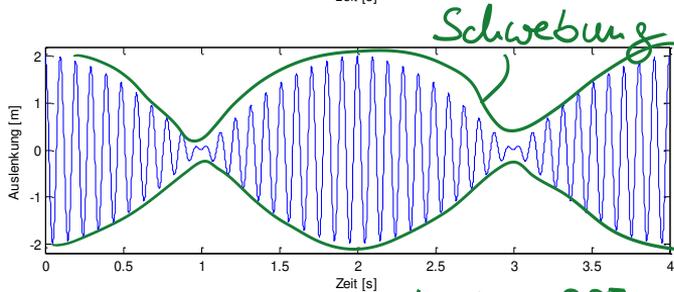
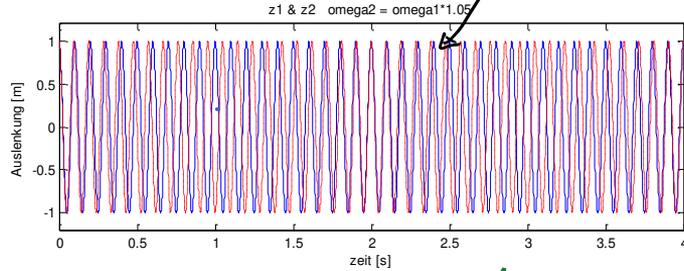
Beispiel: $a = b = 1$; $\omega_1 = 2\pi \cdot 10$; $\omega_2 = \omega_1 \cdot 1,25$



Beispiel: $z_1 = a \cdot \cos(\omega_1 t)$ $z_2 = b \cdot \cos(\omega_2 t)$
 mit $a = b = 1$ $\omega_1 = 2\pi \cdot 10 \text{ Hz}$

für $\omega_2 = \omega_1 \cdot 1,05$

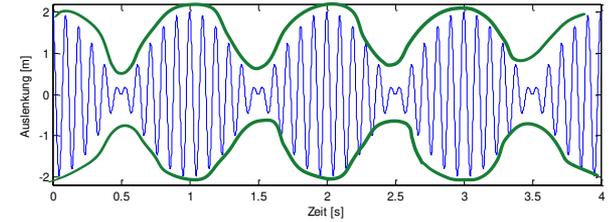
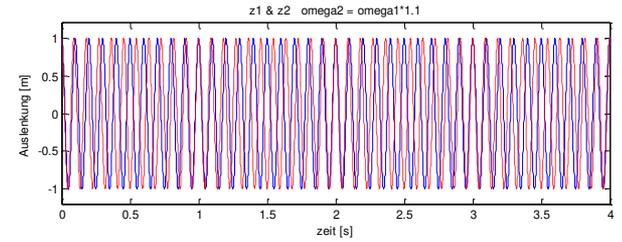
z_1 & z_2 : verschieden
 „schnell“



Schwebungsfreq. $\omega_s = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{0,05}{2} \cdot \omega_1$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot 1,1$$

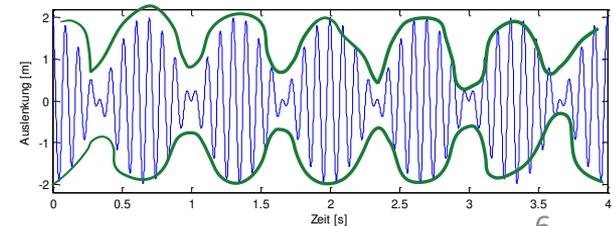
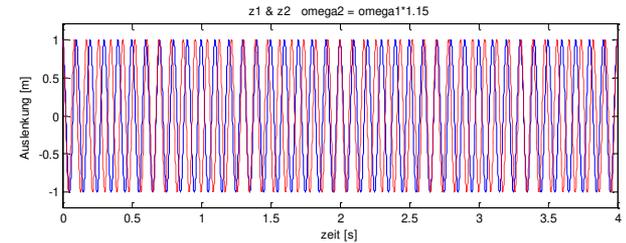
$$\hookrightarrow \omega_s = \frac{0,1}{2} \cdot \omega_1$$



$$\omega_2 = \omega_1 \cdot 1,15$$

$$\omega_s = \frac{0,15}{2} \cdot \omega_1$$

also schnellere
 Schwebung



Experiment: Stimmgabeln

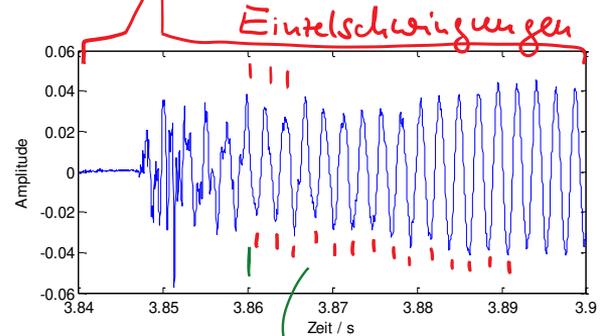
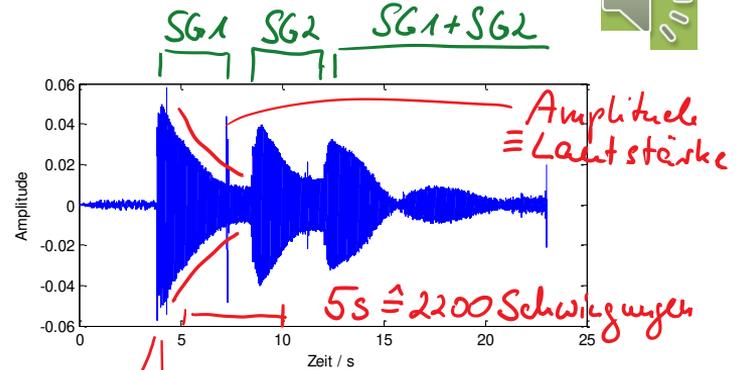
- zwei Stimmgabeln schwingen
↳ „Verstimmung“ → unterschiedliche Freq.



Ohr (oder Mikrophon) registriert die Schwingungen
Wahrnehmung der Schwebung als
langsameres Auf- und-Ab der Lautstärke



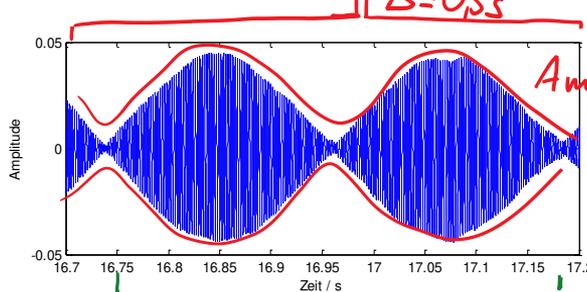
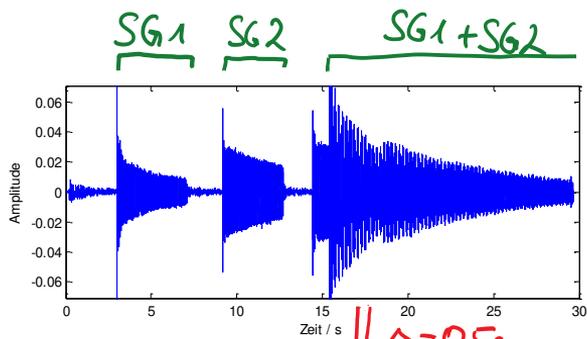
Zwei Stimmgabeln SG1, SG2
beide mit $\nu = 440 \text{ Hz}$



Ca. 13 Schwingungen pro 0,03s
 $\nu \approx \frac{13}{0,03 \text{ s}} = 433 \text{ Hz} \approx 440 \text{ Hz}$

Stimmungsgabeln SG1 & SG2 mit unterschiedlichen Frequenzen

↳ Schwebung

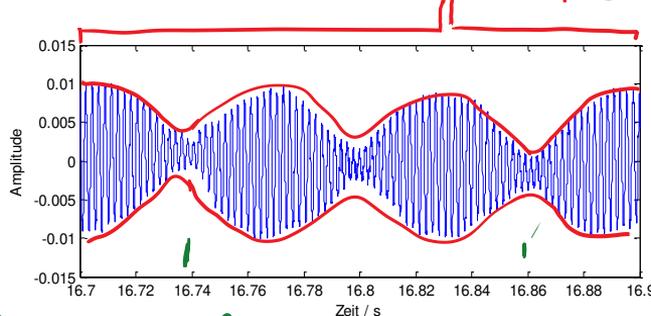
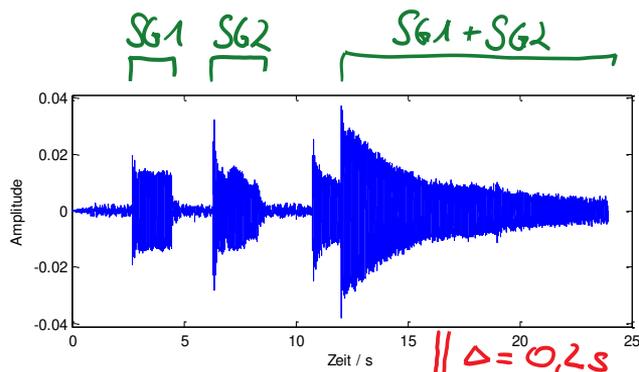


$\Delta = 0,5 \text{ s}$ Ausschnitt

Amplitude \equiv Lautstärke
Schwilt auf und ab

Schwebungsfreq. $\approx \frac{1}{0,45 \text{ s}} \approx 2 \text{ Hz}$

... mit stärkerer Verstimmung der beiden Frequenzen



Schwebungsfreq $\approx \frac{1}{0,12 \text{ s}} \approx 8 \text{ Hz}$

c) allgemein: Überlagerung von vielen Frequenzen

$$z_1 = a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$$

$$z_2 = a_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$$

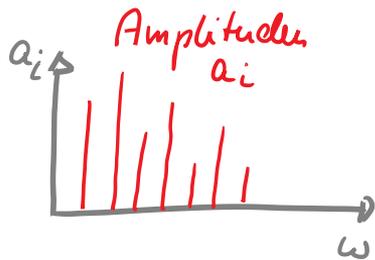
\vdots

$$z_n = a_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

$$\hookrightarrow z = \sum_i z_i = \sum a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t)$$

z ist periodisch

mit Periodendauer $T_p = 2\pi \frac{1}{\omega_G}$
größte Kreisfreq.



- das Frequenzspektrum $a(\omega)$ bestimmt die Form der Schwingung als Funktion der Zeit $z(t)$

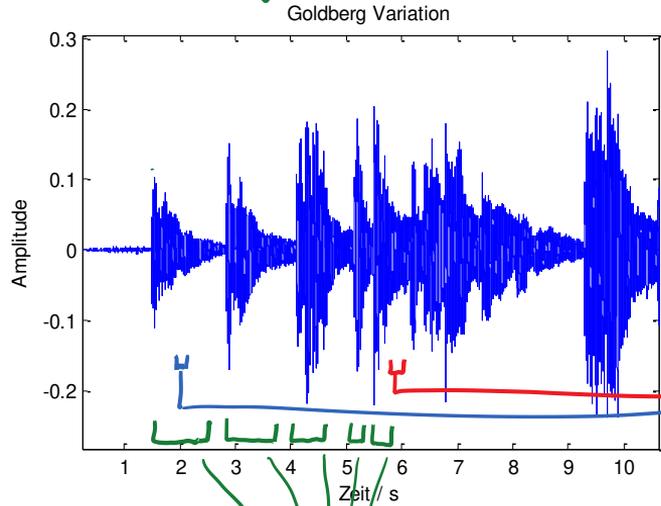
→ Fouriertransformation
(Mathematik & Signalverarbeitung)

Beispiel: Audiocdatei

- erste Takte aus J.S. Bach: Goldberg Variationen

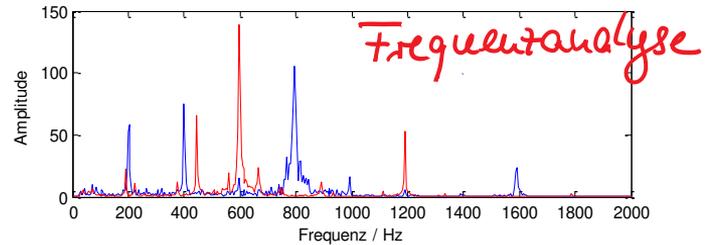
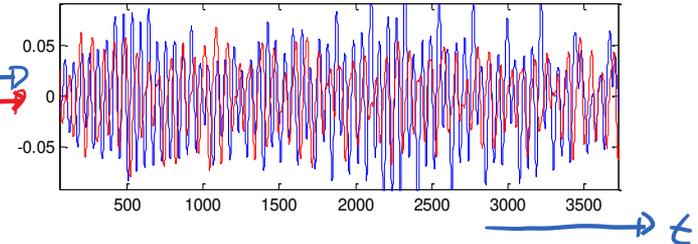


Zeitverlauf



einzelne Tastenschläge

Ausschnitt: einzelne Schwingungen sind sichtbar



↳ Tonhöhe & Klang \equiv Frequenzspektrum

Anhang: Addition von Schwingungen gleicher Frequenz - Rechnung

$$\text{sei: } z_1 = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$z_2 = b \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{mit: } \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$z = z_1 + z_2 = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + b \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= a \cos(\omega t) \cdot \cos\varphi_1 - a \sin(\omega t) \sin\varphi_1 \\ + b \cos(\omega t) \cdot \cos\varphi_2 - b \sin(\omega t) \cdot \sin\varphi_2$$

$$= [a \cdot \cos\varphi_1 + b \cos\varphi_2] \cdot \cos(\omega t) \\ + [-a \sin\varphi_1 - b \sin\varphi_2] \cdot \sin(\omega t)$$

$$z = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

$$\text{mit } A = a \cos\varphi_1 + b \cos\varphi_2$$

$$B = -a \sin\varphi_1 - b \sin\varphi_2$$

Umformung liefert

$$z = z_1 + z_2 = A \cdot \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ = C \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \tan\varphi = -\frac{B}{A}$$

Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl



8. Wellen und
Wellengleichung

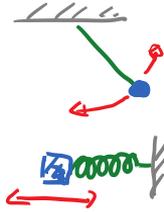
bisher: Schwingungen

- zeitabhängig
- periodisch
- harmonisch

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x$$

- Dämpfung, Überlagerung, Schwebung



jetzt: Wellen



Great Wave of Kanagawa, K Hokusai

- Wasserwellen
- Schallwellen
- Erdbeben
- Elektromagnetische Welle \equiv Licht, Radiosignal

- ↳ Wellen:
- zeitliche Abhängigkeit
 - räumliche Ausdehnung
 - Ausbreitung \equiv Geschwindigkeit
 - Überlagerung
- Beispiel: Wasserläufer

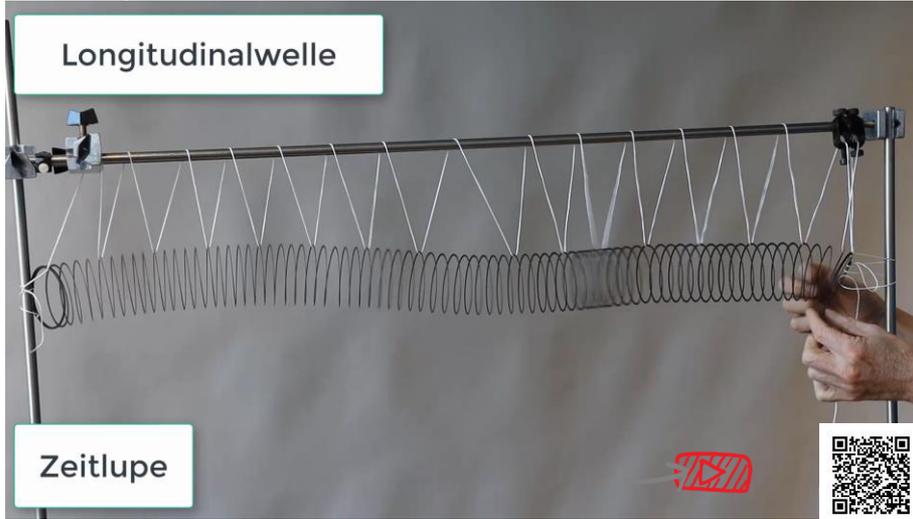


- Oberflächenwelle
- kreisförmig
- Ausbreitung
- Überlagerung \equiv Interferenz



Physikalische Wellen

Beispiele in Feder:



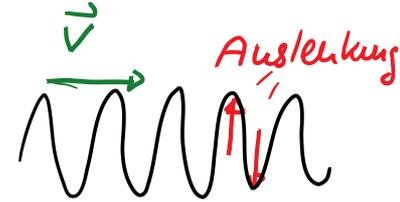
Unterscheidung:

- Transversalwelle:

Auslenkung \perp Ausbreitungsrichtung

Beispiele:

- Wasserwelle
- Seilwelle
- elektromagnetische Well



- Longitudinalwelle:

Auslenkung entlang Ausbreitungsrichtung

Beispiele

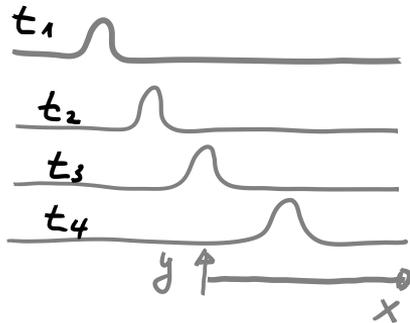
- Druckwellen
Schall
Erdbeben



Abstrahierte Welle in einer Dimension:
z.B. Welle auf Seil, Wasser



Zeitlupe



Auslenkung (y) läuft
formstabil in x -Richtung
mit Geschw. v

- Auslenkung $y(x, t_1)$ ist zu einer späteren Zeit t_2 bei der Position $x + v \cdot \Delta t$
↳ es muß gelten

$$y(x, t) = f(x - v \cdot t),$$

„Funktion von $(x - vt)$ “

damit die Welle formstabil läuft.

Jede Funktion dieser Bedingung ist eine Welle!

also: Welle $\equiv f(x - v \cdot t)$

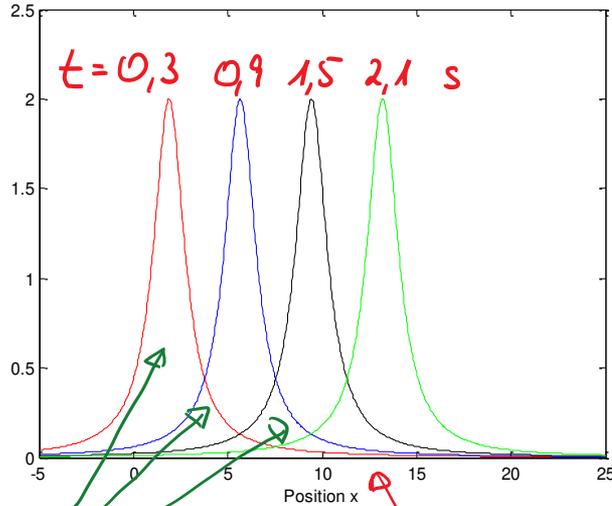
↑ Ausbreitungsgeschw.

muß nicht periodisch sein

formstabil

Beispiel: $y(x,t) = \frac{2}{1+(x-vt)^2}$ ist eine Welle
 $f(x-v \cdot t)$

Darstellung für $v = 2\pi \frac{m}{s}$ und
 für verschiedene Zeiten

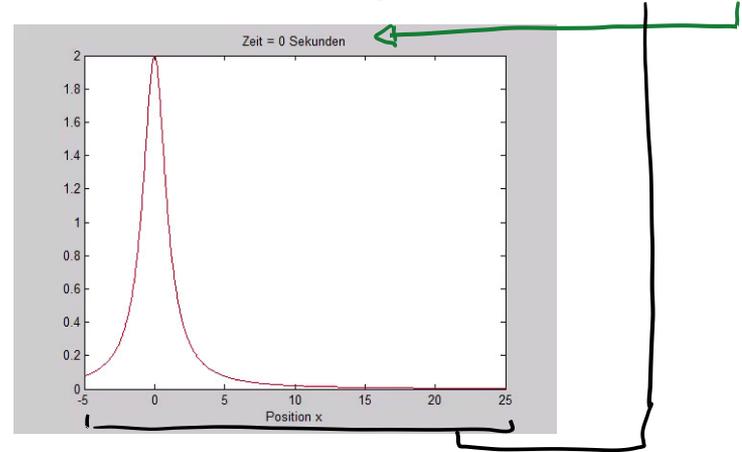


die Funktion y
 ist formstabil,
 Ort verschiebt sich mit t

y ist nicht
 periodisch

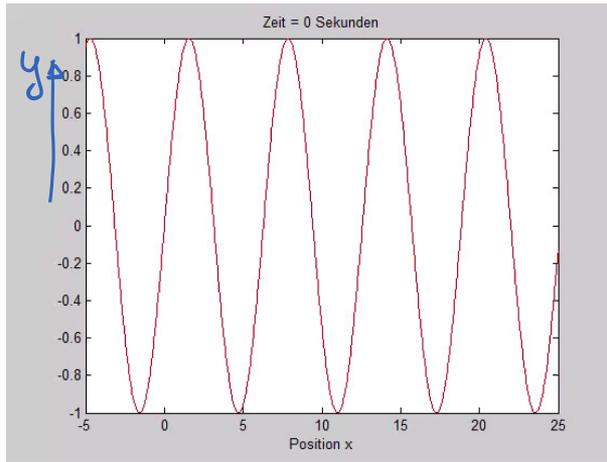
Wellen hängen ab von Ort & Zeit:
 ↳ Darstellung als „Film“

für $y(x,t) = \frac{2}{1+(x-v \cdot t)^2}$

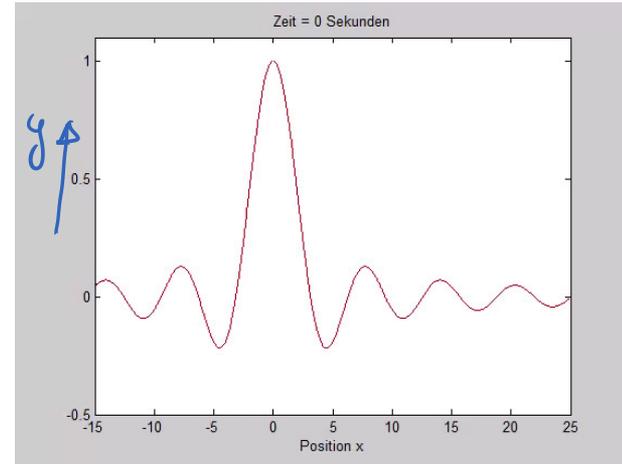


Beispiel: $y(x,t) = \sin(x - 2\pi \cdot t)$

Sinusförmige Welle \equiv harmonische Welle
periodisch,
formstabil

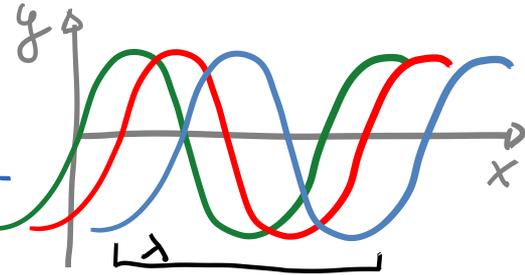


Beispiel: $y(x,t) = \sin(x - 2\pi \cdot t) / (x - 2\pi \cdot t)$
mehrere Schwingungen,
nicht periodisch,
formstabil



Harmonische Welle: cos-/sin-Funktion

$$y(x,t) = \sin(x - v \cdot t)$$



• gesucht: Beschreibung der x- und t-Abhängigkeit

• Welle wiederholt sich nach Strecke λ :

Wellenlänge λ (Periodizität)

$$\hookrightarrow y = y_0 \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = y_0 \cdot \sin(k \cdot x)$$

mit der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

für $x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$ sind die y-Werte gleich

• Welle wiederholt sich zeitlich nach T , wie bei Schwingung

$$\rightarrow y(x,t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \varphi \text{ Phase}$$

• für die Ausbreitung (Bewegung) des Maximums muß gelten:

$$k \cdot x - \omega t + \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad} (+ 2\pi \cdot n)$$

da $\sin\left(\frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) = 1$

• dies muß unabhängig von der Zeit gelten:

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}(kx - \omega t + \varphi) = 0$$

$$k \cdot \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

$\frac{dx}{dt} \equiv$ Ausbreitungsgeschwindigkeit oder Phasengeschw. der Welle

$$v_{ph} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\text{Welle}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ \& } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

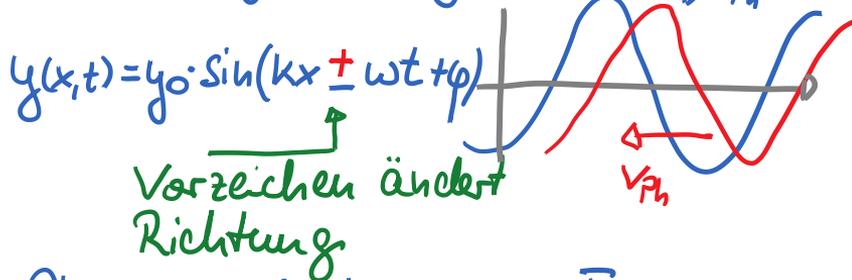
→ Umschreibung:

$$y(x,t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$$
$$= y_0 \cdot \sin\left(k \cdot \left[x - \frac{\omega}{k} \cdot t\right] + \varphi\right)$$
$$= y_0 \cdot \sin\left(k \cdot \left[x - v_{Ph} \cdot t\right] + \varphi\right)$$

wie gefordert Abh.

$$y = f(x - v_{Ph} \cdot t)$$

• Ausbreitungsrichtung gekehrt:



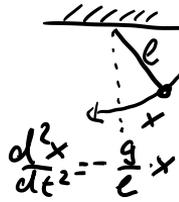
• Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$ rad:

$$y(x,t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi) = y_0 \cdot \cos\left(kx - \omega t + \varphi\right)$$
$$= \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$$

Erinnerung: Schwingungen

Bewegungsgleichung: $\uparrow -D \downarrow$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D x$$



Lösung für Zeitabh.

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{bzw. } \omega = \sqrt{\frac{g}{c}}$$

gesucht: Bewegungsgleichung für Wellen, die die Änderung in Raum und Zeit enthält

Wellengleichung / Bewegungsgl. für Wellen
gesucht: Differentialgleichung, die die
Zeit- und Ortsabhängigkeit enthält

a) für eine harmonische Welle
in einer Dimension

$$y(x,t) = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Zeitliche Ableitung:

$$\frac{dy}{dt} = -\omega \cdot y_0 \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 \cdot y_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi) = -\omega^2 y \quad \textcircled{\text{I}}$$

Räumliche Ableitung:

$$\frac{dy}{dx} = +k \cdot y_0 \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 \cdot y_0 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi) = -k^2 y \quad \textcircled{\text{II}}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{I}} &\rightarrow \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -y \\ \textcircled{\text{II}} &\rightarrow \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -y \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \textcircled{\text{I}} \\ \textcircled{\text{II}} \end{aligned}} \right\}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\text{oder} \quad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\omega^2}{k^2} \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\text{mit } v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{v_{\text{Ph}}^2} \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{d^2y}{dx^2}} \right\} \text{Wellen-} \\ \text{gleichung}$$

- formal-mathematisch: Differentialgleichung 2. Ordnung in x & t
- also Ableitungen nach Ort & Zeit in einer Gleichung!

b) allgemein für jede Funktion mit
 $f(x,t) = f(x \pm v_{ph} t)$:

mit Substitution $z = x \pm v_{ph} t$

$$\hookrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 \rightarrow dx = dz$$

$$\text{also: } \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dz^2} \quad \textcircled{I}$$

$$\hookrightarrow \frac{dz}{dt} = \pm v_{ph} \rightarrow dt = \pm \frac{1}{v_{ph}} dz$$

$$\text{also: } \frac{d^2 f}{dt^2} = \pm v_{ph}^2 \frac{d^2 f}{dz^2} \quad \textcircled{II}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{\pm v_{ph}^2} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{d^2 f}{dx^2}} \right\} \text{Wellen-} \\ \text{gleichung}$$

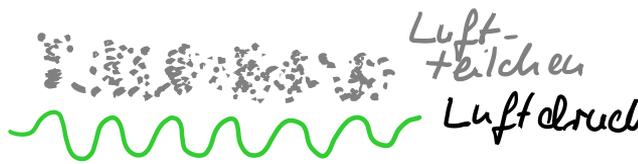
Folgerung: jede Funktion, die eine formstabile Bewegung enthält ($f(x \pm v_{ph} t)$), erfüllt die Wellengleichung

also:

$$f(x,t) = f(x \pm v_{ph} t) \quad \left. \vphantom{f(x,t)} \right\} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v_{ph}^2} \cdot \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

- wenn eine physikalische Größe f der Wellengl. genügt, so ist f eine Welle und bewegt sich formstabil

Beispiel:

- 
Seil
- 
Luftteilchen
Luftdruck
- Licht \leftrightarrow elektrisches & magnetische Feld

Ist die Wellengleichung erfüllt?

Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

9. Schallwellen und
Wellengleichung

Schall in Luft / Gas:

- Druckschwankung $p(t, \vec{r})$
- Ausbreitungsgeschw. $v_{ph} \approx 320 \frac{m}{s}$
einfach zu messen: Echo
- Longitudinalwelle

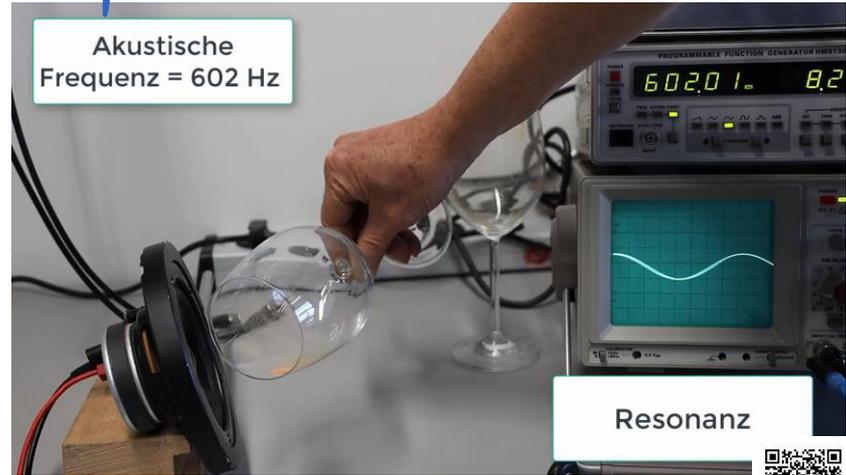
↳ Wellengleichung muss erfüllt sein

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{1}{v_{ph}^2} \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} = 0$$

hier nur in x für Druck
Ausbreitungsg.

Warum?

Beispiel:



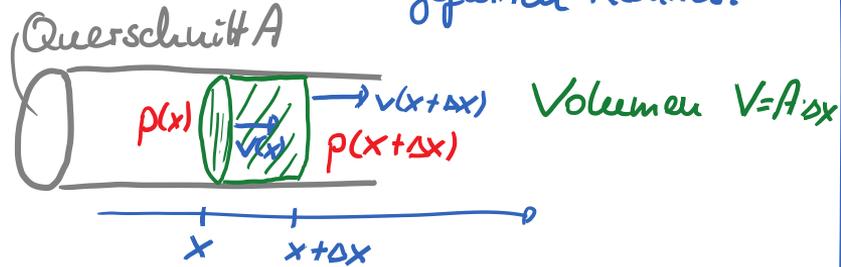
Akustische
Frequenz = 602 Hz

Resonanz

$$\begin{aligned} \text{Schallwelle: } \nu &= 602 \text{ Hz} \\ v_{ph} &= 320 \text{ m/s} \\ v_{ph} &= \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{↳ } \lambda &= \frac{v_{ph}}{\nu} \\ &= \frac{320 \text{ m/s}}{602 \text{ 1/s}} \approx 0,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Betrachtung eines mit Gas gefüllten Rohres:



- Gas mit Druck p
- Druck $p \rightarrow$ Kraft $\vec{F} \rightarrow$ Geschwindigkeit
- Volumenelement $V = A \cdot \Delta x$ mit Masse $m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta x$
- Druckänderung $p(x) \rightarrow p(x+\Delta x)$

\hookrightarrow auf ΔV wirkt Kraft

$$F = p(x) \cdot A - p(x+\Delta x) \cdot A$$

• für kleine Änderungen gilt $p(x+\Delta x) = p(x) + \frac{dp}{dx} \cdot \Delta x$ lineare Näherung

$$\hookrightarrow \vec{F} = -A \cdot \Delta x \cdot \frac{dp}{dx}$$

• Gasmasse m wird beschleunigt $a = \frac{\vec{F}}{m}$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{A \cdot \Delta x}{\rho A \cdot \Delta x} \cdot \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad \textcircled{I}$$

Beschleunigung \sim Druckänderung

\hookrightarrow Geschwindigkeit abh. von p , also links & rechts unterschiedlich

\hookrightarrow Volumen V ändert sich, da die Geschwindigkeit der Seitenflächen unterschiedlich

Verschiebung in Zeit dt :

links: $v(x) dt$

rechts: $v(x+\Delta x) dt \approx (v(x) + \frac{dv}{dx} \cdot \Delta x) \cdot dt$

Geschwindigkeit

lineare Näherung

• Volumenänderung in Zeit dt :

$$dV = \underbrace{v(x+\Delta x) dt}_{\text{rechts}} - \underbrace{v(x) \cdot dt}_{\text{links}} \cdot A$$

$$= \frac{dv}{dx} \Delta x \cdot dt \cdot A$$

Änderung der Geschw.

• relative Volumenänderung

$$\frac{dV}{V} = \frac{\frac{dv}{dx} \cdot \Delta x \cdot dt \cdot A}{A \cdot \Delta x} = \frac{dv}{dx} \cdot dt$$

• in einem Gas:

Volumenänderung \rightarrow Druckänderung

$$dp \sim - \frac{dV}{V}$$

oder

$$dp = - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{dV}{V}$$

mit Kompressibilität κ
"Kappa"

• κ : abhängig vom Gas

$$\hookrightarrow dp = - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{dV}{V} = - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dt$$

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{dv}{dx} \quad \textcircled{\text{II}}$$

• damit wird:

$$\frac{d}{dx} \text{ von } \textcircled{\text{I}}: \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(- \frac{1}{g} \cdot \frac{dp}{dx} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} v \right) = - \frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} \quad \textcircled{\text{III}}$$

$$\frac{d}{dt} \text{ von } \textcircled{\text{II}}: \frac{d}{dt} \left(\frac{dp}{dt} \right) = \frac{d^2 p}{dt^2} = - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dx} \right) \quad \textcircled{\text{IV}}$$

Vertauschung von $\frac{d}{dx}$ & $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dt} \right)$$

$$\text{mit } \textcircled{\text{III}} = - \frac{1}{\kappa} \cdot \left(- \frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} \right)$$

\uparrow 2. Ableitung \uparrow

$$\rightarrow \frac{d^2 p}{dx^2} - \kappa \cdot \rho \cdot \frac{d^2 p}{dt^2} = 0$$

↑ 2. Ableitung nach Ort & Zeit

- formal: Wellengleichung mit der Phasengeschw./Ausbreitungsgeschw. $v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\kappa \cdot \rho}}$

↳ Schall ist eine Dreckwelle, die sich mit v_{ph} ausbreitet

$$\rightarrow p(x, t) = p(x - v_{ph} \cdot t)$$

↳ v_{ph} hängt von Dichte ab und von Kompressibilität

- dies gilt für Gase & Flüssigkeiten

Beispiel: Wasser
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\kappa = 5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$
 ↳ sehr klein

$$\begin{aligned} \rightarrow v_{ph, w} &= \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \kappa}} = \sqrt{\frac{1}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}} \\ &\approx 1,4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- meist wird umgekehrt κ aus der Messung von $v_{ph, w}$ bestimmt

Beispiel Luft:

- für Gase gilt in guter Näherung die allgemeine Gasgleichung: $p \cdot V = T \cdot \text{const.}$

wenn die Temperatur T konstant:

$$p \cdot V = \text{const.}$$

bzw.
$$V = \frac{\text{const.}}{p}$$

- Kompressibilität $K = \frac{\text{relative Volumenänd.}}{\text{Druckänderung}}$

$$K = - \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$$

$$= - \frac{1}{V} \frac{d}{dp} \left(\frac{\text{const.}}{p} \right)$$

$$= + \frac{1}{V} \cdot \frac{\text{const.}}{p^2} = \frac{\text{const.}}{p \cdot V \cdot p}$$

$$= \frac{1}{p}$$

- damit wird die Schallgeschw. in Luft

$$v_{\text{Ph,L}} = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \kappa}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

- für Normalbedingungen: $\rho_L = 1,27 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$p_L = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$v_{\text{Ph,L}} = \sqrt{\frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1,27 \text{ kg/m}^3}} \\ = 280 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- näherungsweise in Übereinstimmung mit Schallgeschw. in Luft von ca. 320-340 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Abweichung erklärbar: wenn p zunimmt, so ändert sich die Temperatur, die Annahme $p \cdot V = \text{const.}$ nicht ganz richtig

Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

10. Energieübertragung
durch Wellen

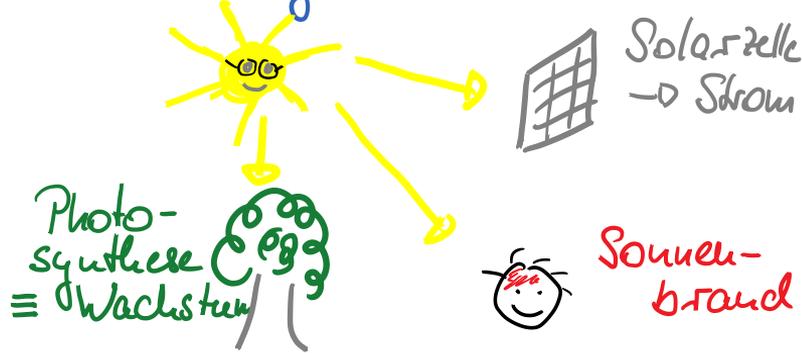
Alltag:

Wasserwelle:



Zerstörung
= Energie

Licht = elektromagnet. Welle



Schallwelle:



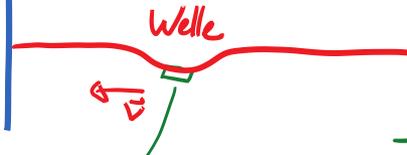
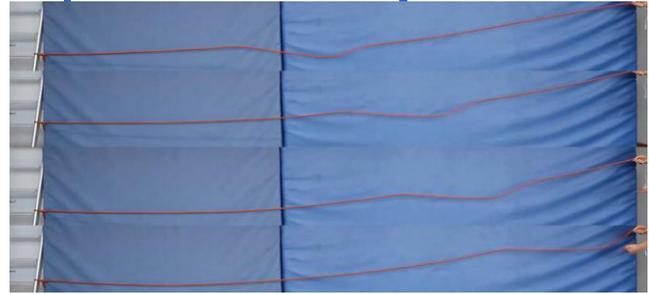
Ohr
Trommelfell
bewegt sich

Welle → Transport oder Übertragung
von Energie

gesucht: Energietransport in Abhängigkeit
von

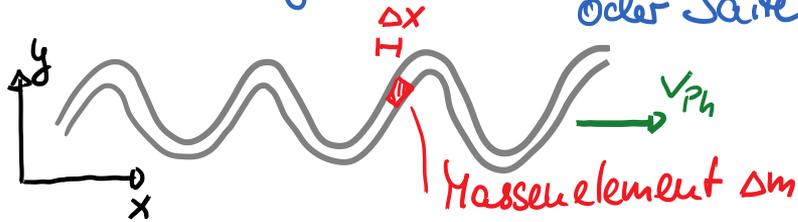
- Phasengeschwindigkeit
- Frequenz & Wellenlänge
- Amplitude

Beispiel: Welle auf Seil



Masse ist ausgelenkt
und bewegt sich mit v
→ Energie wird übertragen

Betrachtung eines schwingenden Seiles
oder Saite:



- Masse Δm bewegt sich auf und ab in y -Richtung; Beschreibung ähnlich zum Federpendel:

$$y = y_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

mit Schwingungsenergie $E = \frac{1}{2} D y_0^2$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 m y_0^2$$

- im Seil: $\Delta m \sim \text{Länge } \Delta x$

$$\hookrightarrow \Delta m = \underbrace{\sigma}_{\rho} \cdot \Delta x = \frac{\text{Gesamtmasse}}{\text{Gesamtlänge}}$$

\hookrightarrow Energie im Element Δm :

$$\Delta E = \frac{1}{2} \omega^2 \sigma \cdot \Delta x \cdot y_0^2$$

- Welle bewegt sich mit Phasengeschw. v_{ph} , also bewegt sich auch ΔE

$$v_{ph} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\hookrightarrow \Delta E = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sigma \cdot y_0^2 \cdot v_{ph} \cdot \Delta t$$

daher wird in Zeit Δt die

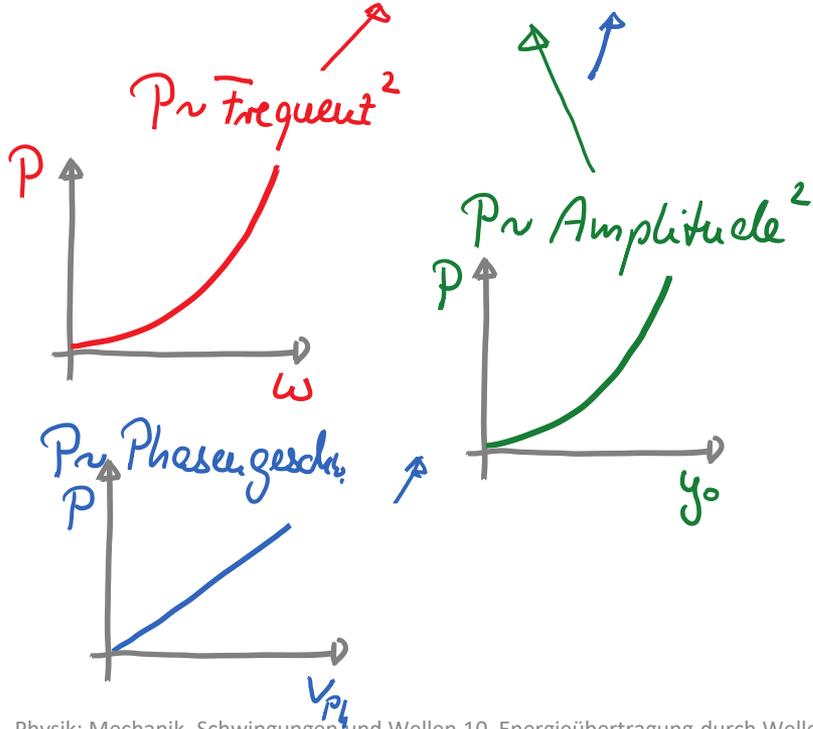
$$\text{Leistung } P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sigma \cdot y_0^2 \cdot v_{ph}$$

übertragen

- Energie bewegt sich ohne Transport der Masse

- dieses Ergebnis gilt für alle Wellen:
Leistung einer Welle

$$P = \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 \cdot v_{ph}$$



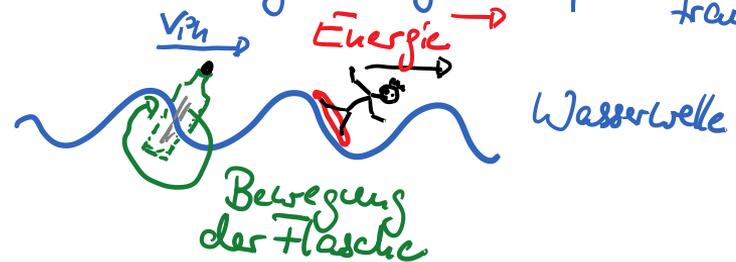
→ Verdoppelung der Höhe einer Wasserwelle \equiv vierfache Energie/Leistung

→ hohe Frequenz \equiv hohe Leistung

→ Energie fließt mit v_{ph}

- dies gilt für Schall
Wasserwellen
Licht etc.

• Unterscheidung: Energietransport / Materietransport



Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

11. Wellen im Raum: Kugelwellen

Alltag

Schallquelle



leiser

Intensität nimmt
mit r ab
dunkler



Licht

- gesucht: Beschreibung einer Welle in Abhängigkeit vom Abstand r

Unterscheidung für

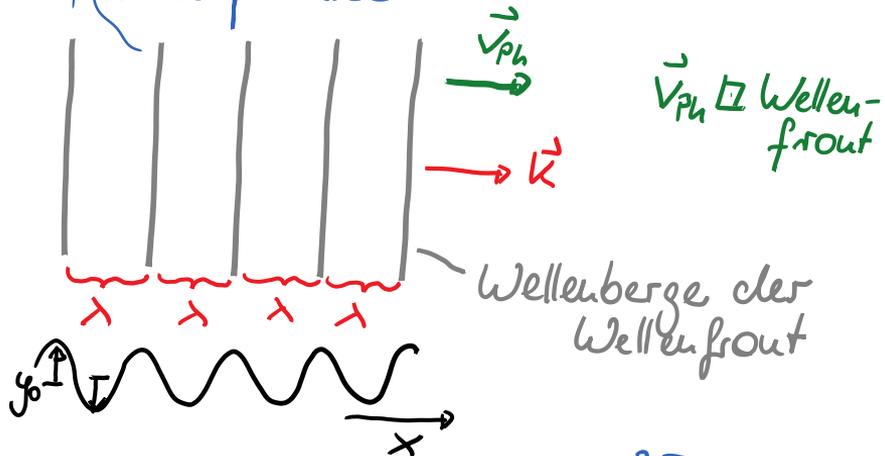
a) ebene Wellen

b) Punktquelle : Oberflächenwelle

c) " : Kugelwelle

a) Ebene Welle:

- Wellenfronten \equiv Position gleicher Phase
(sind parallel)



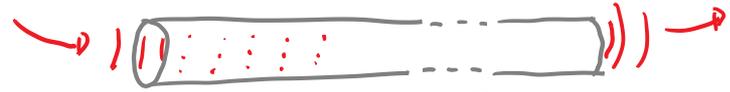
- Wellenvektor \vec{k} mit $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$
und Richtung entlang \vec{v}_{ph}

- Energieübertragung

$$\Delta E \sim \omega^2 \cdot y_0^2 \cdot v_{ph} \cdot \Delta t$$

- Energie der Welle nimmt nicht ab mit der Entfernung (ohne Reibung)

Beispiel: Schallwelle in Rohr

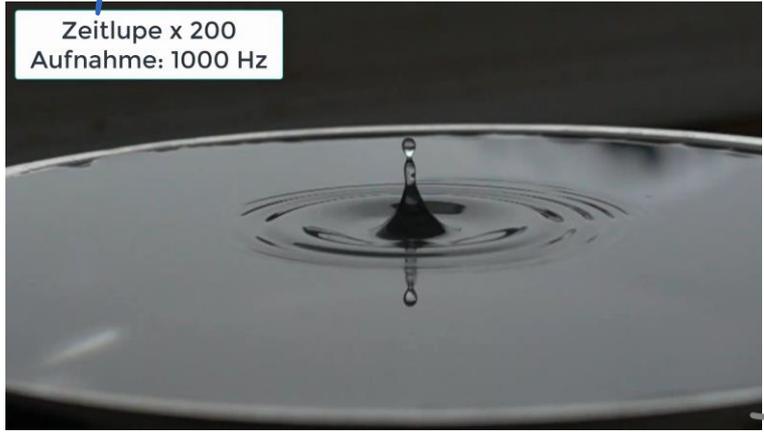


Sprache wird über große Entfernungen transportiert

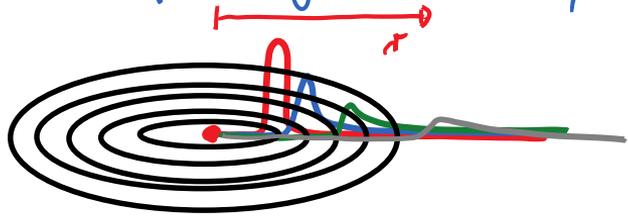
Beispiel: Flutwelle in Flussmündung



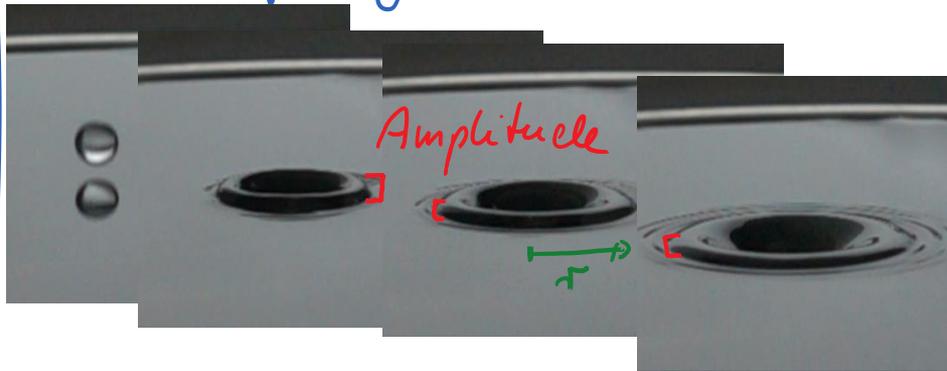
b) Oberflächenwelle mit Punktquelle:
 Beispiel: Wasser



Beobachtung: Wellenamplitude nimmt mit Entfernung vom Quellpunkt ab



• Abnahme der Amplitude, da sich die Welle auf Ring (Kreis) verteilt

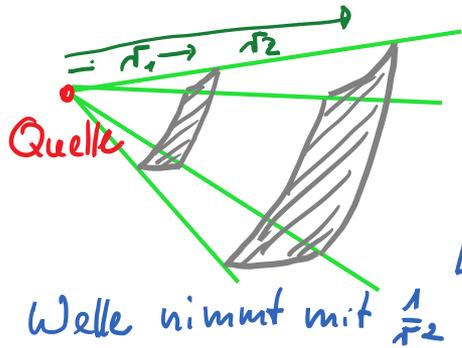
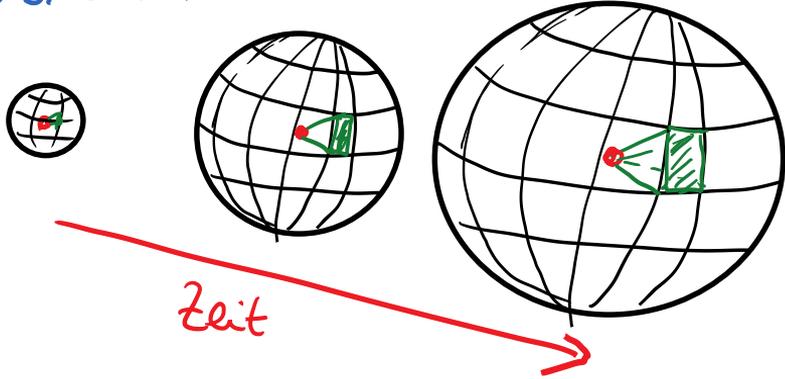


- Energieerhaltung! Energie verteilt sich auf Kreisumfang $= 2\pi r$
 \hookrightarrow Energiedichte nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab
- da allgemein für Welle Energie \sim Amplitude²

\hookrightarrow für Oberflächenwelle:
 Amplitude $\sim \frac{1}{\sqrt{r}}$

c) Kugelwelle mit Punktquelle:

• z.B. Schall



• Energie der Welle verteilt sich auf Oberfläche $4\pi r^2$

↳ Energiedichte der

Welle nimmt mit $\frac{1}{r^2}$ ab

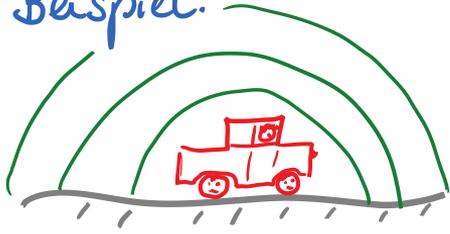
- Energieerhaltung &
- Energie \sim Amplitude²

↳ Amplitude der Welle nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab!

↳ Kugelwelle lässt sich beschreiben als

$$y = y_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin(\omega t - k \cdot r + \varphi)$$

Beispiel:



Schall eines Autos verteilt sich auf Halbkugel ($A=2\pi r^2$)

↳ Energie / Schallintensität nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab

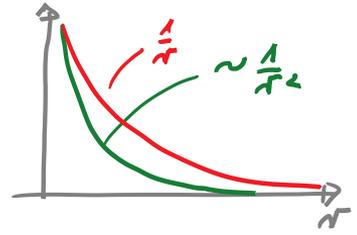
Inversionswetterlage: kalte Luft am Boden
 ↳ Schall wird von hohen Luftschichten reflektiert



näherungsweise verteilt sich der Schall auf Ring (Zylinder) ähnlich zur Oberflächenwelle

↳ Schallintensität $\sim \frac{1}{\sqrt{r}}$

↳ Auto (Autobahn) bei Inversionswetter weit zu hören



Anmerkung:

• Lautstärkeempfinden des Menschen ist stark nicht-linear abhängig vom Schalldruck (-intensität)



Anmerkung:

Gravitationskraft $\sim \frac{1}{r^2}$
 Feldlinien verteilen sich auf Oberfläche

Physik: Mechanik

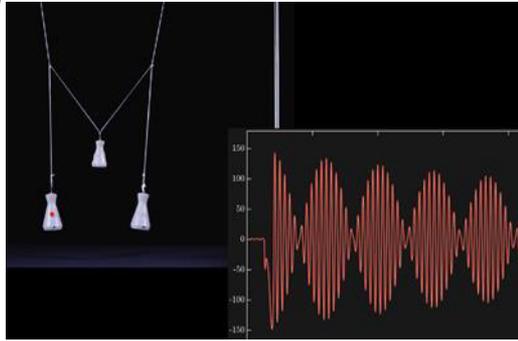
Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

12. Überlagerung von Wellen

Überlagerung von Schwingungen

- Superposition/ Addition
- Schwebung

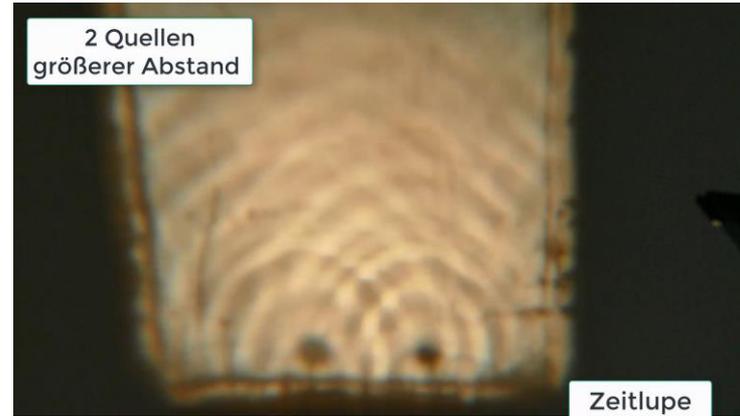


jetzt: Überlagerung von Wellen

Alltag: Wasserwellen im Hafenbecken (Bade-
wanne)

- Muster aus Wellenmaxima bildet sich
- Reflexionen an den Begrenzungen führt zu Orten hoher Amplitude
- Wellen von unterschiedlichen Quellen mit komplexer Überlagerung \equiv Interferenz

Beispiel: Wasserwanne

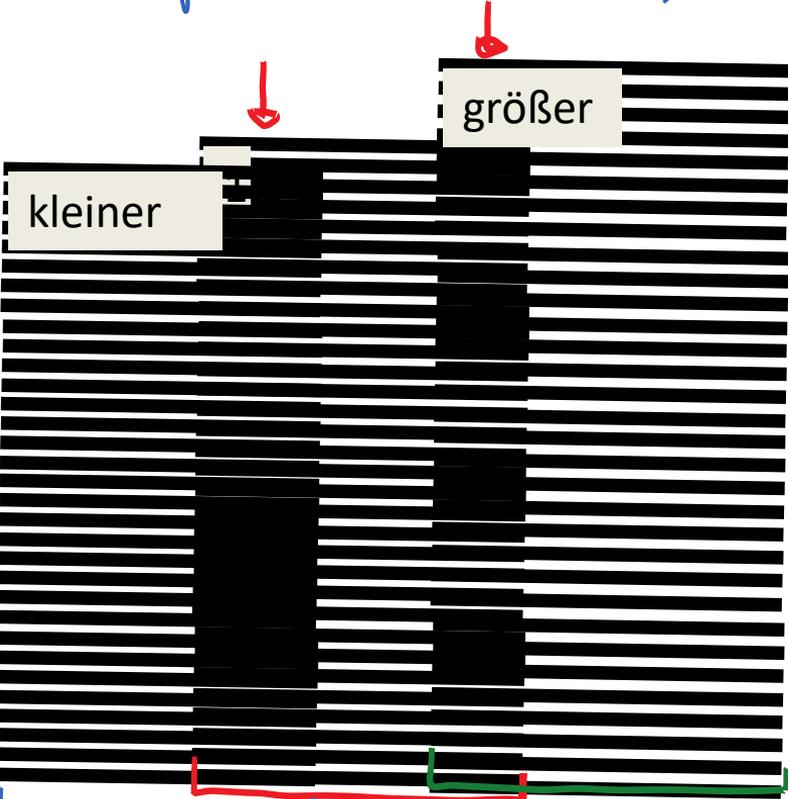


Beispiel: Wasserläufer → Interferenz



Modell für die Überlagerung von Wellen:

- Streifenmuster unterschiedl. Größe



Folien:
a) x 1.0 b) x 0.95



Mathematische Überlagerung von zwei Wellen

Betrachtung in einer Dimension:

a) gleiche Frequenz, gleiche Wellenlänge

$$\omega_1 = \omega_2 ; \lambda_1 = \lambda_2 \text{ bzw } k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = k_2$$

Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ gleich

$$y_1(x,t) = y_{01} \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_1)$$

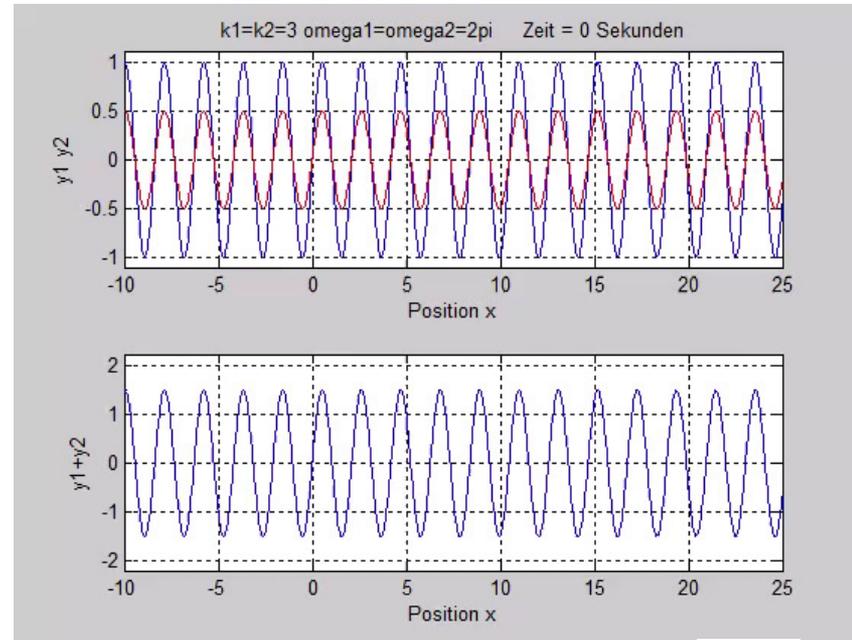
$$y_2(x,t) = y_{02} \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_2)$$

wenn Phase gleich:

$$\begin{aligned} \text{Überlagerung: } y &= y_1 + y_2 \\ &= \underbrace{(y_{01} + y_{02})}_{\text{Amplituden addieren sich}} \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi) \end{aligned}$$

Amplituden addieren sich

für $y_{01} = 1; y_{02} = 0,5$
 $k_1 = k_2 = 3 \frac{1}{m} \quad \omega_1 = \omega_2 = 2\pi \frac{1}{s}$



b) ungleiche Frequenz, ungleiche Wellenlänge

sei Amplitude gleich

$$y_1 = y_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$y_2 = y_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

Phasen φ_1 & φ_2 führen nur zu Verschiebung

$$y = y_1 + y_2 = y_0 \cdot [\sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x)]$$

mit $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ wird

$$y = 2y_0 \cdot \sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right)$$

Schnelle
Modulation

Langsame
Modulation

mit $\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$ (Mittelwerte)

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \text{ und } \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

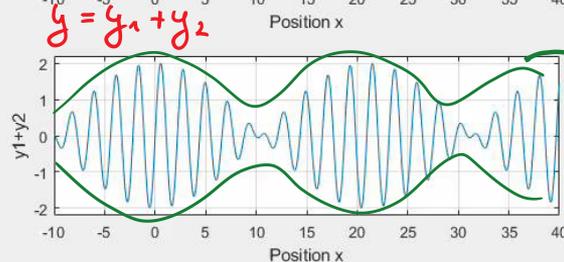
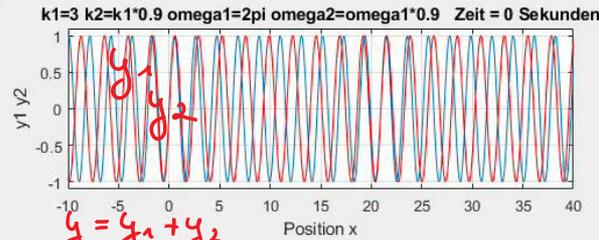
$$\rightarrow y = 2y_0 \cdot \underbrace{\sin(\omega_m t - k_m x)}_{\text{Welle mit}} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)}_{\text{Welle mit}}$$

Phasengeschw. $v_{ph} = \frac{\omega_m}{k_m}$

Gruppengeschw
 $v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

$$k_1 = 3 \frac{1}{m} \quad \omega_1 = 2\pi \cdot \frac{1}{5}$$

$$k_2 = 3 \cdot 0,9 \frac{1}{m} \quad \omega_2 = 2\pi \cdot 0,9 \frac{1}{5}$$

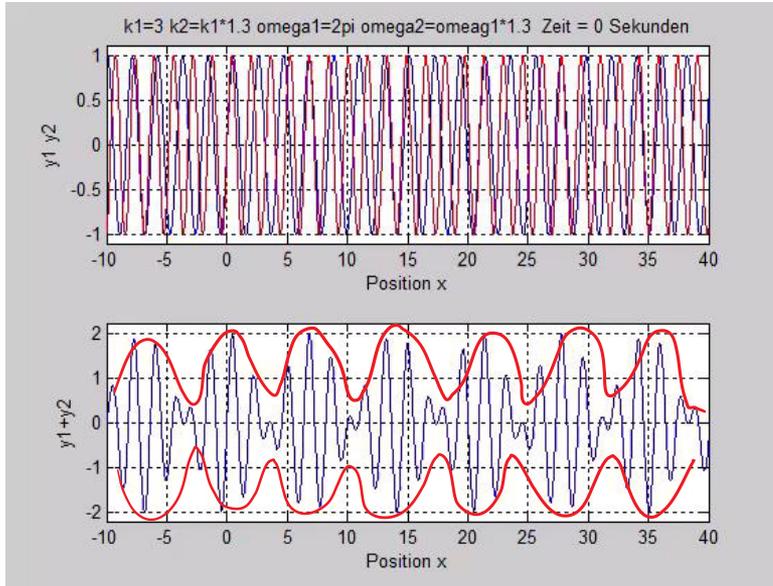


Wellenpaket
bewegt sich
mit v_G



$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{0,1 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5}}{0,1 \cdot 3 \frac{1}{m}} = \frac{2\pi}{3} \frac{m}{s}$$

hier für: $k_1 = 3 \frac{1}{m}$ $\omega_1 = 2\pi \frac{1}{s}$
 $k_2 = 3,13 \frac{1}{m}$ $\omega_2 = 2\pi \cdot 1,3 \frac{1}{s}$

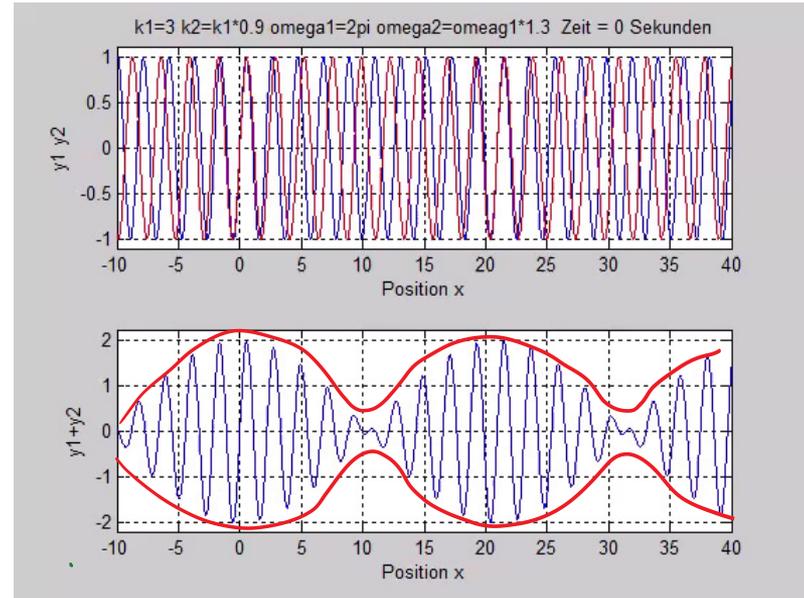


$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{-0,3 \cdot 2\pi \frac{1}{s}}{-0,3 \cdot 3 \frac{1}{m}} = + \frac{2\pi}{3} \frac{m}{s}$$

+
Wellenpaket läuft nach rechts



hier: $k_1 = 3 \frac{1}{m}$ $\omega_1 = 2\pi \frac{1}{s}$
 $k_2 = 3,09 \frac{1}{m}$ $\omega_2 = 2\pi \cdot 1,3 \frac{1}{s}$



$$v_g = \frac{0,1 \cdot 3 \frac{1}{m}}{-0,3 \cdot 2\pi \frac{1}{s}} = - \frac{3}{2\pi} \frac{m}{s}$$

- Wellenpaket läuft nach links



c) gleiche Frequenz, gleiche Wellenlänge,
aber unterschiedliche Richtung

$$k_1 = -k_2 = -k$$

$$y_1 = y_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$y_2 = y_0 \sin(\omega t + kx)$$

$$v_{ph1} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{ph2} = -\frac{\omega}{k}$$

$$\text{mit } \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$= 2y_0 \sin\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right)$$

$$\text{mit } \cos(-\alpha) = \cos(+\alpha)$$

$$y = 2y_0 \cdot \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{zeitliche Modulation}} \cdot \underbrace{\cos(kx)}_{\text{räumliche Modulation}}$$

zeitliche Modulation
≡ Schwingung

räumliche Modulation

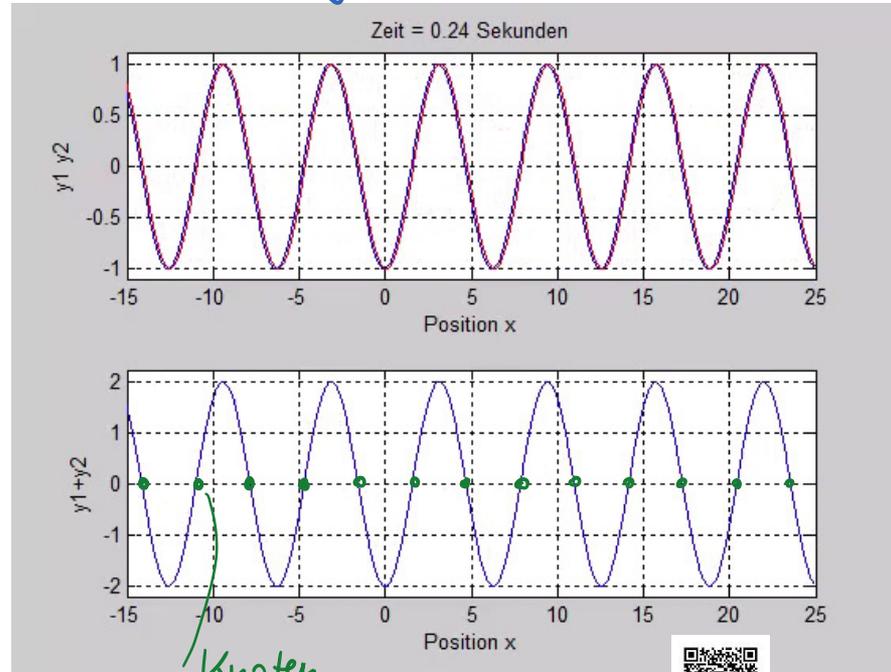
→ Stehende Welle

• an jedem Punkt:

Schwingung $\sin(\omega t)$

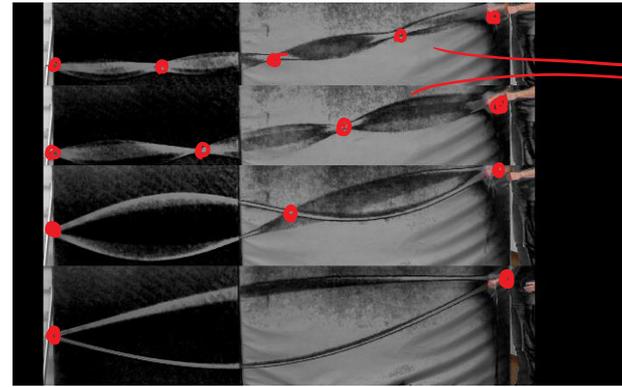
Amplitude variiert $\cos(kx)$

↳ Ort mit $y=0 \rightarrow$ Knoten



Beispiel für stehende Welle:

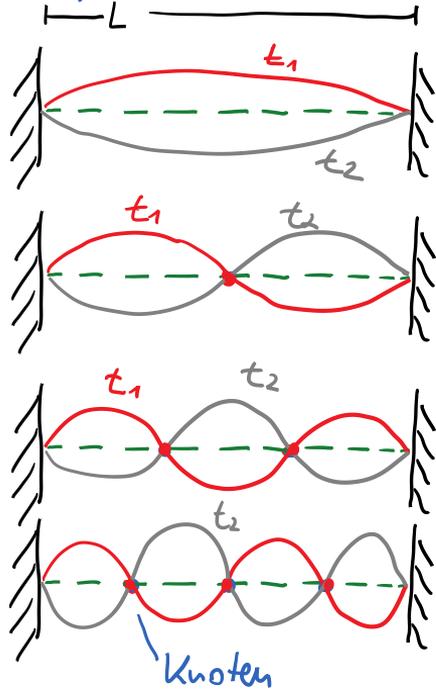
- Welle auf Seil / Schlauch mit Anregung an einer Seite und Reflexion an der anderen Seite



Knoten

- Schwingungen bilden sich aus mit 1, 2, 3, ... Knoten

Beispiel: Schwingende Saite einer Geige oder Gitarre



- Saite an den Rändern fest
 - Grundschwingungen sind möglich
 - Knoten = Amplitude ist immer Null
- Stehende Welle mit $\lambda = 2L$

$$\lambda = L$$

$$\lambda = \frac{2}{3}L$$

$$\lambda = \frac{2}{4}L$$

$$\lambda = \frac{2}{n} \cdot L$$

↳ jede Saite kann abhängig von Saitenlänge und Spannung nur bestimmte Wellenlängen und Frequenzen ausbilden.

↳ Grundton mit $\lambda_G = 2L$ mit zugehöriger Frequenz ν_G

sowie harmonische mit

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{1}{n} \lambda \quad \text{und}$$

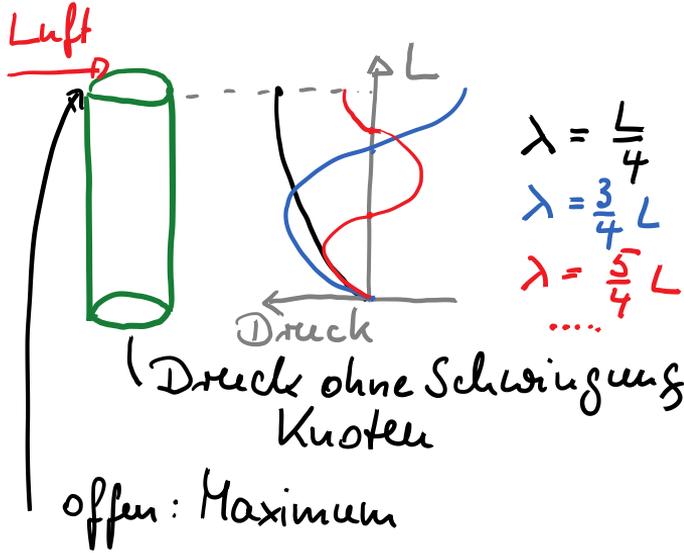
$$\nu_n = n \cdot \nu_G \quad (n=2,3,4,\dots)$$

Flageolettton auf der Gitarre / Violine:



Schwingungen (Frequenzen) werden unterdrückt
→ anderer Klang

Blasinstrumente: Stehende Wellen



- Länge L bestimmt die Wellenlänge λ und damit $v = \frac{v_{\text{Luft}}}{\lambda}$

Anwendung Überlagerung:
• Kopfhörer mit „noise cancellation“

Anmerkung: Überlagerung von Wellen

Optik \rightarrow Interferenz
z.B. Reflex von CD, DVD

Ultraschall-Bildgebung: Speckle \equiv Bildrauschen

Physik: Mechanik

Schwingungen und Wellen

Prof. Dr. Matthias Kohl

13. Der Doppler-Effekt

Alltag:

- Sirene eines Krankenwagens



Ton ändert sich beim Vorbeifahren

- Motorgeräusch eines Rennwagens
- Überschall-Knall eines Düsenflugzeugs

↳ Frequenz-/Wellenlängenänderung, wenn Signalquelle oder Detektor bewegt wird \equiv Doppler-Effekt

Beispiel: Quelle in Bewegung



Ohr als Detektor



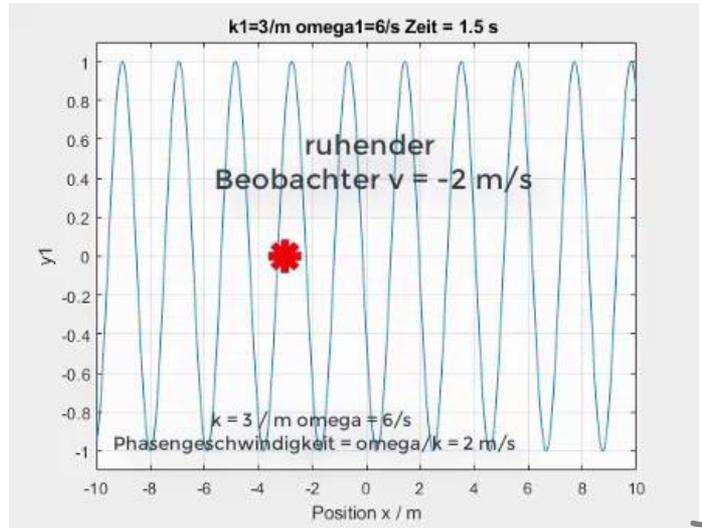
Messung der Frequenz



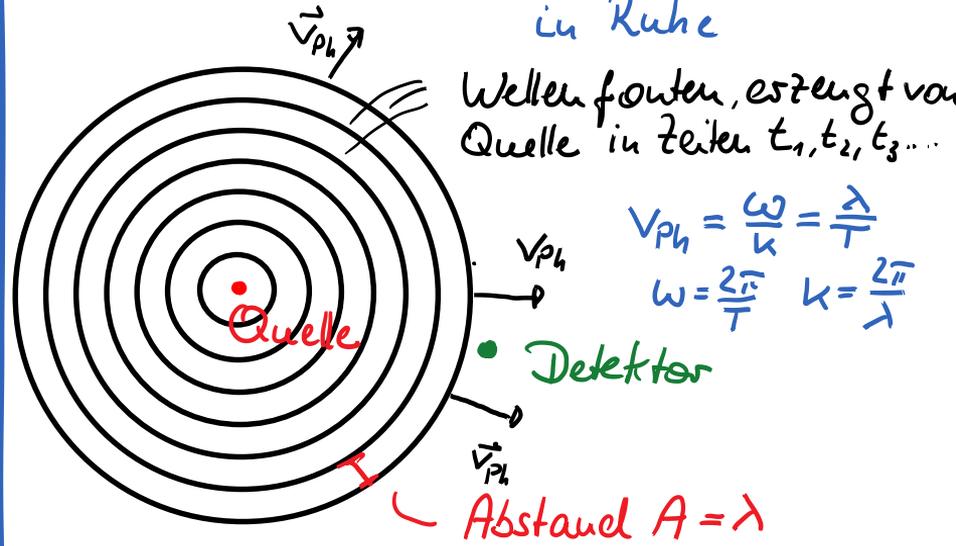
Ruhe: 440 Hz
Bewegung ... weg : ~ 436 Hz
hin : ~ 442 Hz

Betrachtung:

- Wellenausbreitung mit v_{ph} im Medium
- Beobachter in Ruhe oder in Bewegung
 → Änderung der beobachteten Wellenzahl

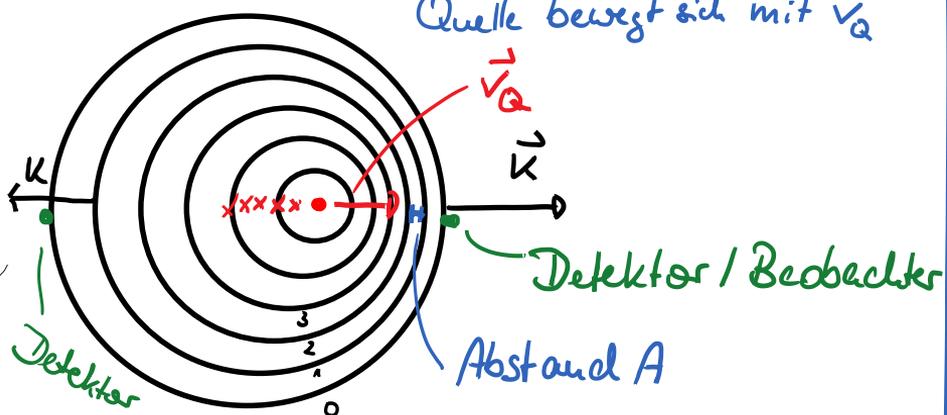


a) Quelle und Detektor / Beobachter in Ruhe



Detektor registriert die Welle mit Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{v_{ph}}{\lambda}$
 $\nu = \frac{\text{Anzahl der Wellenfronten}}{\text{Zeit}}$

b) Bewegte Quelle im Medium,
 Detektor in Ruhe
 Quelle bewegt sich mit v_Q



- in Richtung von v_Q : Wellenfronten liegen dicht
 - entgegen v_Q : Wellenfronten liegen auseinander
- für Zeit T : Quelle bewegt sich um $v_Q \cdot T$
 Welle läuft um $v_{Ph} \cdot T$

Quelle bewegt sich auf Detektor zu:

↳ Abstand zwischen Wellenfronten

$$A = (v_{Ph} - v_Q) \cdot T = \lambda' \quad (v_{Ph} \parallel v_Q)$$

- A erscheint als Wellenlänge λ'
- Detektor / Beobachter kann nur λ' messen bzw. die Frequenz

$$v_Q' = \frac{v_{Ph}}{\lambda'} = \frac{v_{Ph}}{(v_{Ph} - v_Q) \cdot T} = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{v_{Ph}}} \cdot \frac{1}{T}$$

$$v_Q' = \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{v_{Ph}}} \cdot v \quad \leftarrow \text{„wahre“ Freq. } v = \frac{v_{Ph}}{\lambda}$$

Frequenz erscheint verändert!

Analog für Quelle weg vom Detektor

$$\nu_Q' = \frac{1}{1 + \frac{v_Q}{v_{Ph}}} \cdot \nu$$

↳ relative Frequenz für bewegte Quelle

$$\frac{\nu_Q'}{\nu} = \frac{1}{1 \mp \frac{v_Q}{v_{Ph}}} \quad \textcircled{I}$$

↑ abhängig von Richtung

Beispiel: Krankenwagen mit $v_Q = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Beobachter in Ruhe:

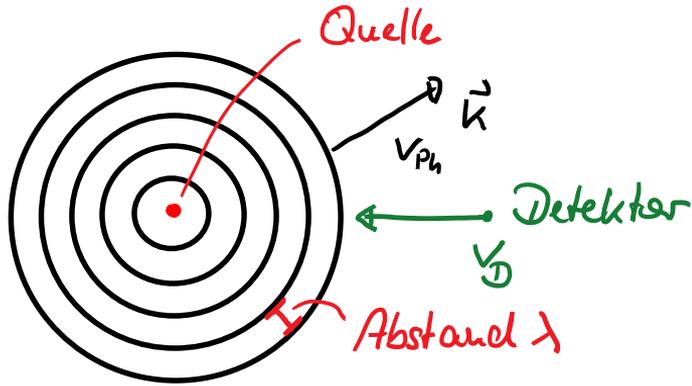
$$v_Q = 100 \text{ km/h} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{Ph} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{in Luft, } 20^\circ\text{C})$$

$$\frac{\nu_Q'}{\nu} = \frac{1}{1 \mp \frac{28}{340}} = 1,089 \text{ bzw. } 0,924$$

d.h. Frequenzänderung von ca. 8-9%
(Halbtonschritt entspricht ca. $\sqrt[2]{2} \approx 6\%$)

c) Quelle ruht, Detektor bewegt sich



Anzahl der Wellenfronten, die der Detektor in Zeit T beobachtet

$$v_D' = \frac{v_{ph} \pm v_D}{\lambda} \quad (v_{ph} \text{ entgegen bzw. in Richtung von } v_{ph})$$

$$\begin{aligned} v_D' &= \frac{v_{ph}}{\lambda} \pm \frac{v_D}{\lambda} \\ &= v \pm \frac{v_D}{\lambda} = v \pm \frac{v}{v_{ph}} \cdot v_D \quad v_{ph} = \lambda \cdot v \\ &= v \left(1 \pm \frac{v_D}{v_{ph}} \right) \end{aligned}$$

relative Frequenz:

$$\frac{v_D'}{v} = 1 \pm \frac{v_D}{v_{ph}} \quad \textcircled{II}$$

Beispiel: Schallsirene

Detektor bewegt sich mit $v_D = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

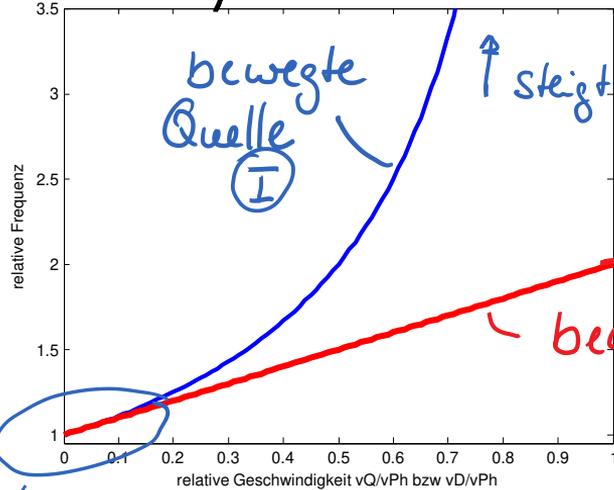
$$\hookrightarrow \frac{v_D'}{v} = 1 \pm \frac{28}{340} = 1,0824 \text{ bzw. } 0,918$$

d.h. nur geringer Unterschied zum Fall der bewegten Quelle

Darstellung von $\frac{v'}{v}$ in Abh. von $\frac{v_Q}{v_{Ph}}$ bzw. $\frac{v_D}{v_{Ph}}$

relative Frequenz

v entgegen v_{Ph}



↑ steigt gegen ∞

2
bewegter Detektor (II)

näherungsweise gleich & linear

aus $\frac{v'}{v} = 1 \pm \frac{v}{v_{Ph}}$

relative Änderung der Frequenz:

$$\Delta v = \frac{\Delta v}{v} = \frac{v' - v}{v} = \frac{v'}{v} - 1 = \pm \frac{v}{v_{Ph}}$$

$$\Delta v = \pm \frac{v}{v_{Ph}} \quad \triangleright \quad \circ$$

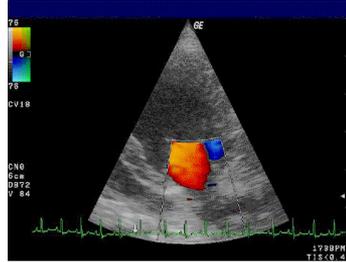
($v = v_D$
oder $v_Q < v_{Ph}$)

relative Änderung \equiv Verhältnis der Geschwindigkeiten

Beispiel:

Doppler-Ultraschall:

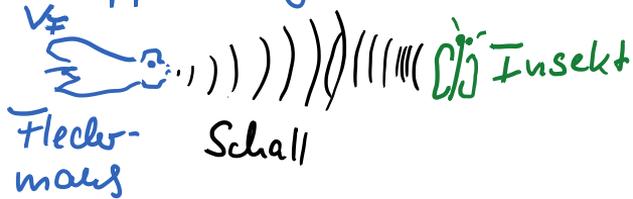
- Schall wird an Blut reflektiert



Kalmet https://de.wikipedia.org/wiki/Farbkodierte_Dopplerdonografie#/media/File:Doppler_mitral_valve.gif

↳ Frequenzänderung
→ nicht-invasive Messung des Blutflusses

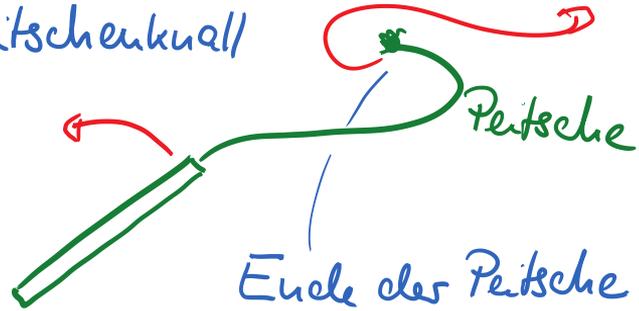
Fledermaus: Beutefang anhand von Doppler-Signalen



Optischer Doppler-Effekt:

Licht von entfernten Galaxien ist frequenzverschoben → Expansion des Universums

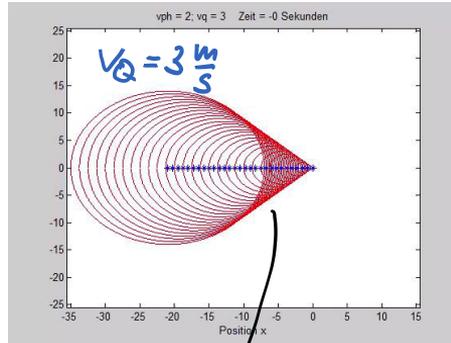
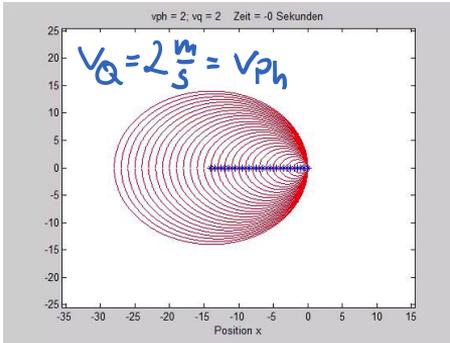
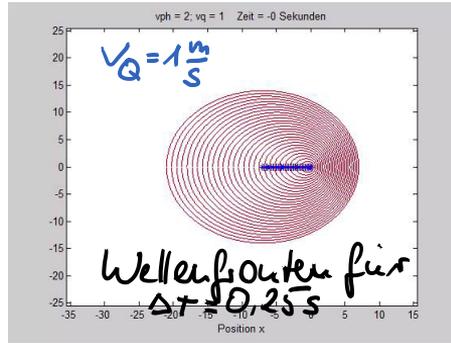
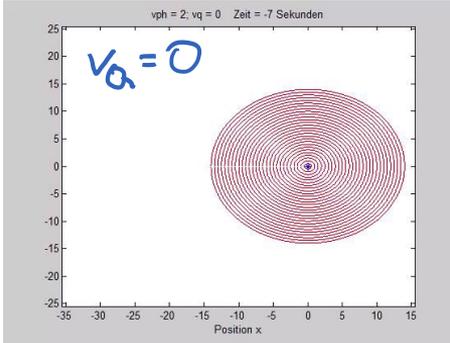
Peitschenknall



Ende der Peitsche bewegt sich mit $v > v_{ph}$
→ Überschallknall

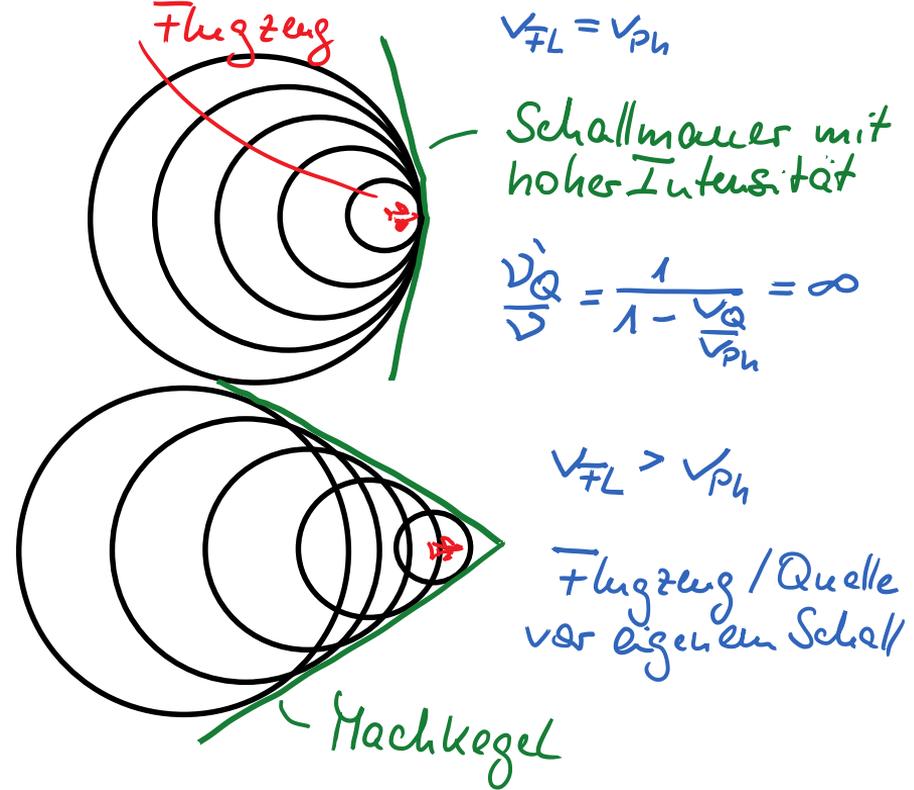
Mach-Kegel und Überschallknall:

Bewegte Quelle mit v_Q und $v_{Ph} = 2 \frac{m}{s}$



Mach-Kegel

Überschall-Knall:



Prof. Dr. Matthias Kohl



Link zum Kurs auch als Gast:

<https://olat.vcrp.de/auth/RepositoryEntry/2126020955/CourseNode/89017110672360>

oder



Prof. Dr. Matthias Kohl



Gefördert vom
Bundesministerium für Bildung und Forschung