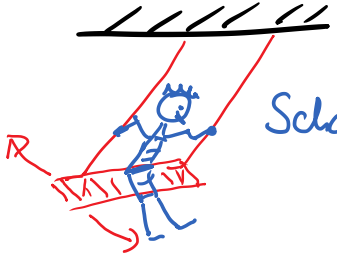
Feder-Pendel

Harmonische Schwingungen

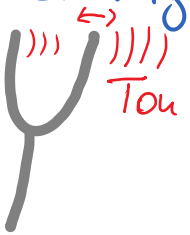
Schwingungen

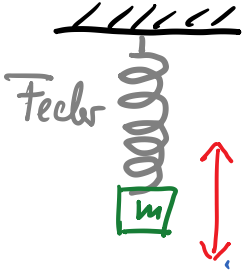
Beispiele: Alltag



Schaukel

Stimmgabel

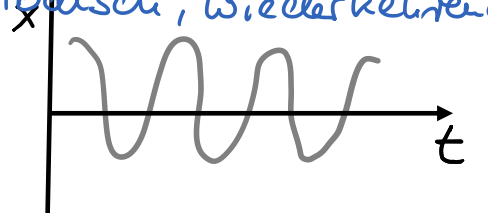




Federpendel

Bewegung: periodisch, wiederkehrend

Funktion der Zeit



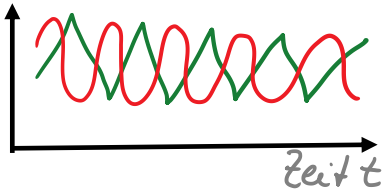
gesucht: • Beschreibung der Bewegung
• mathematisches Modell

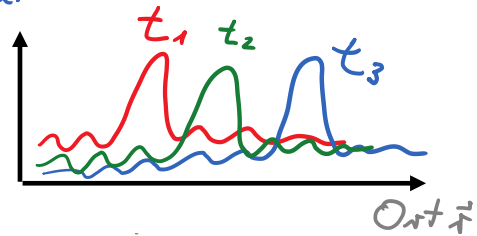
Unterscheidung:

• Schwingung: Zeitabhängigkeit

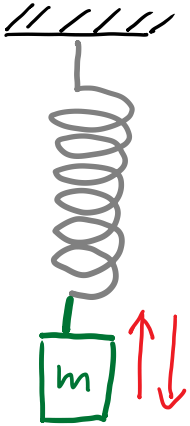
• Welle: Zeit- und Ortsabhängigkeit

Beispiel: Wasserwelle, Erdbeben
Schall, Licht



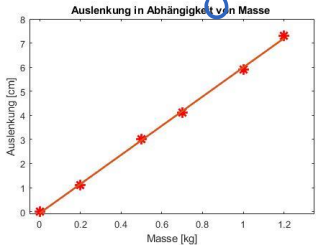


Federpendel: Experiment



Beobachtung

- Auslenkung $x \sim$ Kraft (Hook'sches Gesetz)



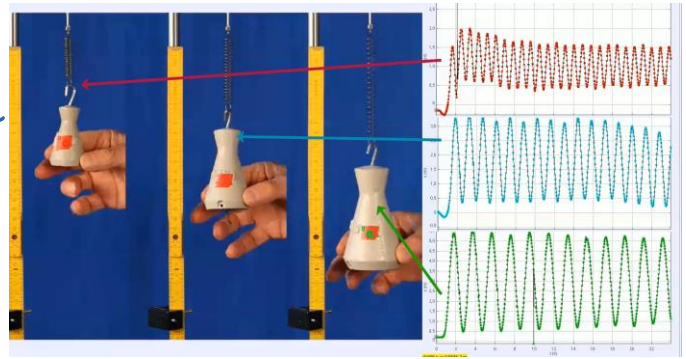
Federkraft steht der Zugkraft entgegen

↳ $F_R = -D \cdot x$

rück-treibend

Federkonst.

- Schwingungsdauer T unabh. von Auslenkung
- T groß für große Masse



- Feder (-Kraft) bestimmt Schwingung

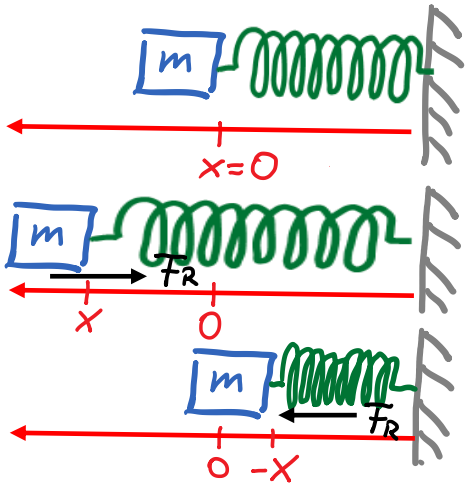
gesucht:

↳ mathematische Beschreibung

Federpendel: mathematische Beschreibung

a) ohne Gewichtskraft (horizontal)

Masse m
Ruhelage $x=0$



- Auslenkung aus Ruhelage

↳ Rückstellkraft $F_R \sim -x$

entgegen der Auslenkung

$F_R = -D \cdot x$ (Hookisches Gesetz)

Federkonstante
abh. von Material, Querschnitt, Länge etc.

- Kraft → Beschleunigung

$F = m \cdot a = F_R$

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x}$$ Bewegungsgleichung

mathematisch: Differentialgleichung 2. Ordnung

gesucht: Lösungen $x(t)$, die diese Bewegungsgl. erfüllen: $x(t) = ?$

Lösungen für $\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x}$ ⊛

- Ansatz: Raten und Testen

1. Funktion: $x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t^2$ mit Konstante c

↳ $\frac{d}{dt} x_1(t) = c \cdot t$ $\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = c$

Einsetzen in ⊛

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = m \cdot c \neq -D \cdot \frac{1}{2} c t^2$$

also erfüllt x_1 nicht die Bewegungsgl. und ist keine Lösung

2. Funktion: $x_2(t) = d \cdot \sqrt{t}$ mit Konstante d

↳ $\frac{d}{dt} x_2 = \frac{d}{dt} (d \cdot t^{1/2}) = \frac{1}{2} d\, t^{-1/2}$

$\frac{d^2}{dt^2} x_2 = -\frac{1}{4} d\, t^{-3/2}$

in ⊛ $m \frac{-1}{4} d\, t^{-3/2} \neq -D d\, t^{1/2}$ → x_2 keine Lösung

- andere Funktionen wie

$x_n = c \cdot t^n$ c - Konstante

$x_t = \tan(c \cdot t)$

$x_{\ln} = \ln(c \cdot t)$

sind keine Lösungen

Bewegungsgl. $\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x}$ ⊛

- Ansatz: $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$
  mit Konstanten x_0, ω, δ

↳ $\frac{d}{dt} x(t) = -\omega \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \underbrace{x_0 \cos(\omega t + \delta)}$$
$$= -\omega^2 \cdot x(t)$$

und damit wird ⊛

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m(-\omega^2) \cdot x(t) = -D\, x(t)$$

dies gilt, wenn $m \cdot \omega^2 = D$

↳ $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Ansatz erfüllt die Bewegungsgleichung ⊛

Lösung: harmonische Schwingung

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)}$$

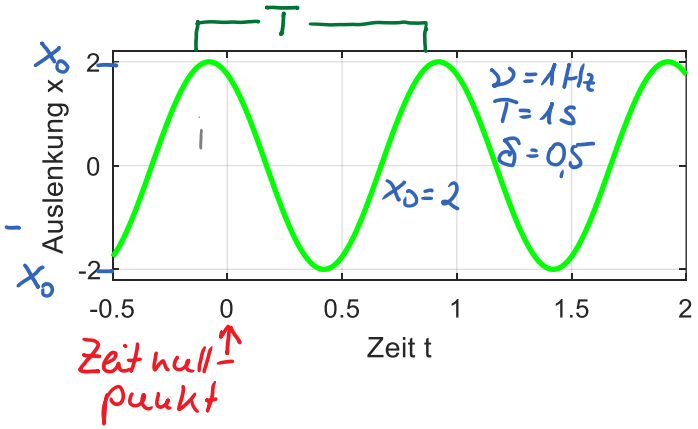
Amplitude x_0
maximale Auslenkung

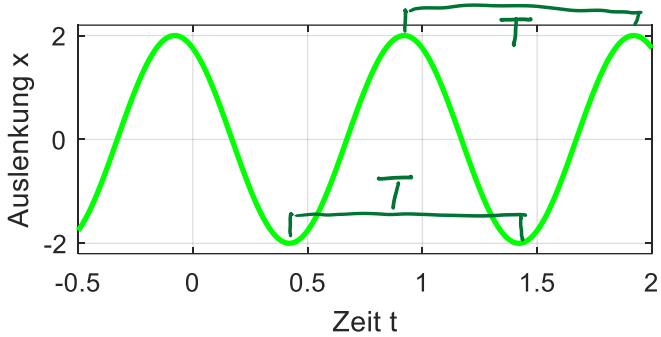
Kreisfrequenz
$\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot \nu$

Schwingungsdauer

Frequenz

Phase δ





- Schwingungsdauer T, wenn:

$$\cos(\omega\cdot(t+T)+\delta) = \cos(\omega t+\delta)$$

$\hookrightarrow$ $\omega\cdot T = 2\pi \rightarrow \omega = 2\pi\cdot\frac{1}{T}$

- Phase δ:
  - festgelegt durch den Zeitnullpunkt

    für $t=0$: $\cos(\omega\cdot 0+\delta) = \cos(\delta)$

- auch $x(t) = x_0\cdot\sin(\omega t+\delta')$ ist Lösung

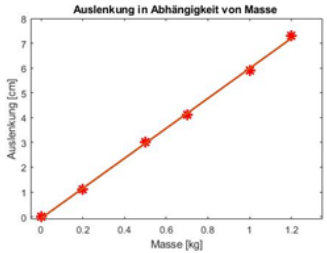
  mit $\delta' = \delta + \frac{\pi}{2}$,

  da sin- und cos-Funktion um $\frac{\pi}{2} = 90°$ gegeneinander verschoben sind

Vergleich mit Experiment:

- Messung

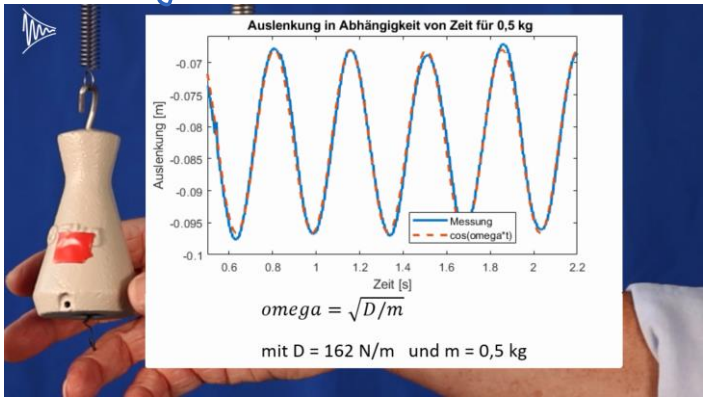
  $\hookrightarrow$ $D = 162\ N/m$



- $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

$\hookrightarrow$ für $m = 0{,}5\,kg \rightarrow T = 0{,}349\,s$

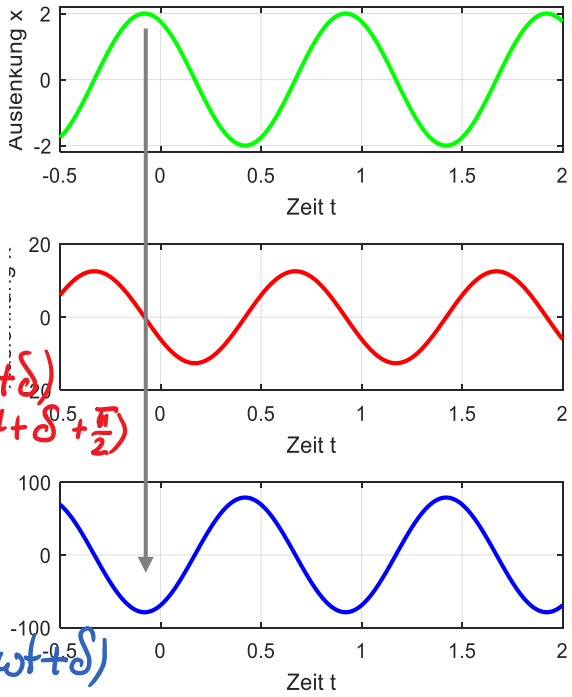


- Übereinstimmung Theorie-Experiment

Harmonische Schwingung

Ort

$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \delta)$



Geschwindigkeit

$v(t) = \frac{dx}{dt}$

$= -\omega x_0 \sin(\omega t + \delta)$

$= -\omega x_0 \cos(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2})$

Beschleunigung

$a(t) = \frac{dv}{dt}$

$= -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \delta)$

$= -\omega^2 x$

... gleiche ν, T, ω!

• Phasenverschiebung:

– $v(t)$ ist um $\frac{\pi}{2}$ gegen $x(t)$ verschoben

– $a(t)$ " " $\frac{\pi}{2}$ " $v(t)$ " ,

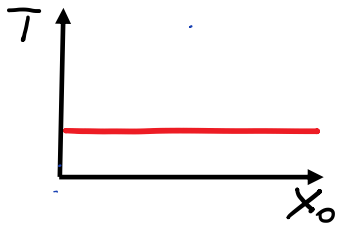
also um π gegen $x(t)$.

→ wenn x im Maximum (Umkehrpunkt), ist $v = 0$ und a maximal

Kreisfrequenz, Schwingungsdauer:

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

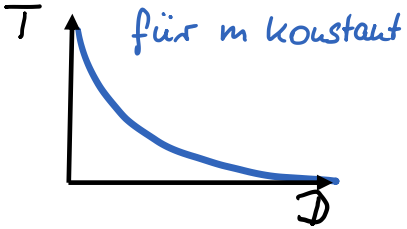
- Unabhängigkeit von Amplitude x_0 !



- $\omega \sim \sqrt{D}$, $T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}$

  hohes D ≡ steife Feder

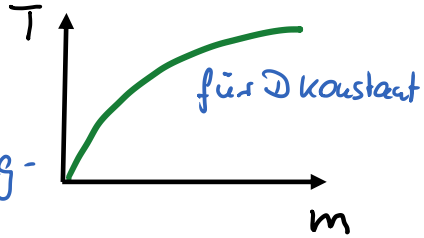
  ↳ hohe Freq., kleines T



- $\omega \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$, $T \sim \sqrt{m}$

  große Masse ≡ große Trägheit

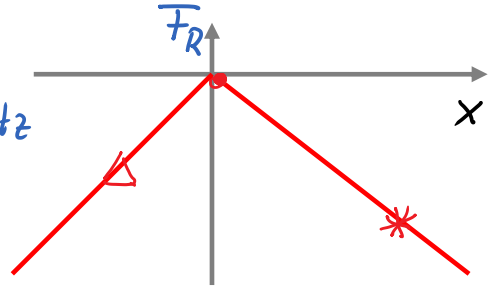
  ↳ langsame Bewegung

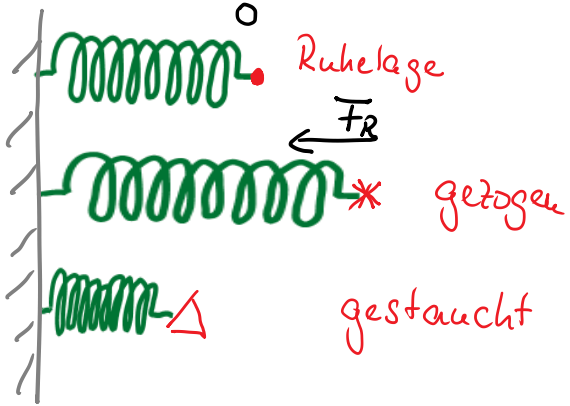


Anmerkung:

Hook'sches Gesetz

$$F_R = -Dx$$



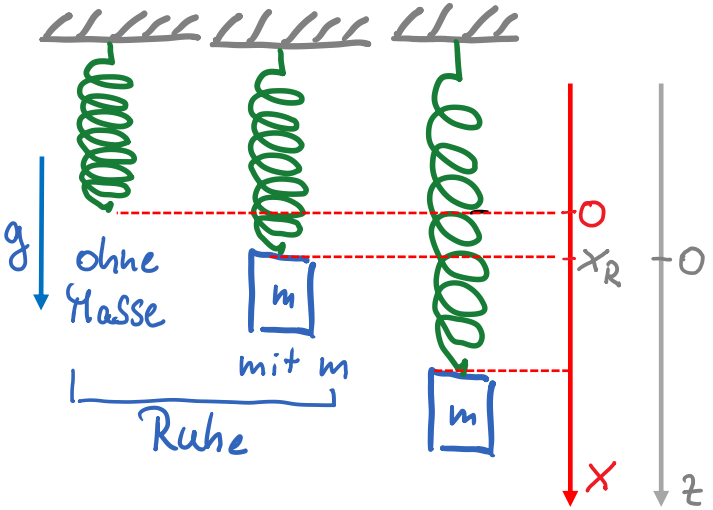


- Gummiband erfüllt das Hook'sche Gesetz üblicherweise nicht!

Federpendel: mathematische Beschreibung

b) mit Gewichtskraft

- vertikal: zusätzliche Gewichtskraft dehnt die Feder



- wie ändert sich die Schwingung (ω, T) durch Gewichtskraft $F_G = mg$?

Bewegungsgleichung:

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-Dx}_{\text{Feder}} + \underbrace{m \cdot g}_{\text{konstante Gewichts-Kraft}}$$

- zur Lösung: Koordinatentransformation

$$z = x - x_R$$

Auslenkung durch F_G

- Ruhelage: $F = 0 = -Dx_R + mg$

$$\hookrightarrow x_R = m\frac{g}{D}$$

- es gilt: $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x - x_R) = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\hookrightarrow m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{d^2x}{dt^2} = -D(z + x_R) + mg$$

$$= -Dz - D\,m\frac{g}{D} + mg$$

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = -Dz \quad \hookrightarrow$$

↳ Bewegungsgl. $\boxed{m\frac{d^2z}{dt^2} = -Dz}$

- gleiche Form wie für horizontales Federp.

↳ gleiche Lösung:

$$z(t) = z_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

mit $\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$

nur Verschiebung der Bewegung um

$$z = x - x_0$$

Zusammenfassung Federpendel:

- Bewegungsgl. $\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx}$

  Lösung: $\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)}$

  $\boxed{\text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}}$

↳ harmonische Schwingung (cos-, sin-Fkt)

↳ gute Näherung für viele Schwingungen

↳ zeitlich nicht begrenzt (von $-\infty < t < \infty$) und ohne Reibung/Dämpfung

- ähnliche Beschreibung für
  - Fadenpendel
  - Torsionspendel
  - physikalisches Pendel etc

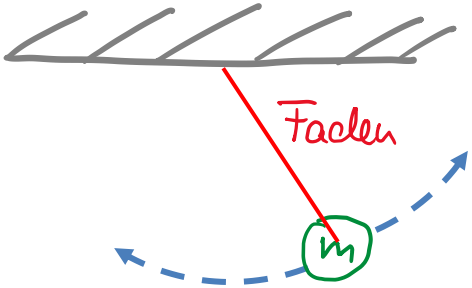
- Energie?

- gedämpfte / erzwungene Schwingungen

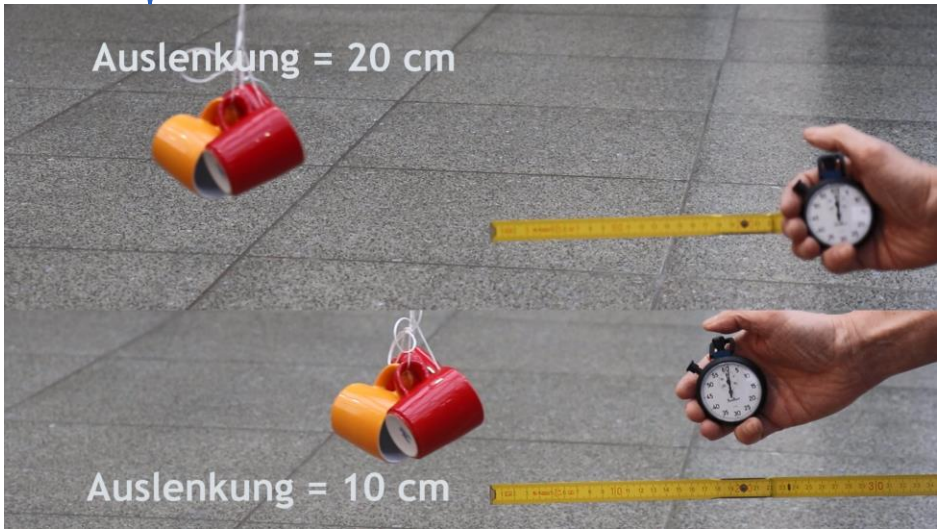
Faden-Pendel

Mathematisches Pendel

Fadenpendel:



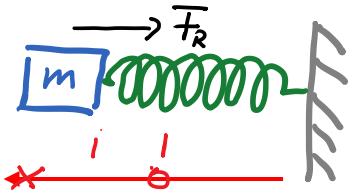
Experiment



Beobachtung: Schwingungsdauer
- unabh. von Masse
- unabh. von Auslenkung

bisher: Federpendel

- Federkraft $F_R = -Dx$



↳ Bewegungsgleichung

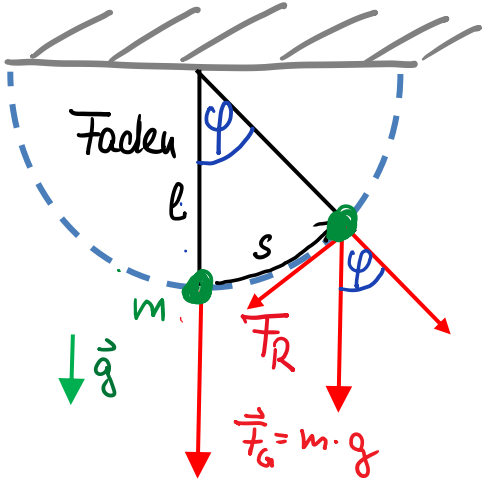
$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx$$

↳ Lösungsansatz:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

→ $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ Kreisfrequenz ($\omega = \frac{2\pi}{T}$)

mathematische Beschreibung:



- Schwingung von m auf Kreisbahn mit Radius l
- Faden: Masse sehr klein
- Gewichtskraft $\vec{F}_G = m \cdot g$
- Bewegung beschrieben durch
  - Winkel φ oder
  - Auslenkung s

↳ $\varphi = \frac{s}{l}$; $\varphi = 0 \equiv s = 0$ in Ruhelage

- Komponente von $\vec{F}_G$ entlang der Bahn ist
  ↳ Rückstellkraft $\vec{F}_R = -\vec{F}_G \cdot \sin\varphi$

entgegen der Auslenkung

↳ Bewegungsgl.

$$F = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi$$

mit zwei Koordinaten $s(t)$ und $\varphi(t)$

- mit $\varphi = \frac{s}{l}$ bzw $s = l \cdot \varphi$ wird dies:

↳
$$\boxed{\begin{aligned} m \frac{d^2 s}{dt^2} &= -m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{s}{l}\right) \\ m \cdot l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -m g \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

nur s

nur φ

- dies entspricht nicht der Bew.-gl. des Federpendels $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -Dx$

da $\frac{d^2 s}{dt^2} \sim -\sin(s)$

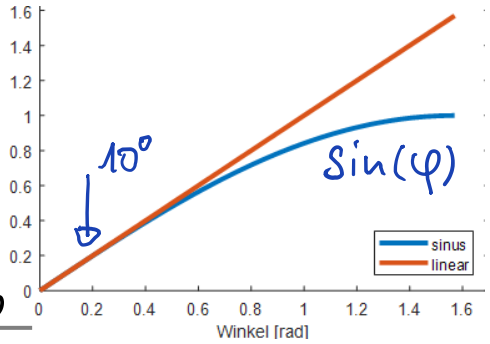
↳ Lösung?

Näherung für kleine Winkel:

wenn φ klein, gilt

$\sin\varphi \cong \varphi$

für φ in rad



φ / rad	φ / grad	$\sin\varphi$
0	0	0
0,0175	1	0,0175
0,0524	3	0,0523
0,175	10	0,1736

↳ damit: $\sin\left(\frac{s}{\ell}\right) \cong \frac{s}{\ell}$

$$\left.\begin{aligned} m\,\frac{d^2s}{dt^2} &= -m\cdot g\cdot \sin\left(\frac{s}{\ell}\right) \\ m\cdot\ell\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -mg\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\} \circledast$$

↳ $$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= -\frac{g}{\ell}\cdot s \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -\frac{g}{\ell}\cdot\varphi \end{aligned}}$$ Bewegungsgleichung des Fadenpendels

Lösung: $$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= s_0\cdot\cos(\omega t+\delta) \\ \varphi(t) &= \varphi_0\cdot\cos(\omega t+\delta) \\ &\text{wenn } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \end{aligned}}$$ mit $\varphi = \frac{s}{\ell}$

→ harmonische Schwingung

Beweis:

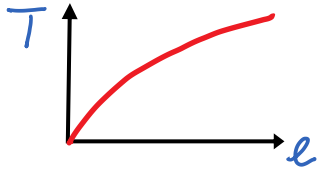
$$\frac{ds}{dt} = -\omega\cdot s_0\cdot\sin(\omega t+\delta)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2\cdot s_0\cdot\cos(\omega t+\delta) = \underbrace{-\omega^2\cdot s = -\frac{g}{\ell}s}_{=}$$

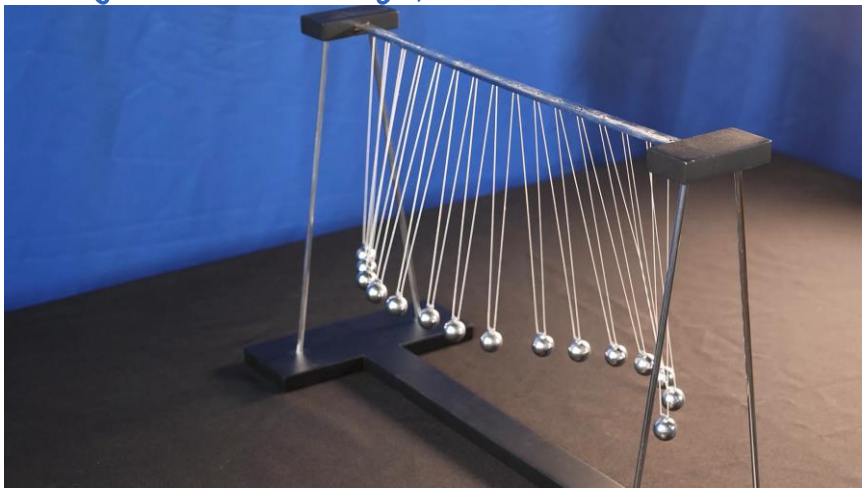
$$s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$
$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$
mit $\varphi = \frac{s}{\ell}$,
und $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

- s_0 bzw. φ_0 : Amplitude
- δ : Phase, abh. vom Zeitnullpunkt
- $\sin(\omega t + \delta')$ ist auch Lösung
- Schwingungsdauer T bzw Kreisfreq. ω:
  $\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$
  - unabh. von m: alle Massen schwingen gleich
  - unabh von s_0, φ_0 (φ_0 klein)
  - $\omega \sim \frac{1}{\sqrt{\ell}}$

    $T \sim \sqrt{\ell}$



→ großes ℓ → großes T



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ℓ / m	T / s
0,1	0,63
0,2	0,89
1	2,00
2	2,83

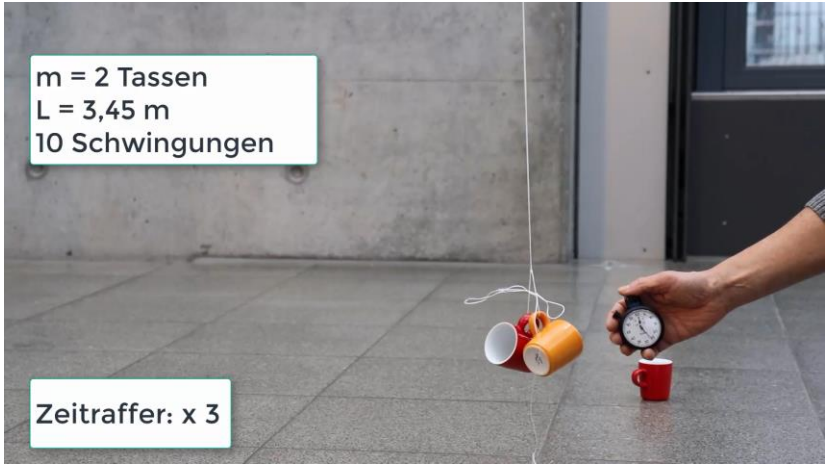
- Anwendung: Pendeluhr
  Einstellung durch Variation von ℓ

Bestimmung von g:

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

↳ aus T und l kann g berechnet werden

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot l$$



- im Experiment:

Fadenpendel: $l = 3{,}45\,m$

Schw.-Dauer: $T = 3{,}72\,s$

Berechnung:

↳ $g_{exp} = 9{,}84\,\frac{m}{s^2}$

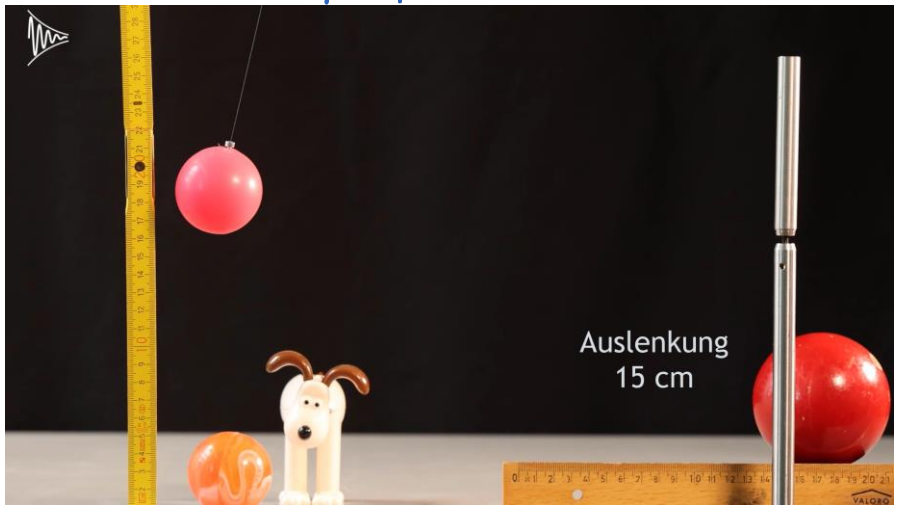
Literaturwert: $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

$\delta = 0{,}3\%$!

Sehr gute Übereinstimmung!

Zeitverlauf: Experiment – Theorie

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$



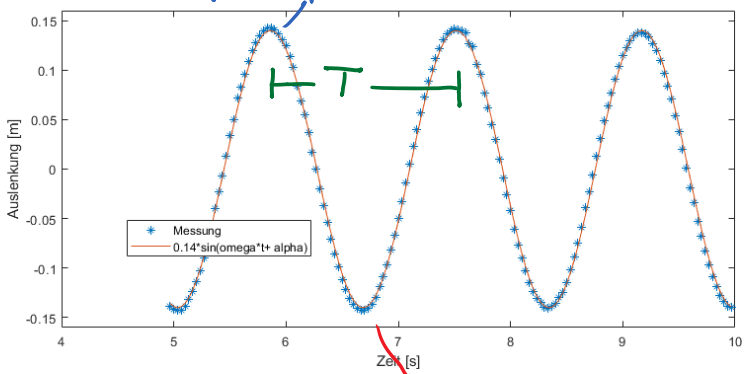
$l = 0{,}68\,m$

$g = 9{,}81\,\frac{m}{s}$

$\hookrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3{,}79 \cdot \frac{1}{s}$

$T = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}65\,s$

Zeitverlauf: Experiment



$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3{,}8\,\frac{1}{s}$

Schwingungsdauer: Abh. von Winkel

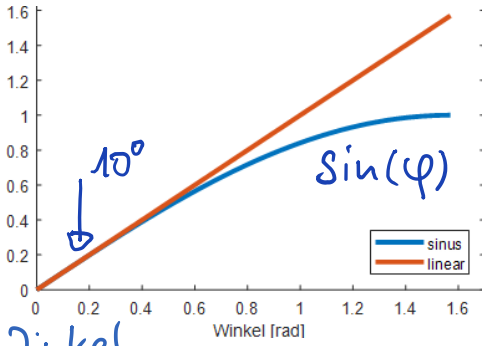
- bisher Näherung für kleine Winkel

$\sin\varphi \cong \varphi$

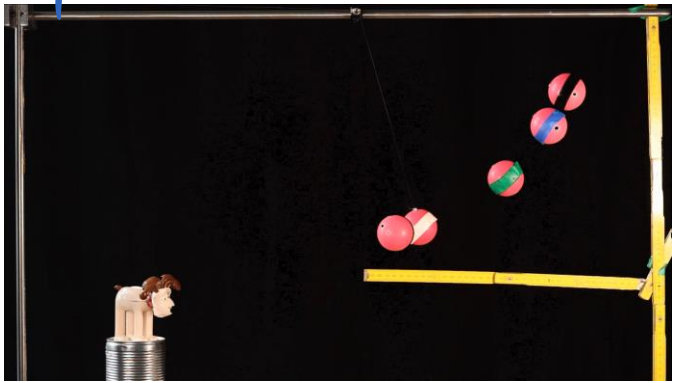
↳ $\omega = 2\pi \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

unabhängig vom Winkel



Experiment:



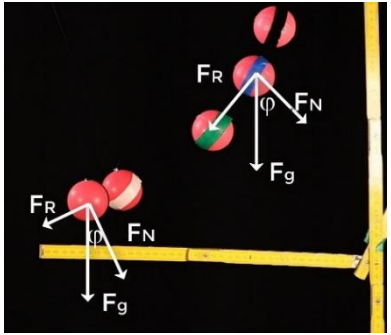
Beobachtung: großer Winkel φ

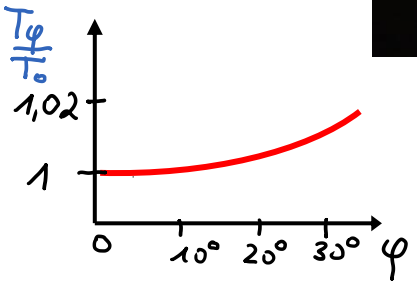
→ T_φ wird größer

Begründung:

$F_R = -\, m \cdot g \cdot \sin\varphi$

wächst langsamer!

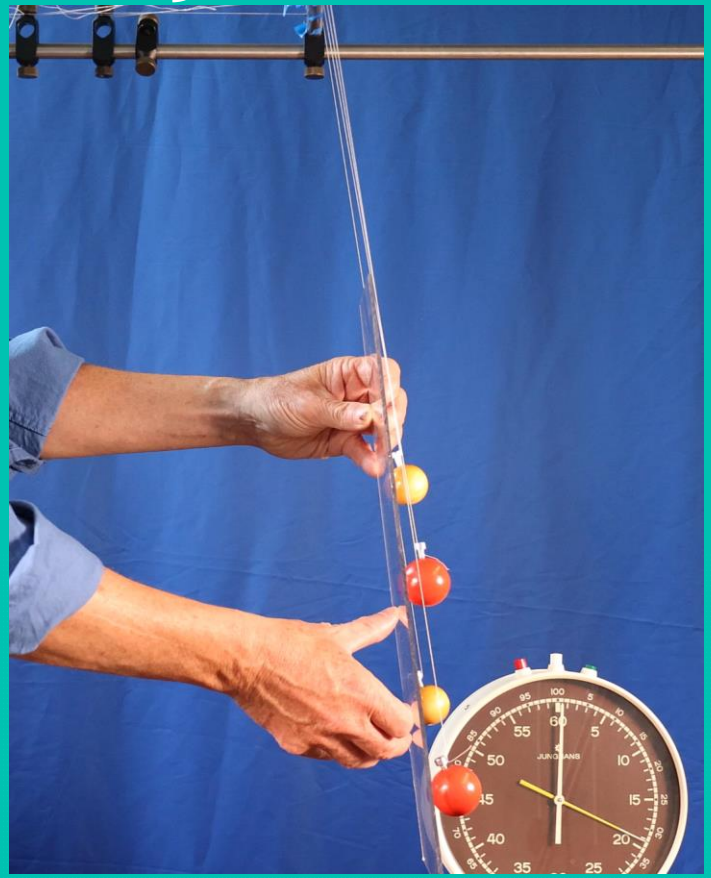




(siehe Literatur)

- Problem bei Pendeluhren: Ganggenauigkeit von 1% → Abweichung von ~14 min pro Tag

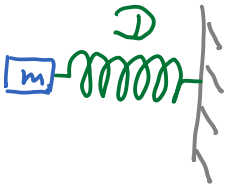
Physikalisches Pendel



Physikalisches Pendel

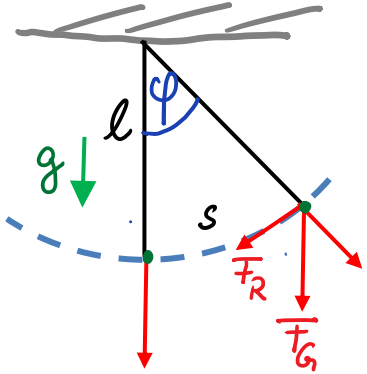
- bisher:

Federpendel $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx$



Fadenpendel $m\frac{d^2s}{dt^2} = -m\cdot\frac{g}{\ell}s$

↗ mathematisches Pendel

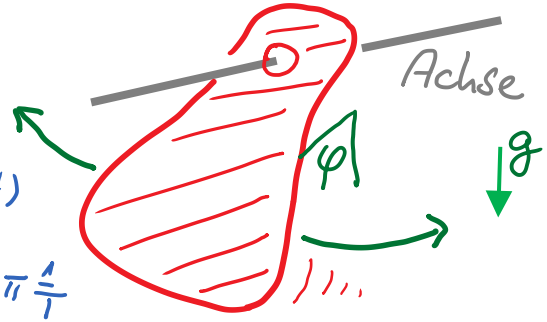


Annahme:

- Punktmasse

- jetzt: ausgedehnte Masse

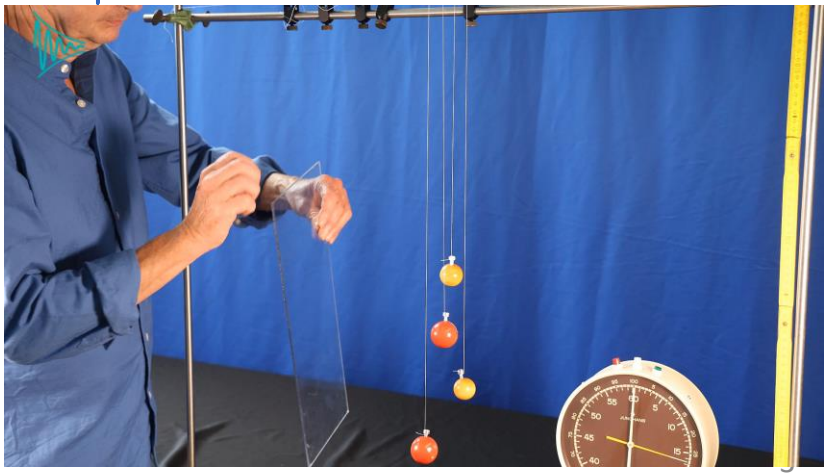
↳ physikalisches Pendel



gesucht:

- Bewegung $\varphi(t)$
- T und $\omega = 2\pi\frac{1}{T}$

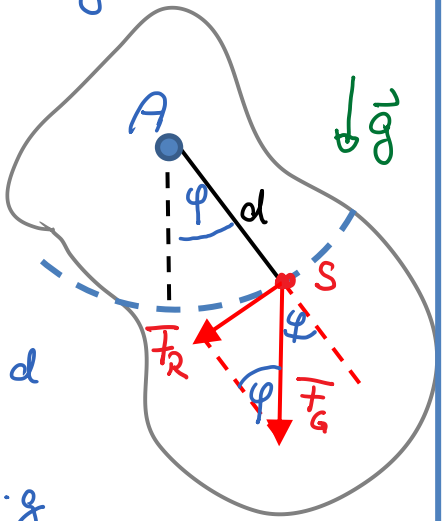
Experiment:



Beschreibung: physikalisches Pendel

- beliebige Massenverteilung mit Schwerpunkt S
  ($\vec{r}_S = \frac{1}{m}\int \vec{r}\cdot dm$)
- Drehachse A ⊥ Zeichenebene
- S bewegt sich auf Kreisbahn mit Radius d um A
- Gewichtskraft $F_G = m\cdot g$
- Rückstellkraft $F_R = -F_G\cdot\sin\varphi = -mg\cdot\sin\varphi$

↳ Drehbewegung entsteht



↳ Drehmoment $M = F_R\cdot d$ $\quad(\vec{F}_R \perp \vec{d})$

$= -m\cdot g\cdot d\cdot\sin\varphi$

- allgemein: Drehmoment → Winkelbeschl.

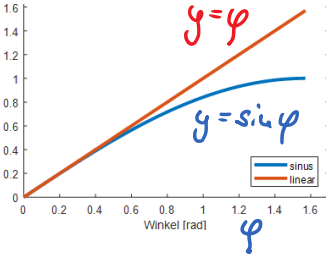
$$M = I\cdot\alpha = I\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad \left(\text{entsp. } F = m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

Trägheitsmoment $I = \int r^2\,dm$

Winkelbeschleunigung

↳ $I\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\cdot d\cdot\sin\varphi$

- für kleine Winkel φ gilt $\sin\varphi \simeq \varphi$



↳ $$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{m\cdot g\cdot d}{I}\,\varphi}$$ Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\underbrace{\frac{m\cdot g\cdot d}{I}}_{\text{Konstanten}}\varphi}$$ Bewegungsgleichung

2. zeitl. Ableitung von φ — Minus — φ

- Lösung wie bei Feder- und Fadenpendel

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi = \varphi_0\cdot\cos(\omega\cdot t+\delta)\\ &\text{mit}\quad \omega = \sqrt{\frac{m\cdot g\cdot d}{I}}\end{aligned}}$$ Winkel $\varphi = \frac{s}{d}$

oder

$$s = s_0\cdot\cos(\omega t+\delta)$$ Bahn $s = d\cdot\varphi$

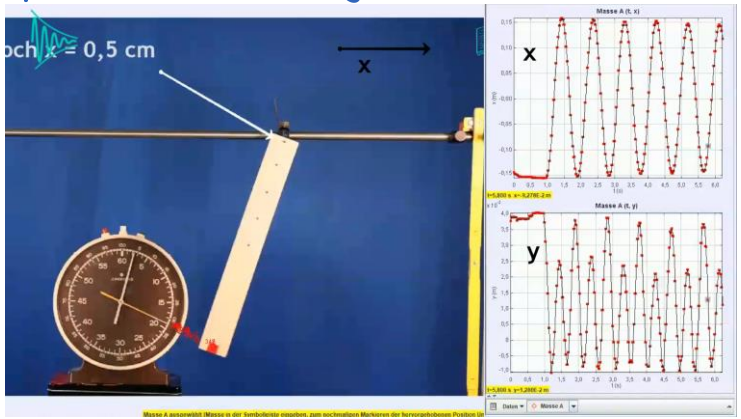
Masse und Massenverteilung (I) bestimmt Schwingung, aber auch Position von Achse bezw. d

- Sonderfall: Masse in einem Punkt
  ↳ m im Schwerpunkt und $I = m\cdot d^2$

also $\omega = \sqrt{\frac{m\cdot g\cdot d}{m\cdot d^2}} = \sqrt{\frac{g}{d}}$.

dies ist die Lösung für Fadenpendel!

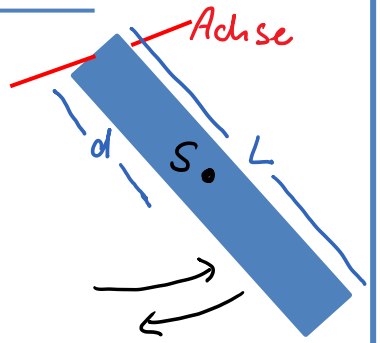
Experiment: homogener Stab



Beispiel: homogener Stab

der Länge L

a) Aufhängung am Ende



gesucht: Schw.-Dauer T_s

$$T = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}}$$

- Schwerpunkt S: bei $L/2$

  ↳ $d = L/2$

- m ist nicht gegeben, aber $I \sim m$

- Trägheitsmoment I eines Stabes

  $I = \frac{1}{3} m \cdot L^2$

[denn: $I = \int_0^L r^2 dm = \int_0^L r^2 \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Dichte}} \cdot \underbrace{A}_{\text{Querschnitt}} \cdot dr = \rho A \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^L$

$$I = \rho \cdot A \cdot \frac{1}{3} L^3 = \frac{1}{3} \underbrace{(\rho A \cdot L)}_{= m} \cdot L^2 = \frac{1}{3} m L^2 \quad]$$

↳ $T_s = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m L^2}{3 \cdot m \cdot g \cdot L/2}}$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{g}}$$

↗ unabh. von m

- Vergleich mit Fadenpendel $T_{FP} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

  ↳ Stab: um $\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}82$ kürzere Schw.Dauer

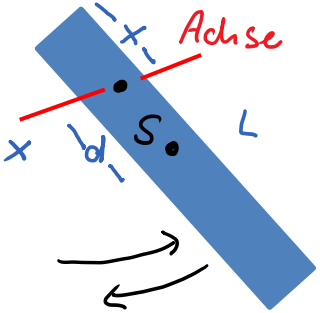
	T
Stab L	$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0{,}82$
Fadenp. L	$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$
Fadenp. $L/2$	$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}77$

Beispiel: homogener Stab

der Länge $L = 32\,cm$

b) Aufhängung in x

gesucht: T in Abhängigk. von x



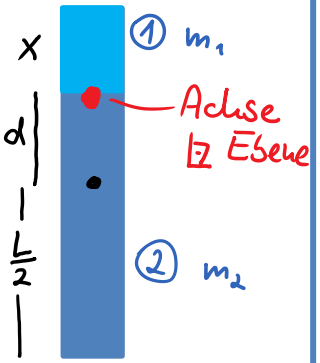
- Schwerpunkt S: $d = \frac{L}{2}$
- $x = \frac{L}{2} - d$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}}$ ← I ändert sich mit x bzw. d

Trägheitsmoment für Teil 1 & 2:

$$I_x = \frac{1}{3} m_1 \cdot x^2 + \frac{1}{3} m_2 \cdot (L-x)^2$$

$$m_1 = \frac{x}{L} \cdot m \quad ; \quad m_2 = \frac{L-x}{L} \cdot m$$

$$I_x = \frac{1}{3} m \cdot \frac{x}{L} \cdot x^2 + \frac{1}{3} m \cdot \frac{(L-x)^3}{L}$$



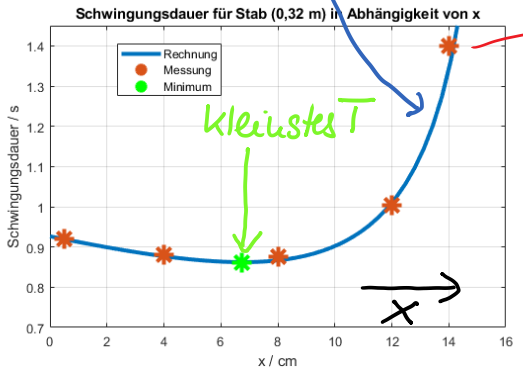
$$\rightarrow I_x = \frac{1}{3} m \frac{1}{L} \left(x^3 + (L-x)(L^2 - 2Lx + x^2) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{m}{L} \left(x^3 + L^3 - 2L^2 x + Lx^2 - L^2 x + 2Lx^2 - x^3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{m}{L} \left(L^3 - 3L^2 x + 3Lx^2 \right)$$

$$= \frac{1}{3} m \left(L^2 - 3Lx + 3x^2 \right)$$

$$\hookrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 - 3Lx + 3x^2}{3 \cdot g \cdot x}}$$



Messung

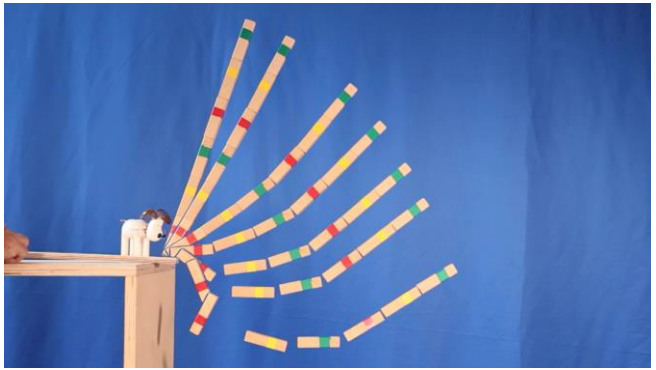
für $L = 32\,cm$

Sehr gute Übereinstimmung Experiment & Rechnung

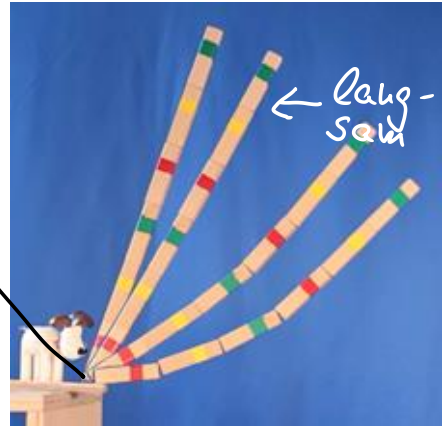
Anwendung: Fallender Schornstein

- warum bricht er?

- Experiment:



- Erklärung über Drehbewegung (siehe Mechanik)
- „Schwingungszeit" groß für großen Abstand zur Drehachse
- Abstand groß → großes Trägheitsmoment

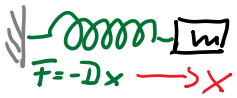
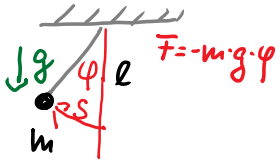
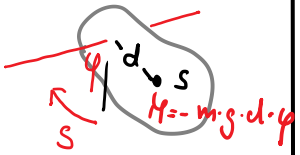
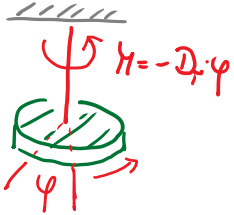


Zusammenfassung

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$ Bewegungsgl.

$$\boxed{x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)}$$ Lösung

$\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$

Federpendel		$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Fadenpendel (mathem. P.)		$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
Physik. Pendel		$\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}$
Torsions-Pendel		$\omega = \sqrt{\frac{D_T}{I}}$

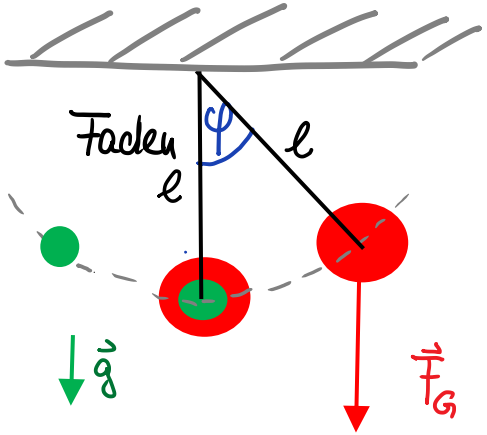
Kugel-Pendel

Mathematisches …?
Physikalisches …?

Schwingungsdauer?

Schwingungsdauer Kugelpendel

- Fadenpendel mit Kugel



- Wie hängt die Schwingungsdauer T vom Kugelradius ab?

- Fadenpendel: $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

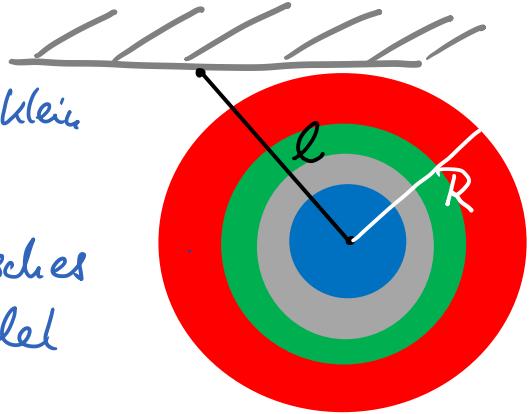
  Lösung für kleine Winkel φ

  Masse als Punkt (mathematisches Pendel)

  Faden masselos

- wenn R nicht klein gegen ℓ

  ↳ physikalisches Pendel

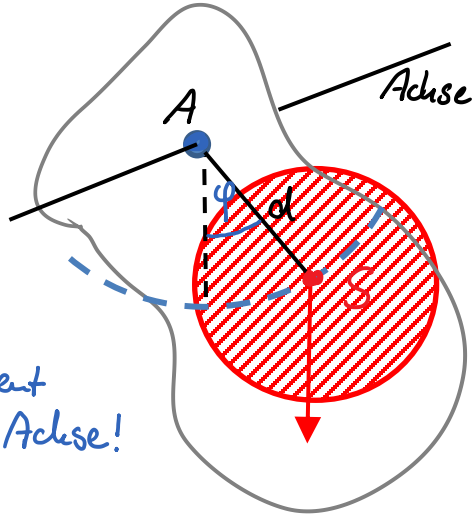


Physikalisches Pendel

- Schwerpunkt S
- Achse A
- Abstand $AS = d = \ell$
- für kleine Winkel

$\hookrightarrow \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}$

Trägheitsmoment bezogen auf Achse!



- Trägheitsmoment $I = \underbrace{I_{Kugel}}_{\text{Achse durch S}} + m \cdot d^2$

Steiner'scher Satz

- für Kugel:

$I_{Kugel} = \frac{2}{5} m R^2$, wenn Achse durch S

$\hookrightarrow \omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \ell}{\frac{2}{5} m R^2 + m \cdot \ell^2}}$

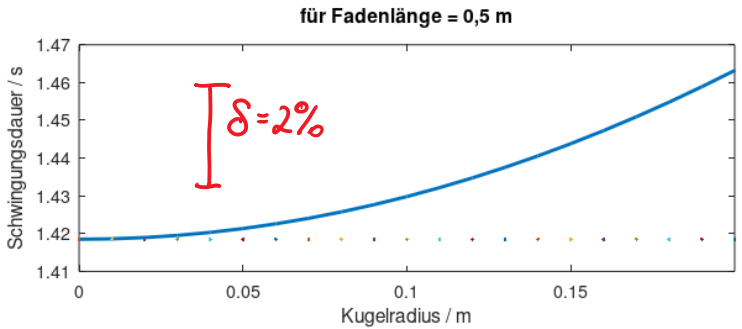
$= \sqrt{\frac{5 g \ell}{2 R^2 + 5 \ell^2}} = \sqrt{\frac{5 \, g/\ell}{2 R^2/\ell^2 + 5}}$

$= \underbrace{\sqrt{\frac{g}{\ell}}}_{\text{mathem. Pendel}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{5}{2 R^2/\ell^2 + 5}}}_{\text{Faktor, der die Abweichung beschreibt}}$

$\hookrightarrow T = 2\pi \frac{1}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \sqrt{\frac{2R^2/\ell^2 + 5}{5}}$

$$\hookrightarrow T = 2\pi \frac{1}{\omega} = \underbrace{2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}}_{T_{\text{math. Pendel}}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2R^2/\ell^2 + 5}{5}}}_{\text{Änderung für } R>0}$$

Beispiel: $\ell = 0{,}5\,\text{m}$



- für $R = 0{,}05\,\text{m} = 5\,\text{cm}$
  $\hookrightarrow \delta T \cong 0{,}2\,\%$
- gleiche Änderung für $\Delta\ell = 2\,\text{mm}$

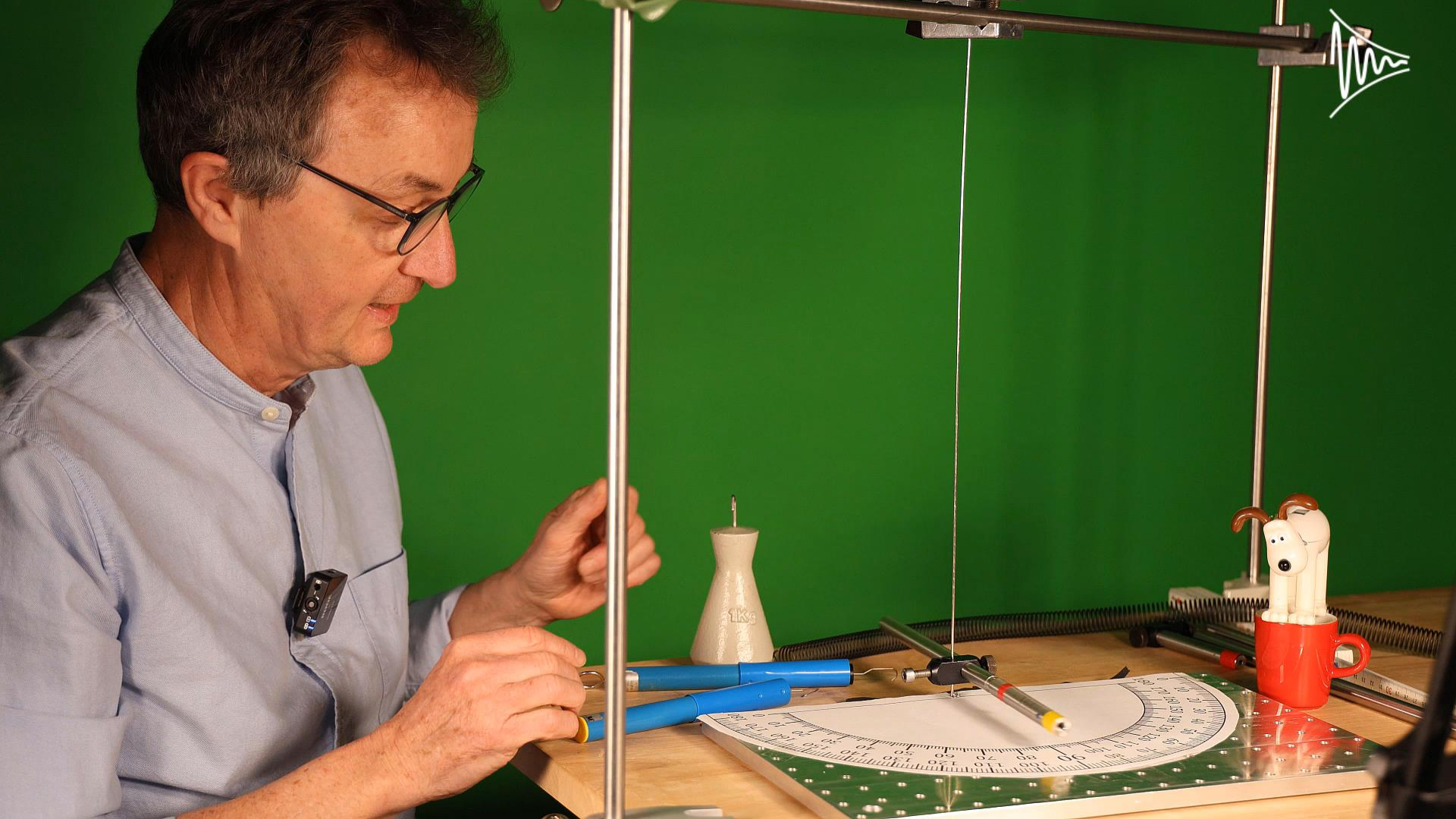
} für $\ell = 0{,}5\,\text{m}$

$\longrightarrow$ Kugel-Pendel ist gute Näherung für Fadenpendel!

Weiteres:

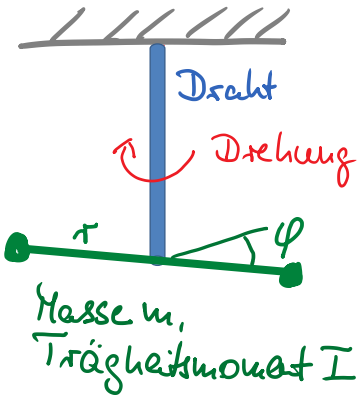
- Fadenmasse nicht klein
  $\hookrightarrow$ Trägheitsmoment $I_{\text{Faden}} = \frac{1}{3} m_{\text{Faden}} \cdot \ell^2$
- Dämpfung wächst mit R^2
  $\hookrightarrow$ kleiner Einfluss auf T

Torsionspendel



Torsionspendel

- Draht
- Drehung
  Kraft F notwendig
  Scherungskraft

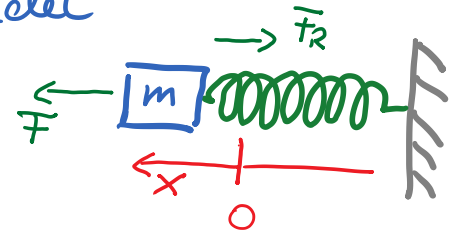


Beobachtung:

- Auslenkung: Winkel φ
- $\varphi \sim$ Kraft F
  $\sim$ Drehmoment M
- Schwingung mit $\nu = \frac{1}{T}$

↳ gesucht: • Bewegungsgleichung
• Lösung $\varphi(t)$ und T

Vergleich: Federpendel



Rückstellkraft: $F_R = -D_F \cdot x$

rücktreibend

Federkonstante

↳ Bewegungsgleichung

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D_F \cdot x} \qquad (1)$$

↳ Lösungsansatz:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

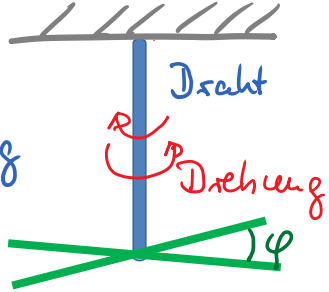
erfüllt (1), wenn

$\omega = \sqrt{\frac{D_F}{m}}$ Kreisfrequenz ($\omega = \frac{2\pi}{T}$)

für jede Phase δ

Torsionspendel:

- Drehung / Torsion des Drahtes: Kraft bzw Drehmoment M notwendig

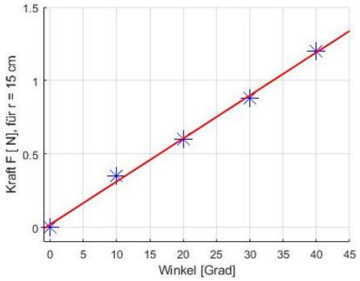


- für viele Drähte gilt

↳ $M_R = -D_T \cdot \varphi$

rücktreibend

Konstante für Draht, abh. von Länge, Querschnitt, Material etc.



- allgemein gilt für Drehbewegungen

↳ $M = I \cdot \underbrace{\frac{d^2\varphi}{dt^2}}$ $\left(F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right)$

Drehmoment

Winkelbeschleunigung

Trägheitsmoment $I = \int r^2 dm$

also:

↳ $\boxed{M = I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D_T \cdot \varphi}$ Bewegungsgl.

↳ Lösung: $\boxed{\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)}$

Amplitude

Phase δ

mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D_T}{I}}$

Test:

$$\frac{d\varphi}{dt} = (-\omega)\varphi_0 \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

$$= -\omega^2 \varphi$$

$$= -\underbrace{\frac{D_T}{I}}_{\omega^2 = \frac{D_T}{I}} \varphi \quad \text{(Bew.-gl.)}$$

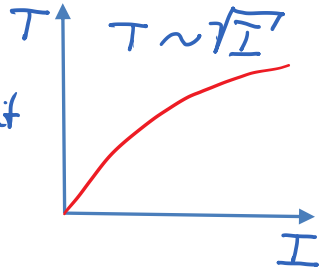
$$M = I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D_T \cdot \varphi$$ Bewegungsgl.

↳ Lösung: $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$

mit $\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D_T}{I}}$

- Schwingungsdauer $T \sim \sqrt{I}$

  größere Trägheit verlangsamt die Geschwindigkeit



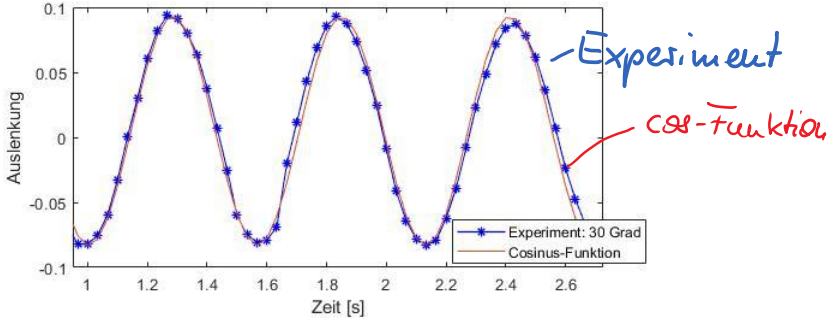
- $I = \int r^2 dm$

  Masse geht nicht direkt ein

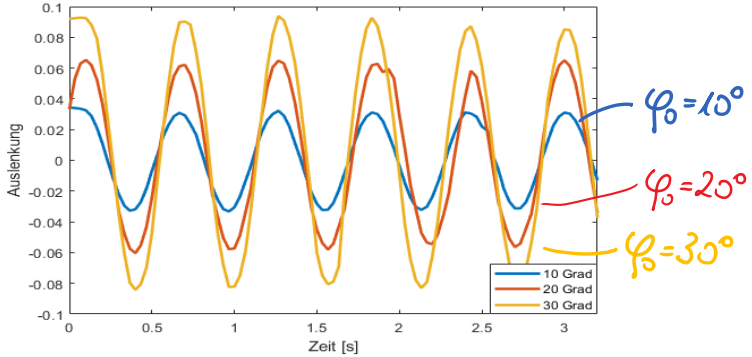
- $T \sim \frac{1}{\sqrt{D_T}}$

  großes rücktreibendes Drehmoment
  → schnelle Schwingung

- Zeitabhängigkeit $\cos(\omega t + \varphi)$



- $\varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$: für unterschiedliche φ_0



Schwingungen und Energie

Schwingungen – Energie

- $E_G = E_{Trans} + E_{Rot} + E_{Pot} = const.$

  $\frac{1}{2}mv^2$ $\quad$ $\frac{1}{2}I\omega^2$ $\quad$ potentielle Energie (zb. $mg\cdot h$; $\frac{1}{2}Dx^2$)

  (ohne Reibung, Wärme)

- Energieerhaltung: Gesamtenergie E_G konst.

  $$\frac{dE_G}{dt} = 0$$

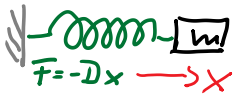
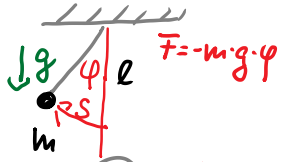
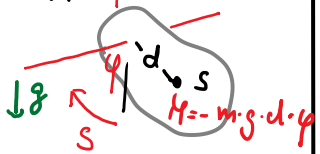
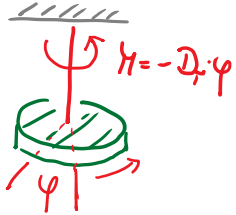
- Arbeit $\Delta W = -\int \vec{F}\,d\vec{r} = \Delta E_G$

↳ gesucht: Energie in Schwingung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{Bewegungsgl.}$$

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) \quad \text{Lösung}$$

$\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$

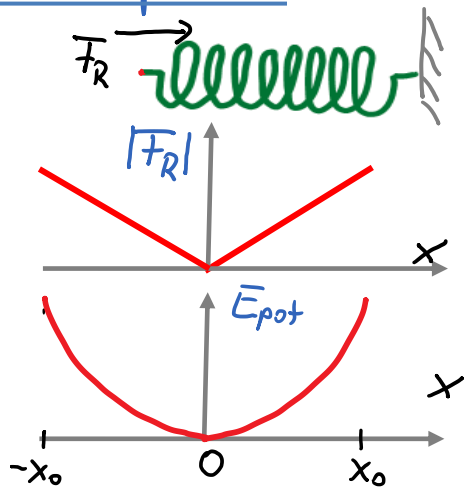
Federpendel		$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Fadenpendel (mathem. P.)		$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
Physik. Pendel		$\omega = \sqrt{\frac{m\cdot g\cdot d}{I}}$
Torsions-Pendel		$\omega = \sqrt{\frac{D_T}{I}}$

Energie-Bilanz: Federpendel

- Hook'sches Gesetz:

$F_R = -D \cdot x$

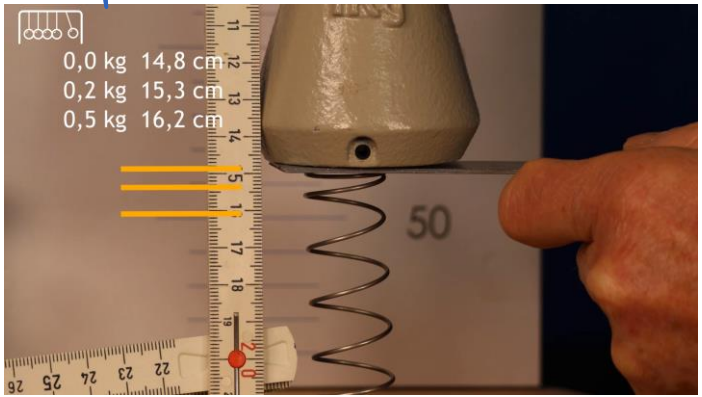
$x = 0$ Ruhelage



↳ $E_{pot} = -W = \int_0^x F \cdot dx$

$E_{pot} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$

Experiment:



$E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2$

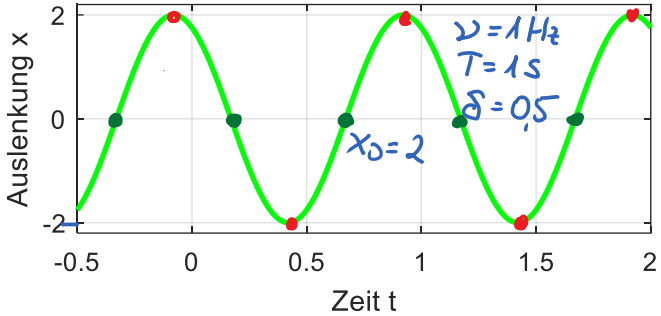
$\downarrow$

$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

$\downarrow$

$E_{pot} = m g h$

Position $x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$



- $E_G(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = const.$ zu jeder Zeit

- Umkehrpunkt: $x = \pm x_0$

↳ $v(x = \pm x_0) = 0 \rightarrow E_{kin} = 0$

↳ $E_{pot} = \frac{1}{2} D x_0^2$

- Nullpunkt: $x = 0$

↳ $\rightarrow E_{pot} = 0$

↳ v maximal $\rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$

Berechnung:

$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ⊕

$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = -\underbrace{\omega \cdot x_0}_{= v_{max}} \cdot \sin(\omega t + \delta)$

- $E_G = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2$ zu jeder Zeit

also $E_G(x = x_0) = \frac{1}{2} D x_0^2$ ⊛

$E_G(x=0) = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$

mit ⊕ $= \frac{1}{2} m \frac{D}{m} \cdot x_0^2 = \frac{1}{2} D x_0^2$ =

↳ Wechsel zwischen E_{pot} & E_{kin}

- zu jeder Zeit

$E_G = \frac{1}{2} D x_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2$

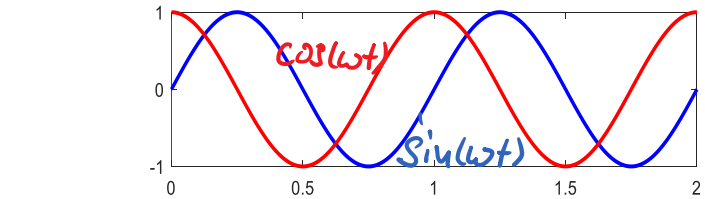
↑ mit ⊛

$= \frac{1}{2} m x_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t + \delta)$

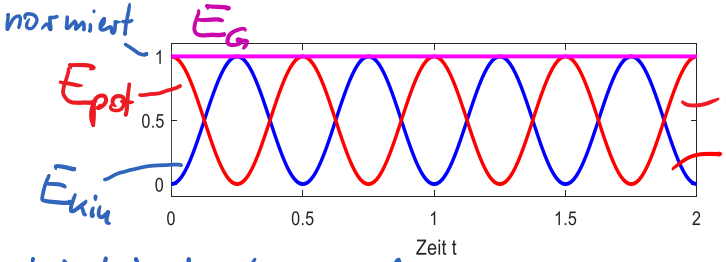
mit $D = \omega^2 \cdot m$ $+ \frac{1}{2} D \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\omega t + \delta)$

→ $\frac{1}{2} D x_0^2 = \underbrace{\frac{1}{2} D x_0^2 \cdot \underbrace{[\sin^2(\omega t + \delta)}_{E_{kin}} + \underbrace{\cos^2(\omega t + \delta)]}_{E_{pot}}}_{=1}$

- allgemein gilt für jedes α: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,



für $\delta = 0$



↳ Wechsel zwischen E_{pot} & E_{kin};
Summe immer $E_G = \frac{1}{2} D x_0^2$

Beispiel: Federpendel mit Masse $m = 1{,}5\,kg$

gemessen: $x_0 = 8\,cm$, Schwingungsdauer $T = 2\,s$

gesucht: Gesamtenergie, v_{max}

Lösung: $E_G = \frac{1}{2} D x_0^2$

- D kann berechnet werden aus

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

$\hookrightarrow$ $D = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m$

also $E_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m \cdot x_0^2$

hier: $E_G = 0{,}047\,J$

- aus $E_G = \frac{1}{2} m v_{max}^2$

$\hookrightarrow$ $v_{max} = \sqrt{\frac{2 E_G}{m}} = \frac{2\pi}{T} x_0$

hier $v_{max} = 0{,}25\,\frac{m}{s}$

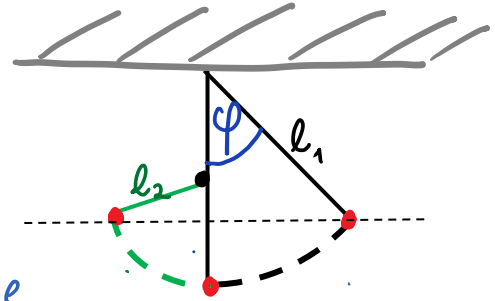
Allgemein:

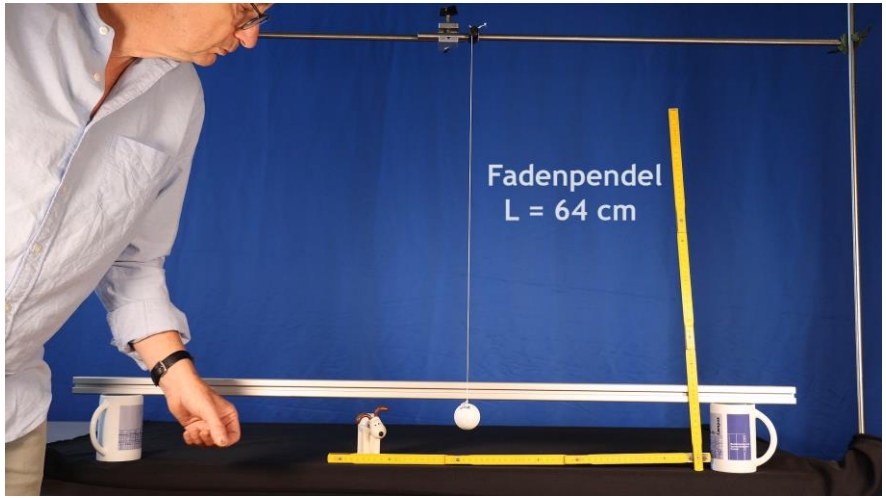
Energie $\sim$ Amplitude^2

$\sim \omega^2 \sim \frac{1}{T^2}$

Energie Fadenpendel: Experiment

- Änderung der Fadenlänge
  ↳ Schwingung auf gleiche Höhe
  ≡ gleiches E_{pot}





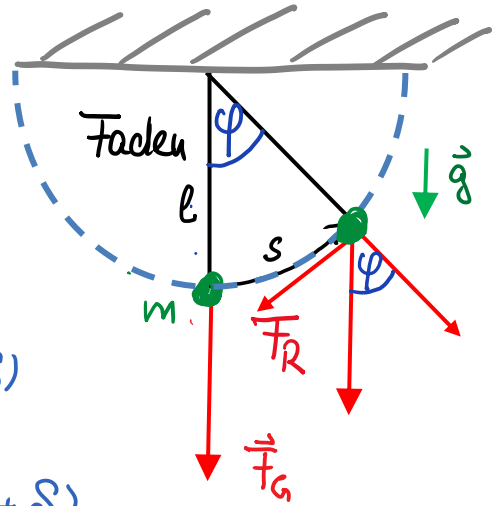
Beobachtung: Pendelhöhe unabh. von Fadenlänge l bzw. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

↳ Energieerhaltung

Energiebilanz Fadenpendel:

$E_G = E_{kin} + E_{pot}$

Wechsel



- für kleines φ

↳ $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$

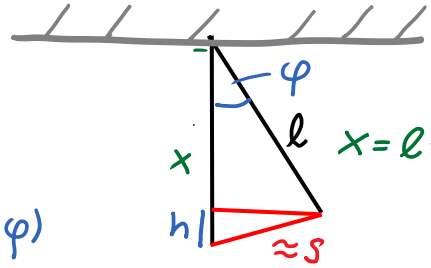
mit $\varphi = \frac{s}{\ell}$

$s = s_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$

$\omega = \sqrt{g/\ell}$

- $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ $\quad v = \frac{ds}{dt} = -\omega \cdot s_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$

$= \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell} \cdot s_0^2 \cdot \sin^2(\omega t + \delta)$



$x = \ell \cdot \cos\varphi$

- $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

$= mg(\ell - x)$

$= mg\ell(1 - \cos\varphi)$

mit $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ für kleines φ (Formelsammlung)

↳ $E_{pot} = m \cdot g \cdot \ell \frac{1}{2} \varphi^2$ $\quad$ mit $\varphi = \frac{s}{\ell}$

$= \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell} \cdot s^2$

$= \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell} \cdot s_0^2 \cdot \cos^2(\omega t + \delta)$

Gesamtenergie also

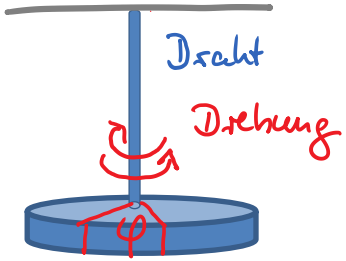
$E_G = \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell} \cdot s_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell} s_0^2 \underbrace{(\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta))}_{=1}$

$= \frac{1}{2} m \frac{g}{\ell} \cdot s_0^2$

Energiebilanz: Torsionspendel

↳ $$\boxed{M = I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D_T \cdot \varphi}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)}$$



mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D_T}{I}}$ ← Trägheitsmoment

$E_{Rot} = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ mit Winkelgeschw. $\frac{d\varphi}{dt}$

$M = -D_T \varphi$

$E_{Pot} = -\int_0^{\varphi} M \, d\varphi = +\int_0^{\varphi} D_T \varphi \, d\varphi = +\frac{1}{2} D_T \varphi^2$

$E_G = \frac{1}{2} I \varphi_0^2 \cdot \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} D_T \varphi_0^2 \cos^2(\omega t + \delta)$

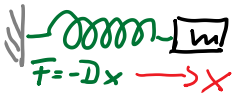
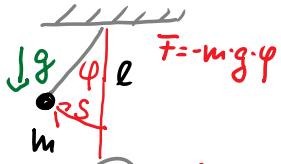
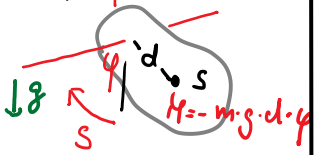
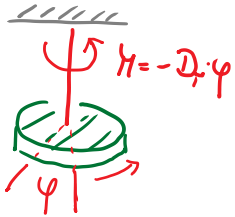
$= \frac{1}{2} I \frac{D_T}{I} \varphi_0^2 \sin^2(\omega t + \delta) +$ "

↳ $E_G = \frac{1}{2} D_T \varphi_0^2 \left[\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)\right]$

$= \frac{1}{2} D_T \varphi_0^2$

Schwingungen

$E_{kin} \rightleftarrows E_{pot}$

Federpendel		$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Fadenpendel (mathem. P.)		$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
Physik. Pendel		$\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}$
Torsions-Pendel		$\omega = \sqrt{\frac{D_T}{I}}$

- Energie $\sim$ Amplitude^2 $\sim \omega^2 \sim \frac{1}{T^2}$ } gilt für Schwingungen & Wellen

Beispiel: Schall

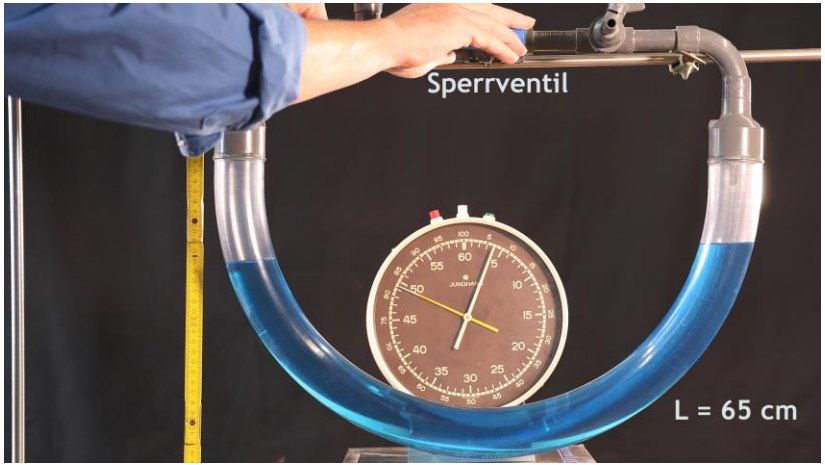
- Reibung → Energieverlust
  → gedämpfte Schwingung

Wasser-Pendel

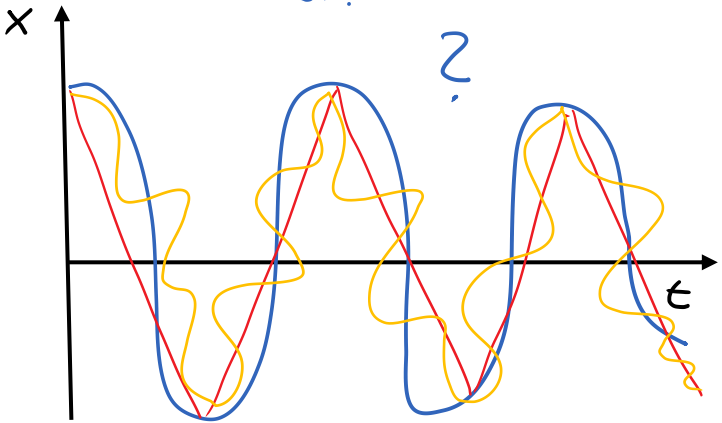
schwingende
Wassersäule

Schwingende Wassersäule

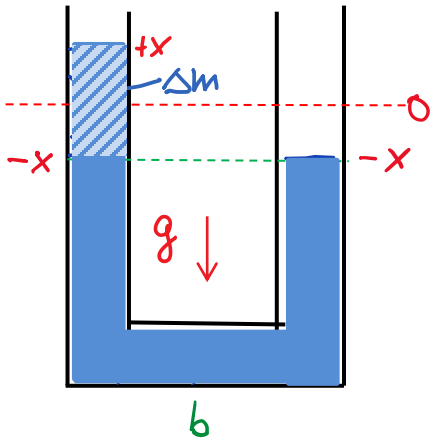
Experiment:



gesucht: • Schwingungsdauer
• Bewegungsgleichung
• Abhängigkeiten:
- Wasser, Alkohol... Dichte ρ
- Länge L, Querschnitt
- sonst?



Bewegungsgleichung & Lösung



- Wassersäule
  Länge $L = 2 \cdot h + b$
  Querschnitt $A < L$
  Masse $m = \rho \cdot A \cdot L$ (Dichte)
- Oberfläche schwingt um $x = 0$
- Reibung wird vernachlässigt

Ansatz: Bewegungsgleichung

- Gewichtskraft F_G von Δm drückt auf die Wassersäule
  ↳ Beschleunigung des gesamten Wassers
  ↳ Trägheit schiebt Säule zur anderen Seite

- $F_G = -\Delta m \cdot g$
  nach unten, wenn x nach oben

  mit $\Delta m = \rho \cdot 2x \cdot A$
  ↳ $F_G = -\rho \cdot 2x \cdot A \cdot g$

- F_G beschleunigt die Masse der Wassersäule
  $m = \rho \cdot A \cdot L$
- die Geschw. und Beschleunigung ist im gesamten Wasser gleich, also auch von x
- $F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_G$

$$\rho \cdot A \cdot L \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -\rho \cdot 2x \cdot A \cdot g$$

$$\boxed{L \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -2g \cdot x}$$

Bewegungsgleichung

$$\boxed{L \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -2g \cdot x}$$

Bewegungs-gleichung

Lösung $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$ — Phase

Amplitude

$\omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$

mit $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$ bzw $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$

- Überprüfung:

$$\frac{dx}{dt} = (-\omega) \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (-\omega^2) \cdot x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta) = (-\omega^2) \cdot x$$

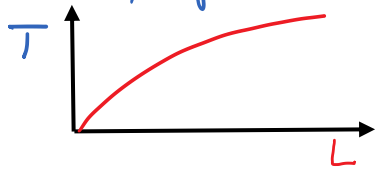
erfüllt B.-Gl, wenn $\omega^2 = \frac{2g}{L}$

- $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta)$ ebenfalls Lösung
- Phase δ abh. von Zeitnullpunkt
- gilt ohne Reibung

- $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

$\rightarrow$ ω unabh. von ρ (Material)!
unabh. von Querschnitt, Luftdruck etc.

$\rightarrow$ $\omega \sim \sqrt{\frac{1}{L}}$

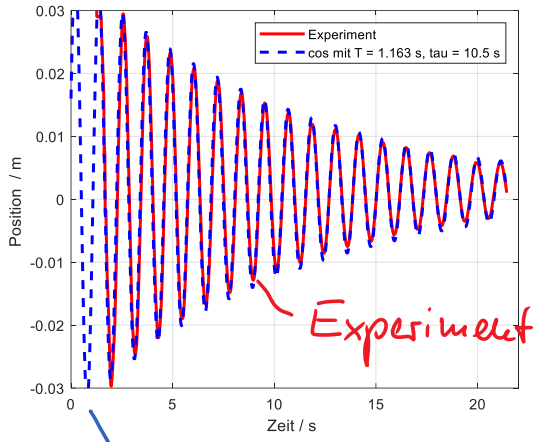


↳ • harmonische Schwingung!

- Reibung — Dämpfung der Amplitude

$$x = x_0 \cdot \underbrace{e^{-t/\tau}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

Vergleich: Experiment – Theorie



$$x = 0{,}036 \cdot \cos(\omega \cdot t - 20) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit $\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$ $T = 1{,}163\,s$

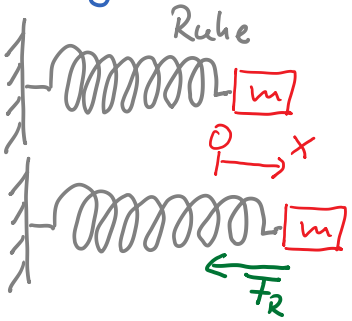
$\tau = 10{,}5\,s$

- experimentell: $T_{exp} = 1{,}163\,s$
- aus Theorie: $T = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}$

mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, $L = 0{,}65\,m$

$T = 1{,}14\,s$, gute Übereinstimmung mit Exp.

Vergleich: Federpendel



Kraft in Feder

$$F_R = -D x$$

rücktreibend

Auslenkung

Federkonstante

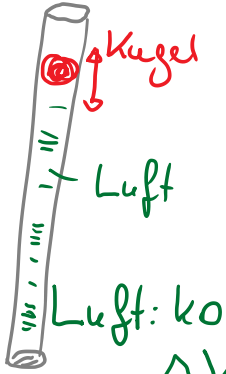
↳ Bewegungsgleichung:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D x$$

mit Lösung $x = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

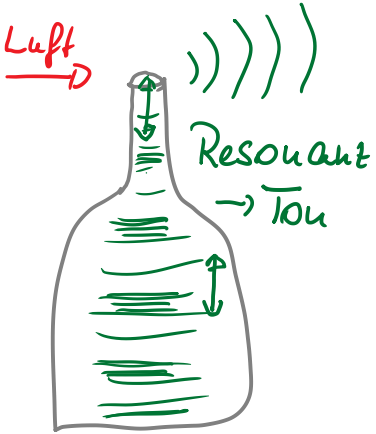
Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Vergleich:



Luft: kompressibel

ΔV

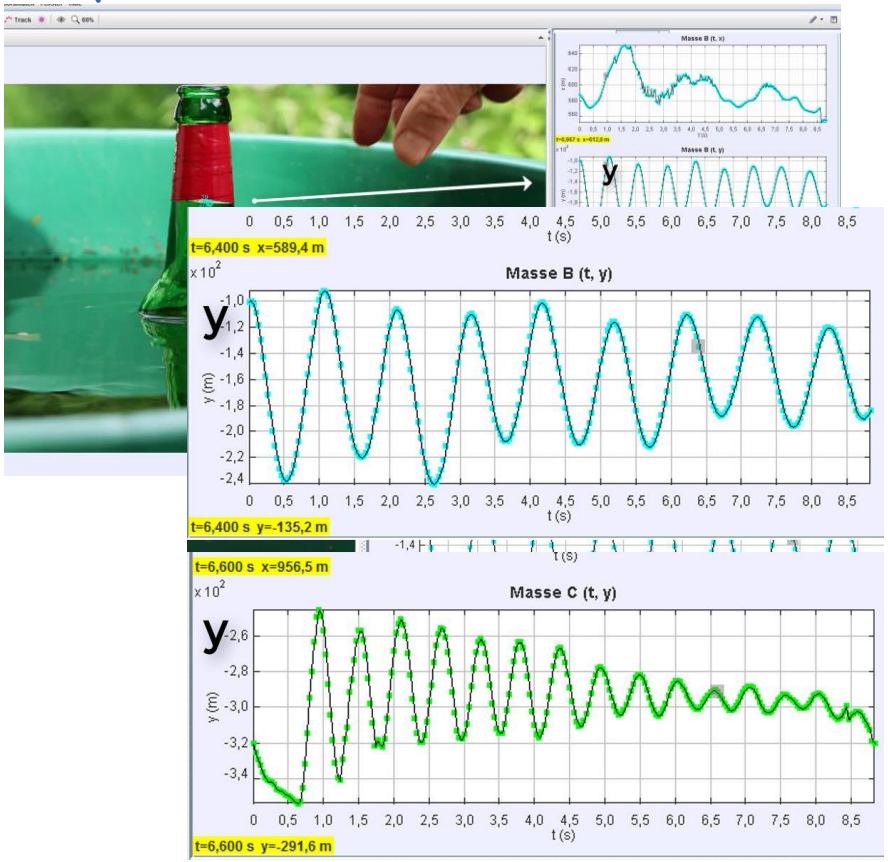


- Wasser: nicht kompressibel!
  Trägheit führt zur Schwingung

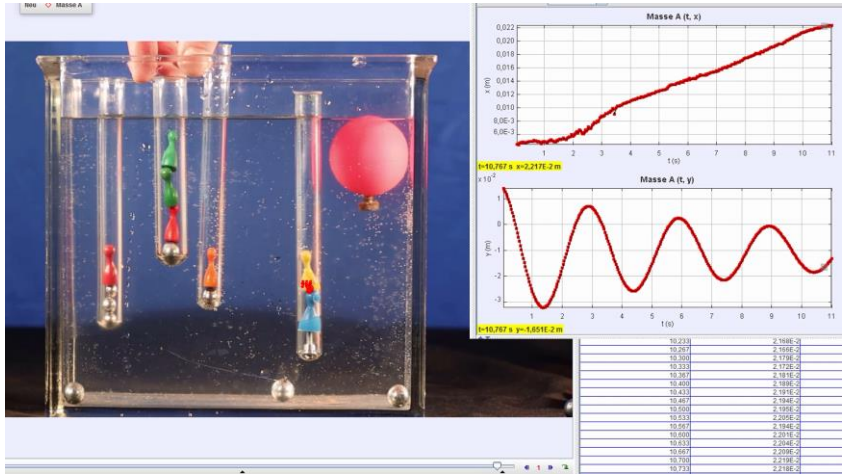
Flaschen-Pendel

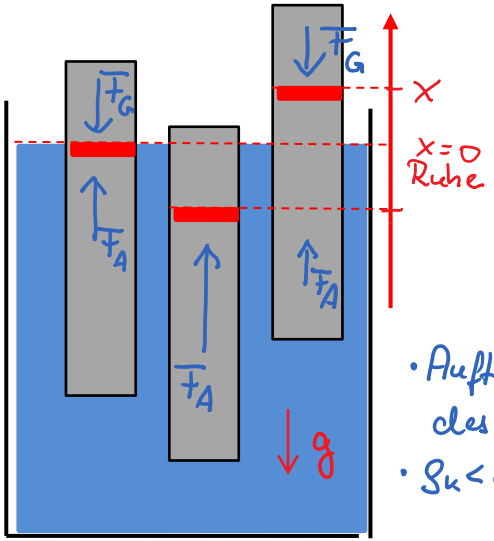
Flaschenpendel

· Experiment / Beobachtung



· für zylinderförmige Körper: Querschnitt konstant





- Körper:
  Länge L
  Querschnitt A
  Dichte ρ_K
  $\hookrightarrow F_G = \rho_K \cdot A \cdot L \cdot (-g)$
- Auftrieb F_A: Gew.-Kraft des verdrängten Volumens
- $\rho_K < \rho_W$: Körper schwimmt

- $x=0$: Ruhelage $F_G = F_A$
- für $x>0$: $F_G > F_A$
  für $x<0$: $F_G < F_A$

$F_\Delta = F_G - F_A$
diese Kraft bewegt den Körper ... und das Wasser

$\hookrightarrow F_\Delta = \rho_W \cdot A \cdot x \cdot (-g)$
nach unten

und damit läßt sich die Bewegungsgl. schreiben:

$$m_K \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -g \cdot \rho_W \cdot A \cdot x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} \sim -x \quad \nabla \; 0}$$

mit $m_K = \rho_K \cdot V_K = \rho_K \cdot A \cdot L$

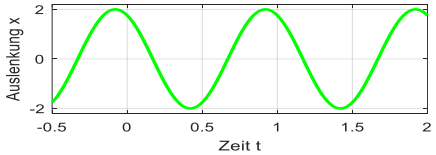
$$\hookrightarrow \rho_K A \cdot L \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -g \cdot \rho_W \cdot A \cdot x$$

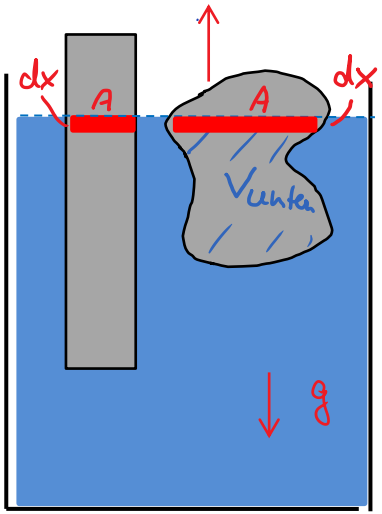
$$\hookrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -g \frac{\rho_W}{\rho_K} \cdot \frac{1}{L} \cdot x}$$ Bew.-Gl

und der Lösung:

$$\boxed{x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{g \frac{\rho_W}{\rho_K} \cdot \frac{1}{L}}}$$

Körper schwingt harmonisch!



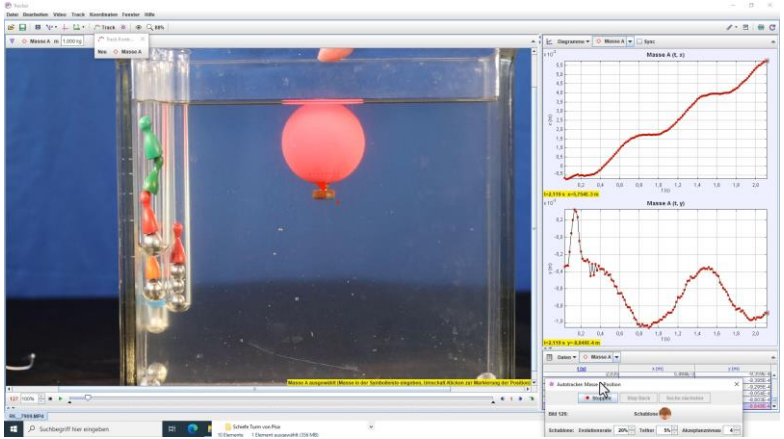


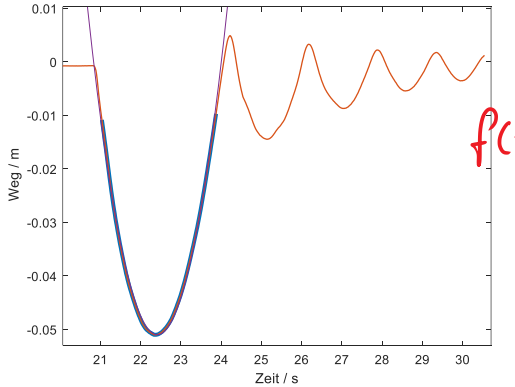
- Querschnitt variabel
  ↳ F_A ändert sich abh. von A mit x

↳ $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} \cancel{x} - x}$

↳ also keine cos-Funktion als Lösung

im Experiment





$f(t) \neq \cos(\omega t + \delta)$

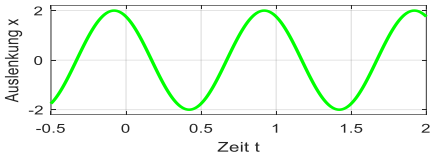
Parabel ?!

Flaschenpendel

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\,\frac{\rho_W}{\rho_K}\cdot\frac{1}{L}\cdot x$$

$$x = x_0\cdot\cos(\omega\cdot t+\delta)$$

mit $\omega = \sqrt{g\,\frac{\rho_W}{\rho_K}\cdot\frac{1}{L}}$

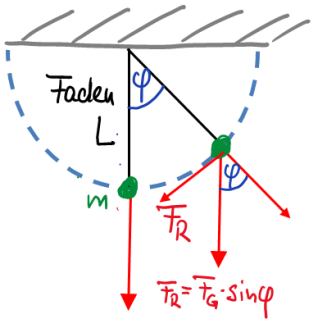


Fadenpendel

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\varphi$$

$$\varphi(t) = \varphi_0\cdot\cos(\omega t+\delta)$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$



$$\varphi = \frac{s}{L}$$

Harmonische Schwingungen

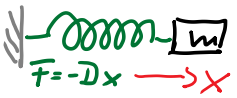
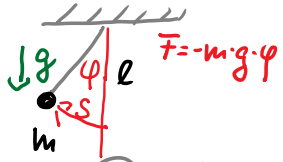
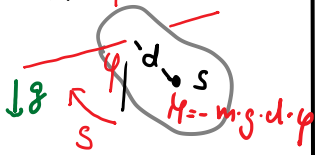
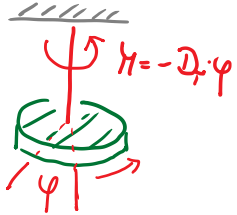
- Kreisbewegung
- Bewegungsgleichung
  cos-, sin-, exp-Lösung

Harmonische Schwingungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{Bewegungsgl.}$$

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) \quad \text{Lösung}$$

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

Federpendel		$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Fadenpendel (mathem. P.)		$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$
Physik. Pendel		$\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}$
Torsions-Pendel		$\omega = \sqrt{\frac{D_T}{I}}$

hier:

- Harmonische Schwingungen und Kreisbewegung

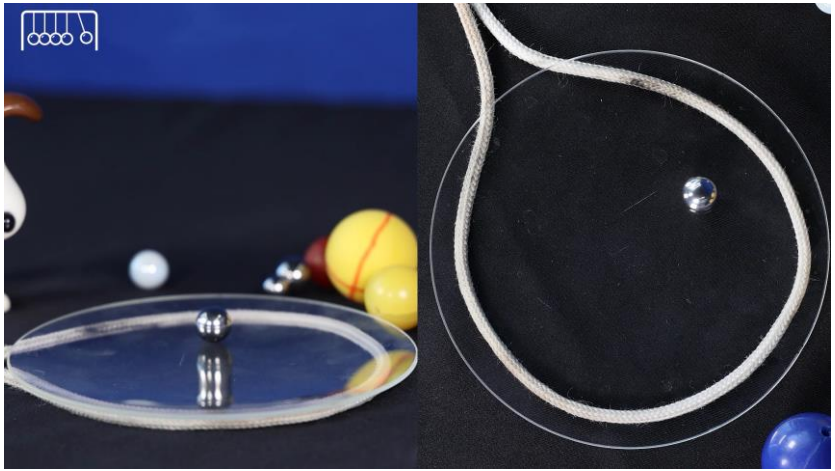
- Lösungsansatz für Bewegungsgleichung

  a) $x = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$

  b) $x = x_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

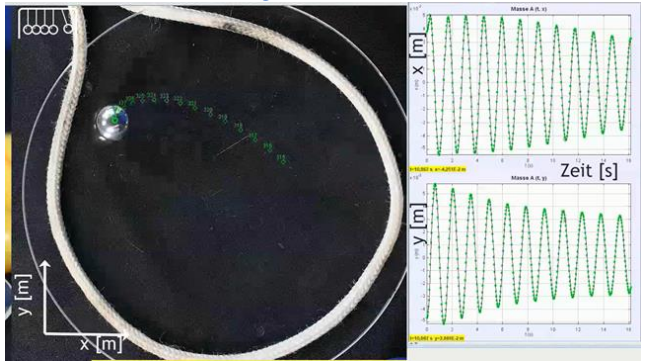
Kreisbewegung: Zerlegung in x & y

- rollende Kugel auf gekrümmter Oberfläche (kugelförmig)

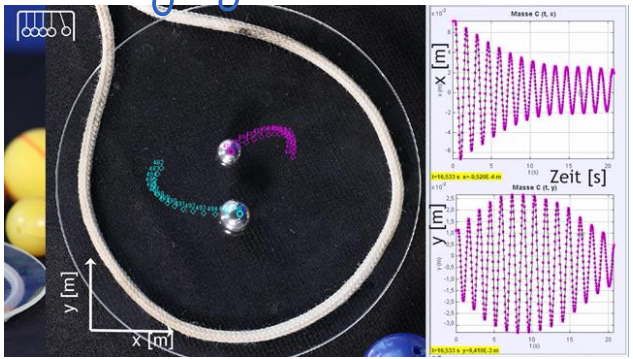


- Schwingungsdauer
  - unabh. von m
  - unabh. von Auslenkung
  - (wie beim Fadenpendel)

↳ Bewegung: Sinus bzw. Cosinus

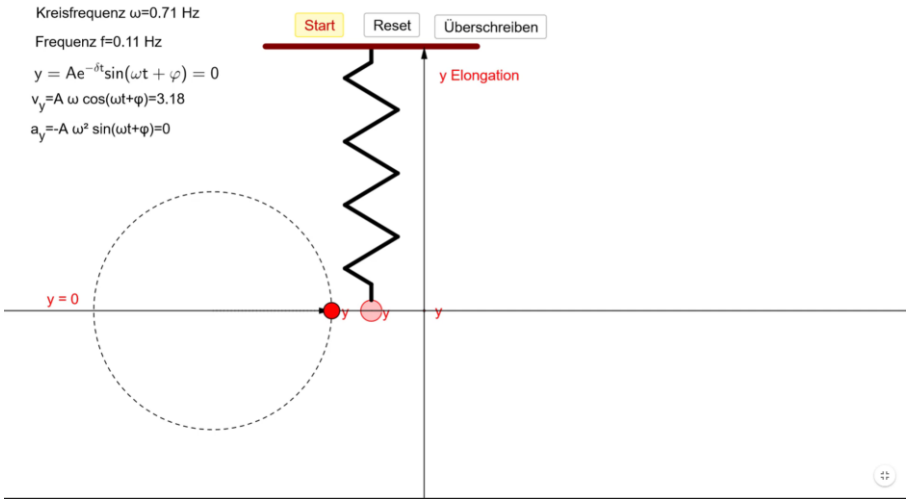


- gedämpft
- Schwingungsdauer unabh. von m, Amplitude, Radius



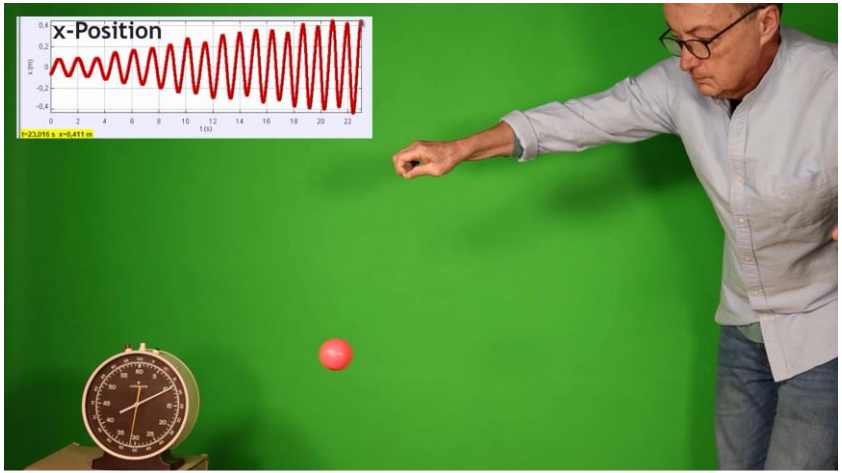
Kreisbewegung: Projektion

- Simulation:



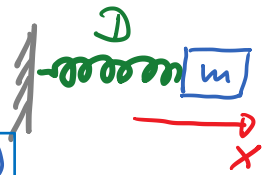
Quelle: Otto Dolinsek, https://www.geogebra.org/m/uWFEv44t

- Kugel an Faden: Kreisbewegung



a) Lösungsansatz: cos-, sin-Funktion

- Bew.gl.: $\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx}$ ⊛



- Ansatz: $\boxed{x(t = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)}$

ist Lösung mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$, denn

$$\frac{dx}{dt} = v = -\omega \cdot x_0 \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -\omega^2 \cdot x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

$$= -\omega^2 \cdot x$$

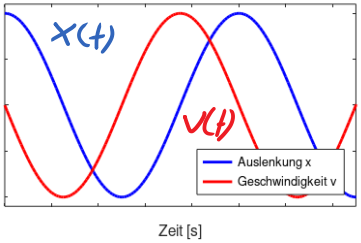
aus ⊛: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m} x$ $\Big\}$ $\omega^2 = \frac{D}{m}$

- Bestimmung von Phase δ aus Anfangsbedingung

Beispiel: wenn für $t=0$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ v(t=0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Anfangsbedingung



↳ $x(t=0) = x_0 = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$

$v(t=0) = v_0 = 0 = -\omega x_0 \sin(\omega t + \delta)$

↳ nur möglich, wenn $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

Einschub: Euler'sche Formel:

- e – Euler'sche Zahl

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$e = 2{,}718\dots$$

- $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$

  für $y \in \mathbb{R}$

  $i = \sqrt{-1}$

- $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

  $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

Eulersche Formeln

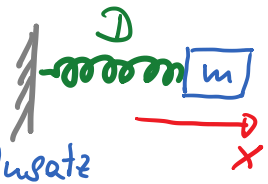
Hyperbelfunktionen:

- $\sin(iy) = \frac{1}{2i}\left(e^{-y} - e^{y}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right) = i\sinh(y)$

- $\cos(iy) = \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right) = \cosh(y)$

b) Lösungsansatz: Exponentialfunktion

• Bew.-gl.: $\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx}$ ⊛



• allgemeine Lösung durch Ansatz

$\boxed{x(t) = x_0 e^{\lambda t}}$ mit Konstante λ

↳ $\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x_0 e^{\lambda t}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 \cdot x_0 e^{\lambda t}$

· Einsetzen in ⊛:

$$m \cdot \lambda^2 \cdot x_0 e^{\lambda t} = -D x_0 e^{\lambda t}$$

↳ $\underline{m\lambda^2 = -D}$ charakteristische Gleichung

ergibt: $\lambda^2 = -\frac{D}{m}$

mit zwei Lösungen: $\lambda = \pm\sqrt{-\frac{D}{m}}$

$\lambda = \pm\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot i$ mit $i = \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit

↳ zwei Lösungen für $x(t)$

$x_1(t) = A \cdot e^{i\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t}$

$x_2(t) = B \cdot e^{-i\sqrt{D/m} \cdot t}$ mit Konstanten A, B

allgemeine Lösung:

⊕ $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cdot e^{+i\omega \cdot t} + B \cdot e^{-i\omega t}$

mit $\omega = \sqrt{D/m}$

• Amplituden A und B werden bestimmt aus den Anfangsbedingungen $x(t=0)$ und $v(t=0)$

i) für Anfangsbedingung $\left.\begin{array}{l} x(t=0)=0 \\ v(t=0)=v_0 \end{array}\right\}$

- Einsetzen in allgemeine Lösung ⊕

$$x(t=0)=0=A\cdot \underbrace{e^{i\omega t}}_{=1}+B\cdot \underbrace{e^{-i\omega t}}_{=1}\Big|_{t=0}=A+B$$

↳ $B=-A$

- $v(t=0)=v_0=\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}$

$$=i\omega A e^{+i\omega 0}-i\omega B e^{-i\omega 0}$$
$$=i\omega A-i\omega B$$
$$=2i\omega A$$

↳ $A=\frac{v_0}{2i\omega}$ $\quad B=-\frac{v_0}{2i\omega}$

und damit die Lösung

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\cdot\underbrace{\frac{1}{2i}\left(e^{+i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)}_{=\sin(\omega t)}$$

Eulersche Formeln

↳ spezielle Lösung für $x(t=0)=0$, $v(t=0)=v_0$

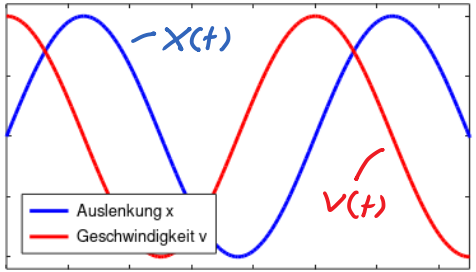
$$x(t)=\underbrace{\frac{v_0}{\omega}}_{=x_0}\sin(\omega t) \qquad \omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$$

↑ ohne Phase δ

$\sin(\omega t)=\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$

- durch Anfangsbed. sind die Werte für x_0 und δ festgelegt.

↳ $v(t)=v_0\cdot\cos(\omega t)$



normiert

ii) für Anfangsbedingung $\left.\begin{array}{l} x(t=0)=x_0 \\ v(t=0)=0 \end{array}\right\}$

· Einsetzen in allgemeine Lösung ⊕

$$x(t=0)=x_0=A\cdot \underbrace{e^{i\omega t}}_{=1}+B\cdot \underbrace{e^{-i\omega t}}_{=1}\Big|_{t=0}$$

$$x_0=A+B$$

$$v(t=0)=0=\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}$$

$$=i\omega A e^{+i\omega 0}-i\omega B e^{-i\omega 0}$$

$$=i\omega A-i\omega B=i\omega(A-B)$$

↳ $A=B$

und daher: $x_0=2A=2B \rightarrow A=B=\frac{x_0}{2}$

und damit die Lösung

$$x(t)=x_0\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{+i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)}_{=\cos(\omega t)}$$

Eulersche Formeln

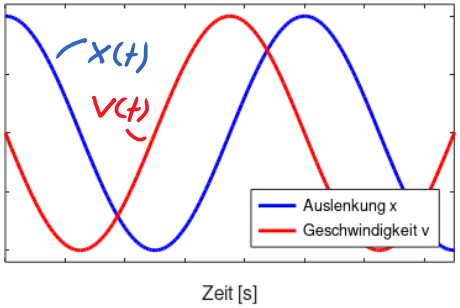
↳ spezielle Lösung für $x(t=0)=0$, $v(t=0)=v_0$

$$x(t)=x_0\cdot\cos(\omega t) \qquad \omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$$

↑ ohne Phase δ

und damit

$$v(t)=-\omega x_0\sin(\omega t)$$



normiert

iii) andere Anfangsbed. → andere spezielle Lösungen

Anmerkung: die Bewegung (die Physik, die Welt) ändert sich nicht, wenn die Uhr falsch geht

Zusammenfassung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$ Bewegungsgl.

- Lösungsansatz

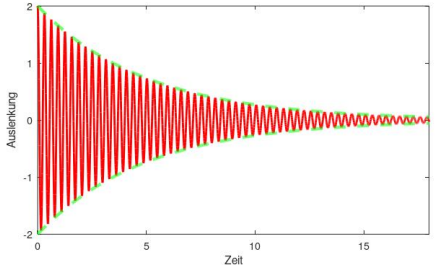
a) $x = x_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$

b) $x = x_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

} gleichwertig

aber:

- für gedämpfte und erzwungene Schwingungen
  ↳ nur $x = x_0 e^{\lambda \cdot t}$ liefert Lösung

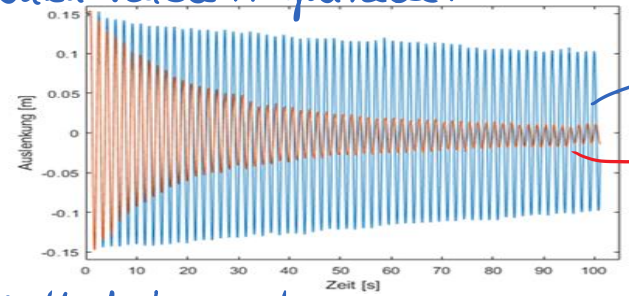


Gedämpfte Schwingungen

Gedämpfte Schwingungen: Experimente

- Fadenpendel mit „Bremse"

Abnehmende Amplitude:



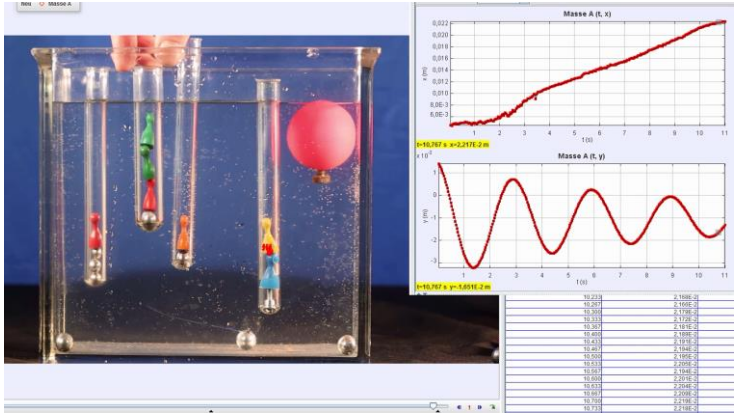
Kugel

Kugel mit Papier

- zeitlich begrenzt
- keine cos-, sin-Fkt.
- Amplitude nimmt ab, Energieverlust

Beispiel: „Flaschenpendel"

- Reibung im Wasser



Ansatz zur mathem. Beschreibung

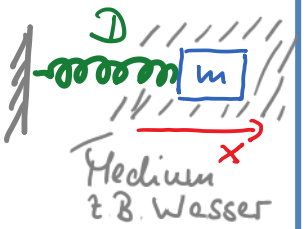
- Bewegungsgleichung

↳ Differentialgleichung
  - Lösung mit Exponentialfunktion
  - nicht mit cos oder sin
  - komplexe Zahlen notwendig

- Vorarbeit:
  siehe: „Harmonische Schwingungen"

Gedämpfte Schwingungen: mathematisch

- Federkraft $F_R = -D \cdot x$ (Hook-G)
- Dämpfung durch Reibung
  ↳ Bremskraft F_D
  Annahme $F_D \sim v = \frac{dx}{dt}$



↳ $$\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-Dx}_{\text{Federkraft}} \underbrace{- b\frac{dx}{dt}}_{\text{Bremskraft } (-)}}$$ Bewegungsgl.

oder

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \cdot \frac{dx}{dt}} \quad \triangle$$

mit $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ und $2\gamma = \frac{b}{m}$

für ungedämpfte Schw ↑ Dämpfungskonst.

formal: Differentialgleichung 2. Ordnung

- Lösungsansatz: $x(t) = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$ ← Konstanten
- Einsetzen in $\triangle$ → Bestimmungsgl.

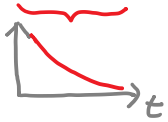
$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit zwei Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

und der allgemeinen Lösung

$$\otimes \quad \boxed{x(t) = e^{-\gamma t}\left[c_1 \cdot e^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\cdot t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\cdot t}\right]}$$



Konstanten aus Anfangsbedingungen

- Unterscheidung für
  a) schwache Dämpfung $\gamma < \omega_0$
  b) starke Dämpfung $\gamma > \omega_0$
  c) aperiodischer Grenzfall $\gamma = \omega_0$

a) schwache Dämpfung $\gamma < \omega_0$

- mit Abkürzung $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 > 0$

wird $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{-\omega^2} = -\gamma \pm i\omega$

und $x(t) = e^{-\gamma \cdot t} \cdot (c_1 \cdot e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$

aus Anfangsbed.

i) spezielle Lösung für Anf.-Bed. $x(t=0)\, x_0$, $v(t=0) = 0$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x(t=0) = x_0 = 1 \cdot (c_1 + c_2) \\ v(t=0) = 0 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -\gamma(c_1 + c_2) + i\omega c_1 - i\omega c_2 \end{cases}$$

$$0 = -\gamma x_0 + i\omega(c_1 - c_2)$$

c_1 & c_2 sind komplex $\rightarrow$ Gl. kann nur erfüllt sein, wenn $Re(c_1 - c_2) = 0$

$\hookrightarrow c_1 = c_2$

$\hookrightarrow c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$

- Realteil von $x(t)$ wird somit

$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot x_0 \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} e^{i\omega t} + \tfrac{1}{2} e^{-i\omega t}\right)}_{= \cos(\omega t)}$$

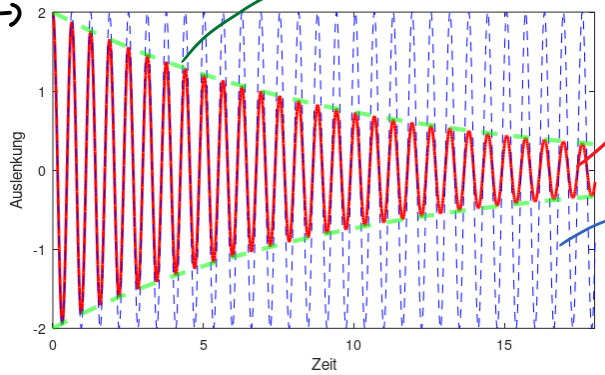
Eulersche Formeln

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t)}$$

Amplitude

exp-Abnahme mit γ

Schwingung mit ω



gedämpft

ungedämpft

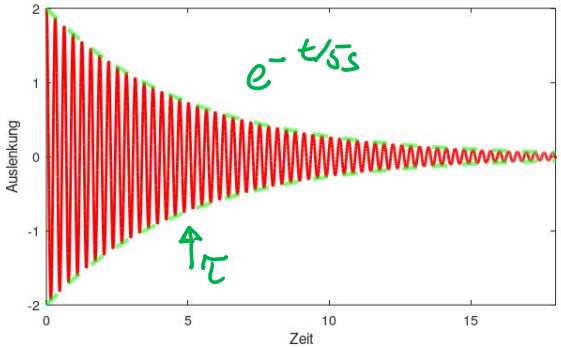
Beispiel: $\omega_0 = 20\,\mathrm{Hz}$ $\quad \gamma = 0{,}2\,\frac{1}{s}$

↳ $e^{-\gamma t} = e^{-t/\tau}$

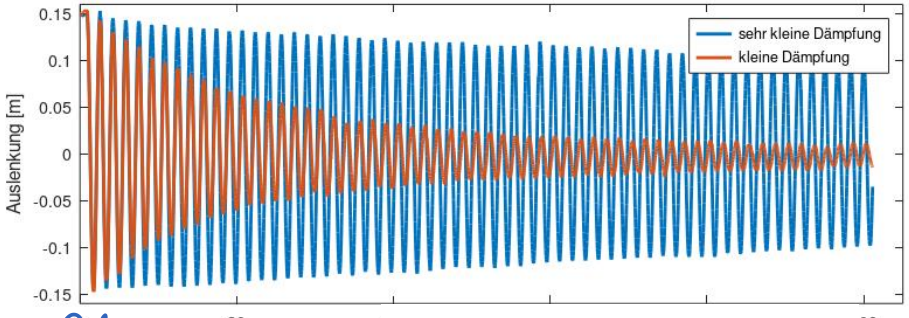
mit Zeitkonstante $\tau = \frac{1}{\gamma} = 5\,s$, d.h. nach 5s Abfall der Einhüllenden auf $\frac{1}{e} = 0{,}37$

↳ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{20^2 - 0{,}04}\,\mathrm{Hz} = 19{,}999\,\mathrm{Hz}$

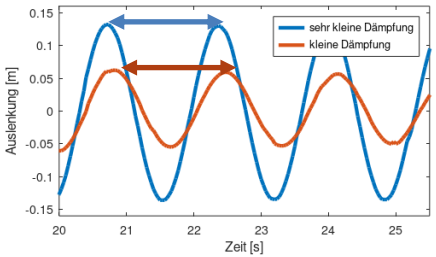
also ω nur $5 \cdot 10^{-5}$ kleiner als ω_0!



· Experiment: Fadenpendel, sehr kleine, kleine Dämpfung

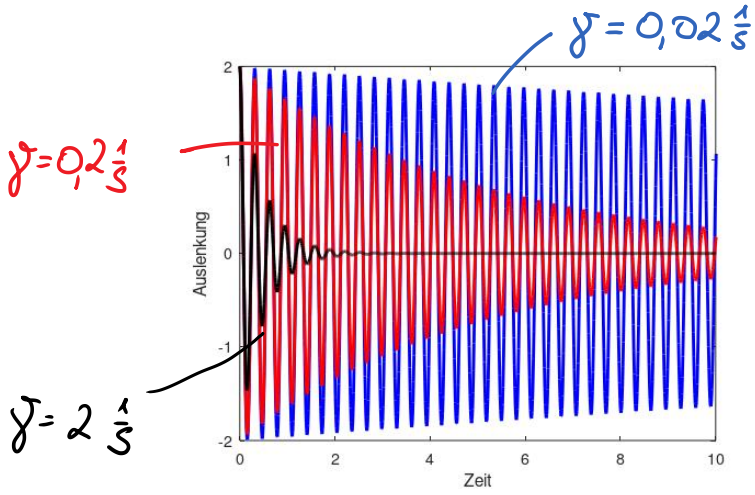


· Schwingungsdauer ≈ gleich



Einfluß von γ

für $\omega_0 = 20\,Hz$, immer $\gamma < \omega_0$



- andere Anfangsbedingungen
  → andere Lösungen

b) starke Dämpfung: $\gamma \gg \omega_0$

aus der Bestimmungsgl.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit zwei Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-\gamma}_{\text{reell}} \pm \alpha \qquad \text{mit } \alpha = \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \omega_0^2}_{>0}}$$

↳ allgem. Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}\right) \qquad (*)$$

Konstanten aus Anfangsbedingungen

i) Anf.-Bedingung $x(t=0)=0 \quad v(t=0)=v_0$

aus $(*)$ wird

$$x(t=0) = 0 = c_1 + c_2 \longrightarrow c_1 = -c_2$$

und

$$v(t=0) = v_0 = -\gamma \cdot e^{-\gamma 0}\underbrace{\left(c_1 e^{\alpha 0} + c_2 e^{-\alpha 0}\right)}_{=0}$$

$$+ e^{-\gamma 0} \cdot \alpha\left(c_1 e^{\alpha 0} - c_2 e^{-\alpha 0}\right)$$

$$= \alpha\left(c_1 - c_2\right)$$

$$= 2\alpha c_1$$

↳ $c_1 = \frac{v_0}{2\alpha} \qquad c_2 = \frac{-v_0}{2\alpha}$

und damit

$$x(t) = \frac{v_0}{2\alpha} e^{-\gamma t} \cdot \underbrace{\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)}$$

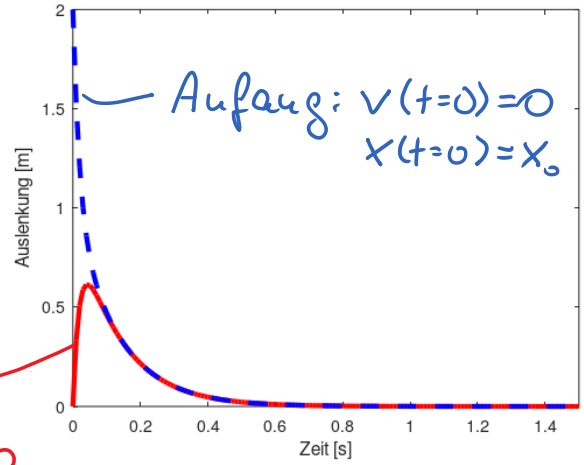
$$= \frac{v_0}{\alpha} e^{-\gamma t} \cdot \sinh(\alpha t)$$

ii) Anfangsbed. $x(t=0)=x_0$ $v(t=0)=0$

ähnliche Rechnung liefert

$$x(t)=x_0\, e^{-\gamma t}\cdot \cosh(\alpha t)$$

Beispiel: für $\omega_0=20\,Hz$ $\gamma=30\,\frac{1}{s}$



Anfang:
$x(t=0)=0$
$v(t=0)=v_0$

↳ Zeitverlauf bei starker Dämpfung:
- ohne „Schwingung"
- eine Auslenkung, die exponentiell gegen 0 geht

→ Kriechfall

c) aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$

- Anpassung der Dämpfung an die Kreisfreq. ω_0 im ungedämpften Fall:

  ↳ $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma$

  also $\lambda_1 = \lambda_2$: nur eine Lösung

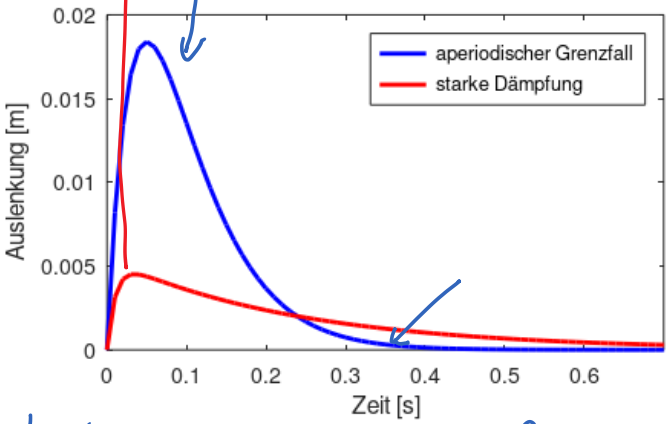
  → siehe Literatur

- Rechnung für Anfangsbed. $x(t=0)=0$, $v(0)=v_0$ liefert $x(t) = v_0 \cdot t \cdot e^{-\gamma t}$

Beispiel: $\omega_0 = 20$ Hz

starke Dämpfung: $\gamma = 50\ \frac{1}{s}$

aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$



- starker / schnellerer Abfall für aperiod. Grenzfall
- „Überdämpfung" für $\gamma > \omega_0$

  ↳ Anpassung der Dämpfung

Energieverlust

- gedämpfte Schwingung

$$x(t) = \underbrace{x_0 \cdot e^{-\gamma t}}_{\text{Amplitude nimmt ab}} \cdot \cos(\omega t)$$

- Energie $\sim$ Amplitude^2

↳ Energieabnahme $\sim (e^{-\gamma t})^2 = e^{-2\gamma t}$

$$= e^{-t/\tau}$$

mit Zeitkonstante $\tau = \frac{1}{2\gamma}$

Beispiele für gedämpfte Schwingungen:

- Stoßdämpfer im Auto
- Schallabsorber
- Schwingungsdämpfer Hochhaus, Brücke etc

London: Millenium Bridge

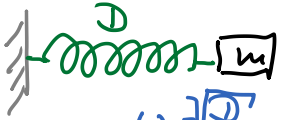
↳ Resonanz & Dämpfung

Erzwungene Schwingungen
Resonanz

Erzwungene Schwingungen & Resonanz

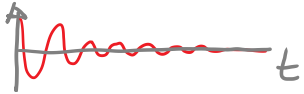
- bisher: freie, gedämpfte Schwingungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-\omega_0^2 x}_{\text{frei}} \underbrace{- b\frac{dx}{dt}}_{\text{Dämpfung}}$$



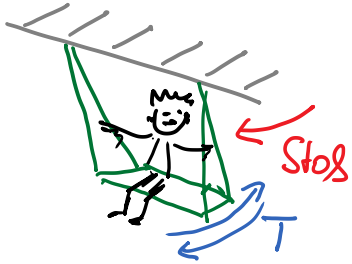
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega t)$$



- hier: äußere, periodische Anregung
  → Zeitverlauf der Schwingung

- Beispiel: Schaukel

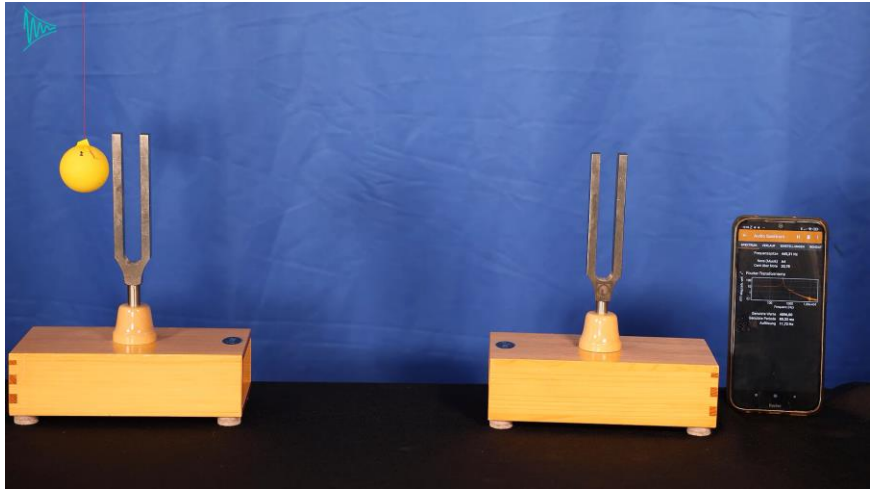


Experiment: Anregung Fadenpendel

- Fadenlänge: $0{,}15 \leq l \leq 0{,}18\,m$
  ↳ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$: $0{,}78\,s - 0{,}85\,s$

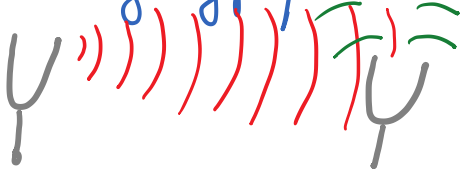
Beobachtung: mit periodischer Anregung
↳ komplizierte Bewegung der Pendel
↳ wenn Frequenz der Anregung ≅ Freq. Pendel
→ große Amplitude

Stimmgabeln: Resonanz



Übertragung von Schwingungsenergie nur, wenn

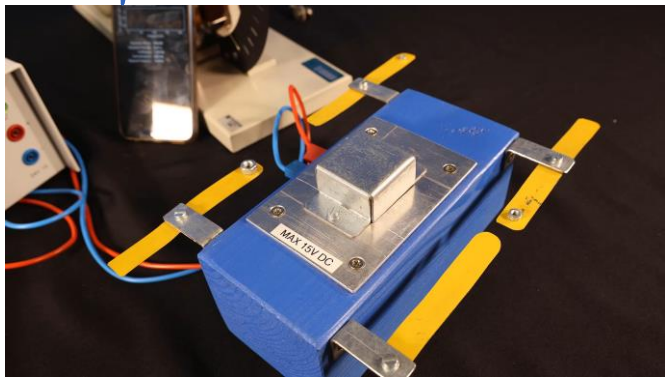
Anregungsfrequenz = Eigenfrequenz



Tanzendes Korkmehl im Weinglas

- Schwingungsfrequenz des Weinglases: 602 Hz
- Schallquelle mit 602 Hz
  - ↳ Anregung des Glases zum Schwingen
  - ↳ Korkmehl „tanzt"

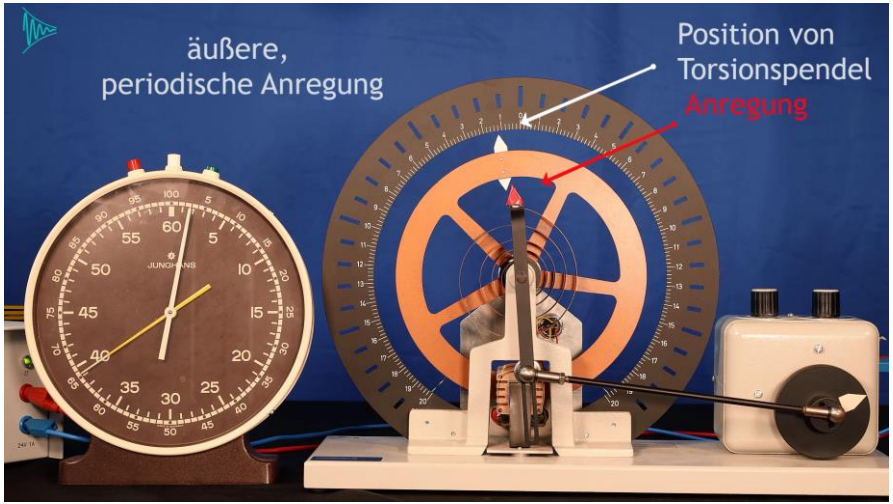
Beispiel: Metall-Zungen



- mechanische Schwingungen:
  E-Motor $\longrightarrow \omega$
- Übertragung durch Tisch
- Metall-Zunge mit Eigenfrequenz ω_0
  große Schwingungsamplitude,
  wenn $\omega_0 \simeq \omega$ Resonant

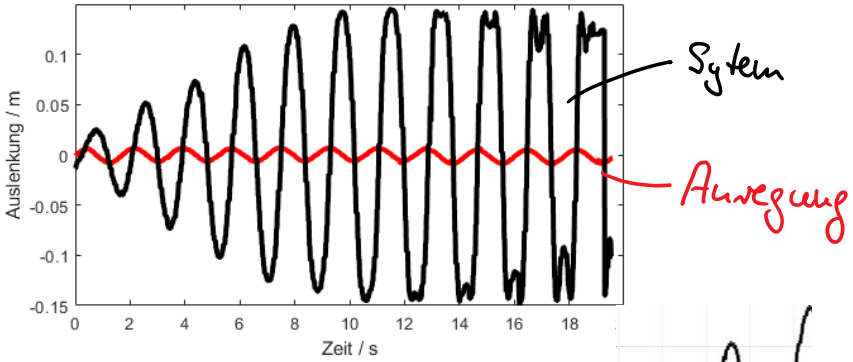
Erzwungene Torsionsschw.: Resonanz

Pohl'sches Rad

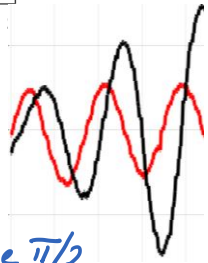


- äußere Anregung mit Frequenz
- System schwingt mit Eigenfrequenz

Zeitverlauf:



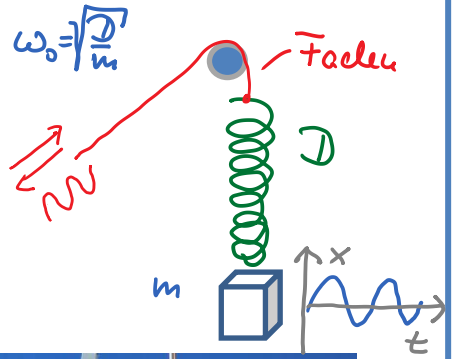
- Anregung mit Eigenfrequenz
  ↳ Resonanz: große Amplitude
  - Anregung um Phase $\pi/2$ vor System

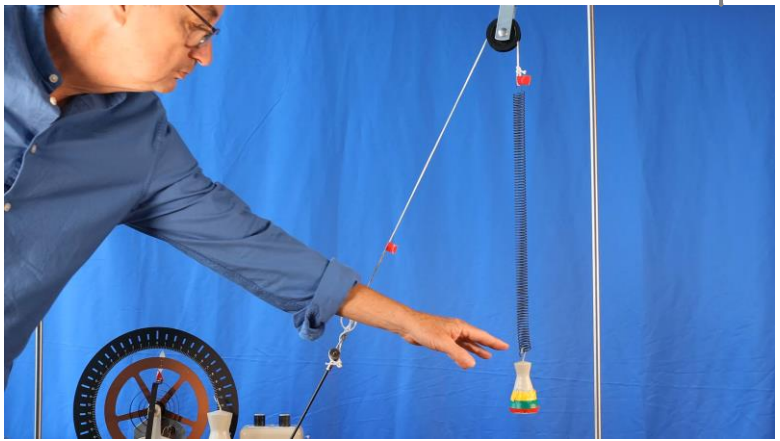


Phasenverschiebung!

Federpendel mit äußerer Anregung

- freie Schwingung mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$
- Ziehen an Faden mit $\cos(\omega t)$





Beobachtung:

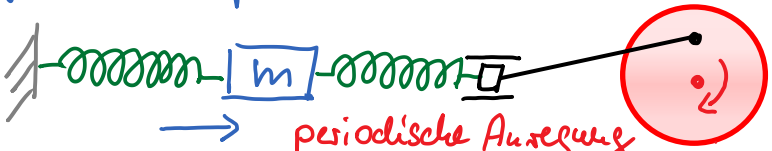
- für $\omega < \omega_0$ und $\omega > \omega_0$: kleine, mittlere Bewegung, komplizierte t-Abh.
- für $\omega = \omega_0$: große Amplitude, Verstärkung der Schwingung

→ Resonanz

Mathematische Beschreibung (Ansatz):

Details: Literatur

· für Federpendel



periodische Anregung durch Drehung

Bewegungsgl.

$$\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}}_{=F=m\cdot a} + \underbrace{b\frac{dx}{dt}}_{\text{Dämpfung}} + \underbrace{Dx}_{\text{Federkraft}} = \underbrace{F_0\cdot\cos(\omega t)}_{\text{äußere Anregung mit }\omega}$$

mit $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$, $\gamma = \frac{b}{2m}$, $K = \frac{F_0}{m}$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\cdot\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\cdot x = K\cdot\cos(\omega\cdot t)}$$

· rechte Seite: unabh. von x

· formal: inhomogene Differentialgl.

↳ Allgemeine Lösung (siehe Literatur)

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A_1 e^{-\gamma t}\cdot\cos(\omega_1\cdot t+\varphi_1)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{A_2\cdot\cos(\omega t+\varphi)}_{\text{inhomogene Lös.}}}$$

mit $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ und Phasen φ_1, φ

· Einschwingen: für großes T wird $e^{-\gamma t} \approx 0$

↳ stationärer Fall:

$$\boxed{x(t) = A_2\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)}$$

Amplitude Phase

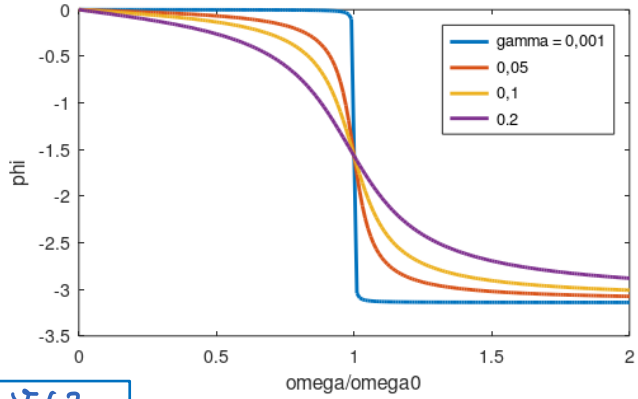
A_2 & φ sind Funktionen von ω_0, γ, ω

$$x(t) = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

- A_2 und φ sind Funktion von ω_0, γ und ω

a) Phasenverschiebung φ:

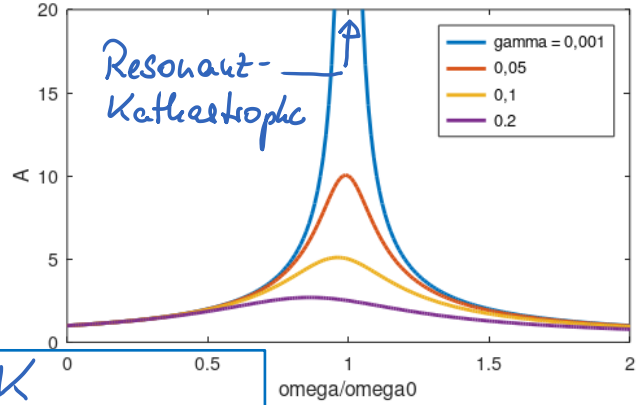
- Verzögerung von Anregung und System



$$\tan\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- φ wächst von 0 auf $-\pi$
  ↳ Schwingung läuft der Anregung nach
- für sehr kleine Dämpfung: Phasensprung

b) Amplitude A:



$$A = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

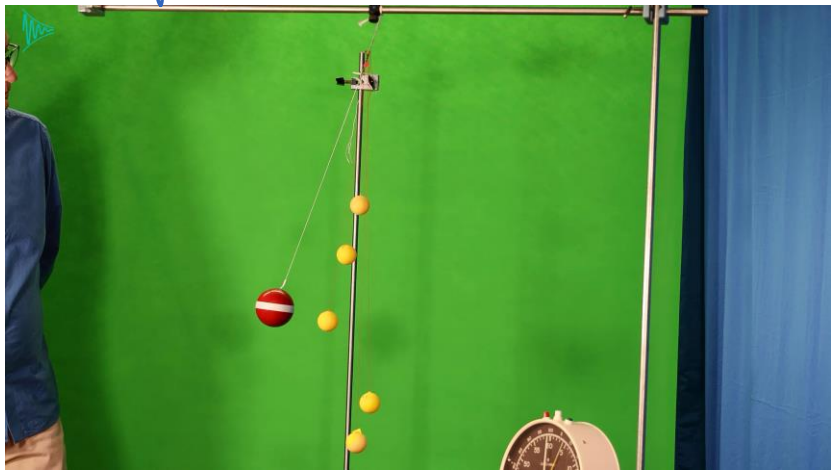
- Amplitude ~ äußerer Kraft
- starke Dämpfung → kleines A
- Resonanz, wenn $\omega = \omega_0$
- für $\gamma \ll \omega$ und $\omega \approx \omega_0$: „Resonanz-Katastrophe"
- genaue Rechnung: Literatur

Einsturz Tacoma-Bridge (1940)

- Anregungsenergie: Wind
  ↳ Resonanz-Katastrophe

Barton-Pendel:

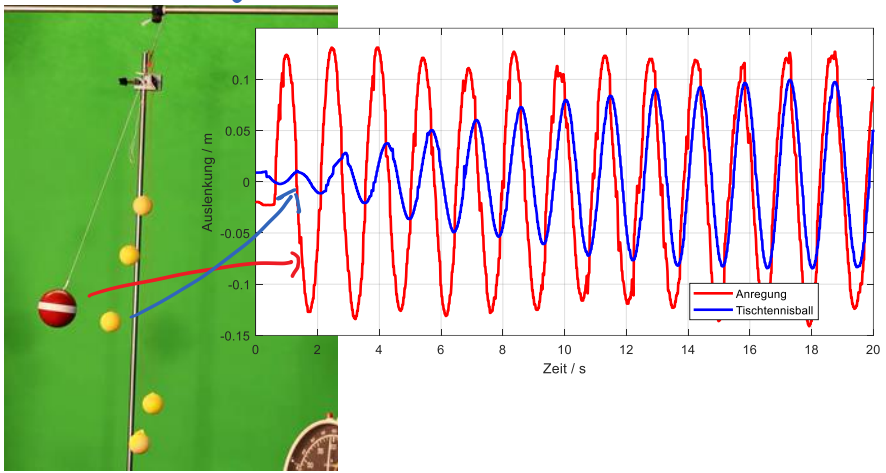
- Fadenpendel: unterschiedliche Längen



- gemeinsamer horizontaler Faden
  ↳ Kopplung
- Energieübertragung

} Frequenzen gleich

Zeitverlauf



- anfangs: Anregung vor dem System
  ↳ $\varphi \approx 90°$
- am Ende: φ klein
- Synchronisierung

Resonanz,

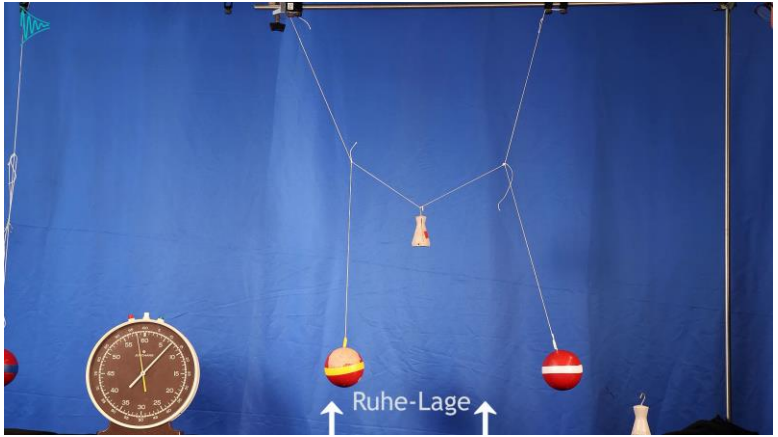
wenn Anregungsfreq. = Schwingungsfr.

↳ Frequenzanpassung

↳ Energieübertragung

↳ Phasenverschiebung

Ausblick: gekoppelte Pendel



Ausblick:

- Musikinstrumente (z.B. Flöte, Flasche...)
- Resonanz
- Wellen

Gekoppelte Schwingungen

Gekoppelte Schwingungen

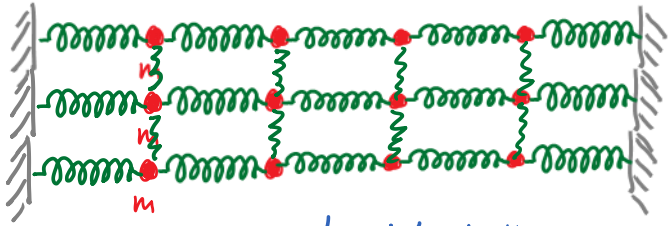
- Systeme aus mehreren, verbundenen Pendeln

Beispiel:

- Federpendel

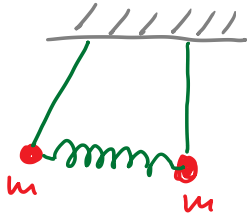
1D

2D

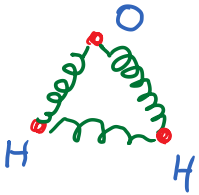


↳ Kristall

- Fadenpendel

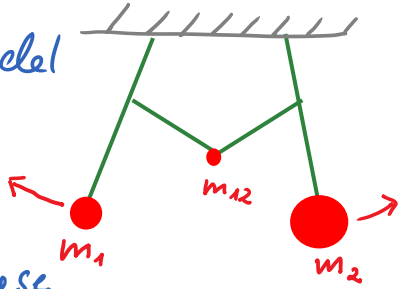


↳ H_2O-Molekül

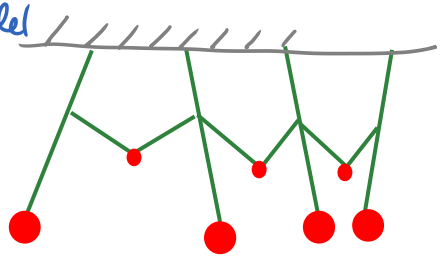


hier:

- gekoppelte Fadenpendel

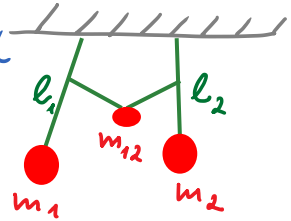


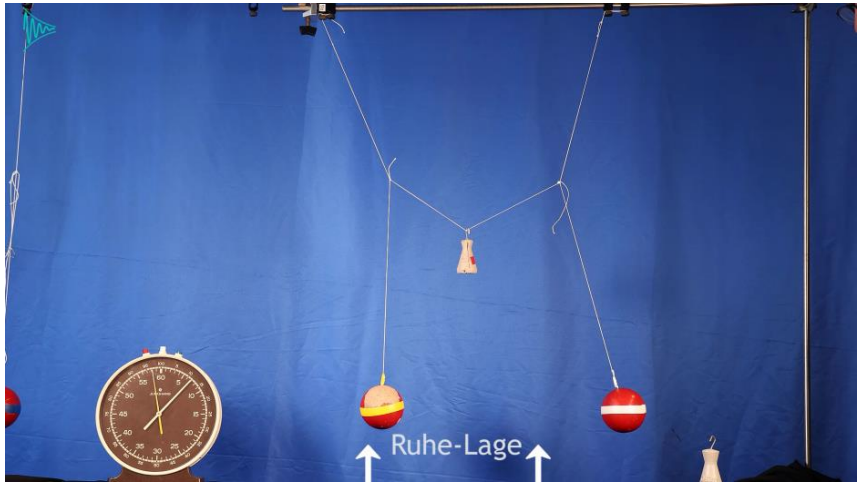
- Experiment: 2 Pendel & mathematische Analyse
- Normalschwingungen, -Moden
- Experiment: 4 Pendel



Gekoppelte Fadenpendel

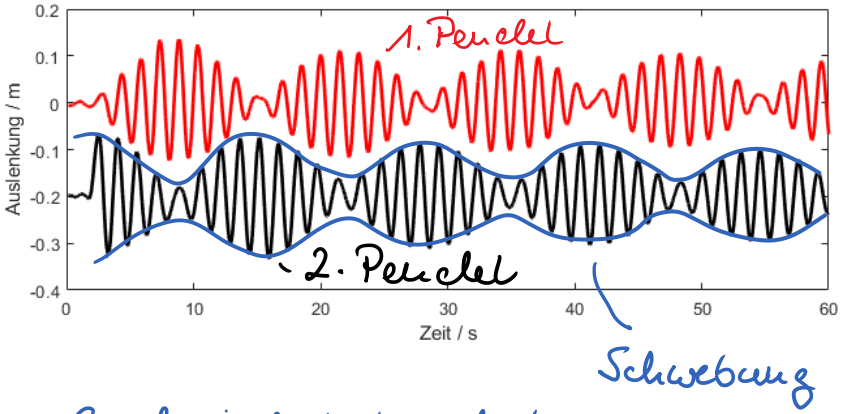
- Experiment: 2 Fadenpendel
  $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$





Beobachtung:

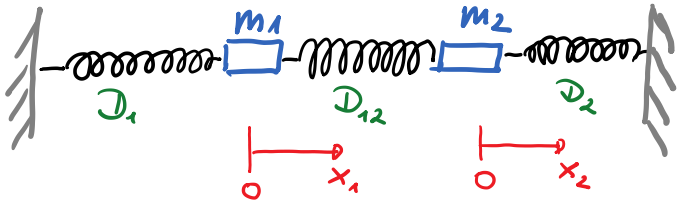
- Bewegung / Schwingungsenergie wechselt zwischen den Pendeln



- Geschwindigkeit wechselt
- Energieübertragung:
  ... wovon abhängig?
  ... wie schnell?
  ... Einfluß von m_{12}

Berechnung: gekoppelte Federpendel

- 2 Massen m_1, m_2
- Rechnung einfacher als für Fadenpendel



- Koordinaten x_1 & x_2 für m_1 & m_2
- Kopplung durch 3. Feder mit D_{12}
- Bewegungsgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} F_1 &= m_1\ddot{x}_1 = -D_1 x_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \\ F_2 &= m_2\ddot{x}_2 = -D_2 x_2 - D_{12}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{Auslenkung der mittleren Feder}} \end{aligned}\right\}$$

$\uparrow \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

↳ zwei Differentialgleichungen, Kopplung, da in jeder Gleichung x_1 & x_2

- Sonderfall einfach lösbar für:

$$m_1 = m_2 = m \quad \text{und} \quad D_1 = D_2 = D$$

↳ Symmetrisch:

↳ $$m \cdot \ddot{x}_1 = -D x_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \qquad \text{I}$$

$$m \cdot \ddot{x}_2 = -D x_2 - D_{12}(x_2 - x_1) \qquad \text{II}$$

I + II: $m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -D(x_1 + x_2)$

I − II: $m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2)$

- mit der Koordinatentransformation

$$z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

↳ $$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{z}_1 &= -D z_1 \\ m\ddot{z}_2 &= -(D + 2D_{12}) z \end{aligned}}$$ } Bewegungsgleichung für harm. Schw.

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{z}_1 &= -D z_1 \\ m\ddot{z}_2 &= -(D+2D_{12})\, z \end{aligned}}$$

Bewegungsgleichung für harm. Schw.

↳ Lösungen:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \\ z_2 &= A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \end{aligned}}$$

mit $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{D+2D_{12}}{m}}$

↑Amplituden ↑Phasen

- harmonische Schwingungen in den Koordinaten z_1 und z_2
  → Normalkoordinaten

- für eine Beschreibung in den alten Koord.
  ↳ Rücktransformation
- einfach für $A_1 = A_2 = A$

$$x_1 = z_1 + z_2 = A \cdot [\cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)]$$

$$x_2 = z_1 - z_2 = A\,[\cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)]$$

- trigonometr. Funktion (siehe Literatur)

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

↳

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2A\cos\Big(\underbrace{\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2}}_{\Delta\omega/2} \cdot t\Big) \cdot \cos\Big(\underbrace{\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}}_{\text{Mittelwert}} \cdot t\Big) \\ x_2 &= -2A\sin\Big(\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2} \cdot t\Big) \cdot \sin\Big(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2} \cdot t\Big) \end{aligned}}$$

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

- Normalkoordinaten / Laborkoordinaten

→ Normalkoordinaten $z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $z_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$
  - einfache Beschreibung
  - relative Bewegung der Massen

→ Laborkoordinaten x_1 & x_2:
  - Bezug zum Labor, Beobachter, „Auge"

- wenn $\omega_1 \approx \omega_2 \rightarrow \frac{\omega_1-\omega_2}{2} \ll \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

↳ in den Koordinaten x_1 und x_2 ergibt sich eine langsame & eine schnelle Schw.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right) \\ x_2 &= -2A\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right) \end{aligned}}$$

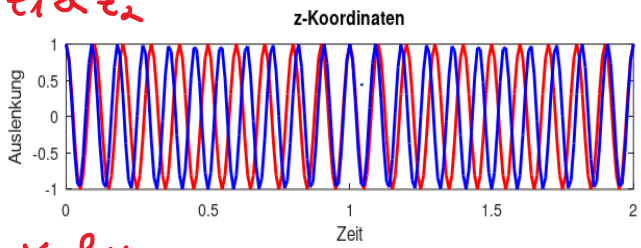
- x_1 & x_2: Produkt aus zwei Schwingungen
  → Schwebung

z_1 & z_2: harmonische Schwingungen mit unterschl. Freq.

x_1 & x_2: Amplitude wechselt mit kleiner Freq. $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$;
Freq. von x_1 & x_2 gleich,

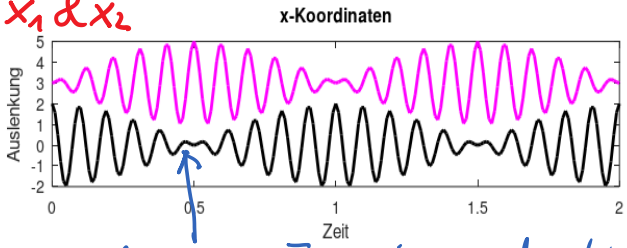
Beispiel: $\omega_1 = 2\pi\cdot 10\,Hz$, $\omega_2 = 1{,}1\,\omega_1$ $\quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0$
$A_1 = A_2 = 1$

z_1 & z_2



Normalkoord. z_1 & z_2 für $\omega_1 = 2\pi\cdot 10$, $\omega_2 = \omega_1\cdot 1{,}1$

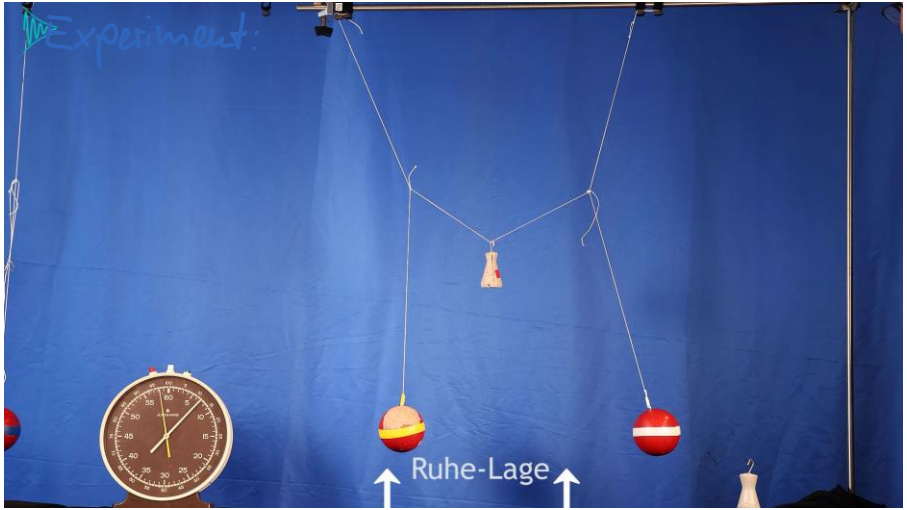
x_1 & x_2



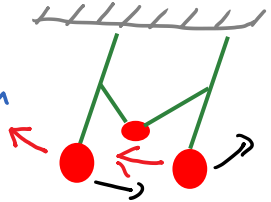
Position der Massen im Labor-System

Geschw. und Energie wechselt zwischen m_1 und m_2

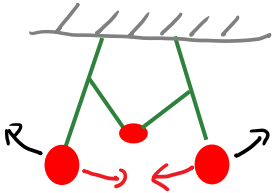
Normal-Schwingungen



1. Normal-Schwingung:
   - Symmetrisch: Bewegung gleich
     $T_1 = 1{,}51\,s$



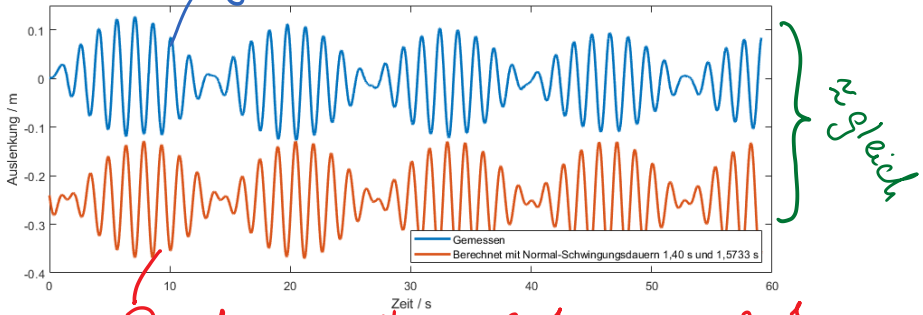
2. Normal-Schwingung:
   - anti-symmetrische Bewegung
     $T_2 = 1{,}40\,s$



Beobachtung: zwei Normalschwingungen, bei denen beide Massen „miteinander" oder „gegeneinander" schwingen bei jeweils gleichem T bzw. ω

Vergleich: Experiment – Rechnung

gemessene Position einer Kugel



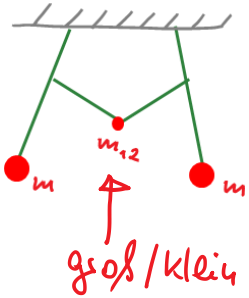
Berechnung mit $\omega_1 = 2\pi \frac{1}{1{,}51\,s}$ $\omega_2 = 2\pi \frac{1}{1{,}4\,s}$

$$x_1 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t+\varphi\right)$$

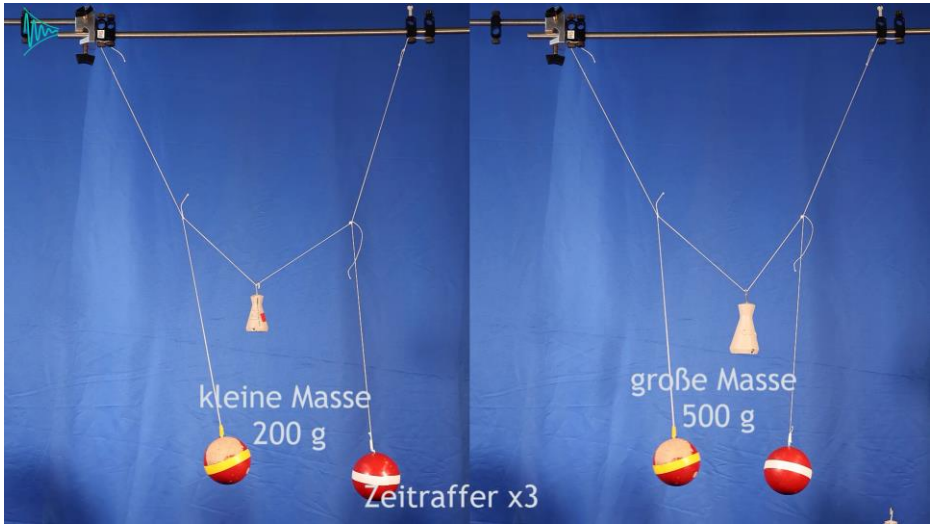
↳ Normalschwingungen beschreiben die Schwebung!

Einfluß der Kopplung

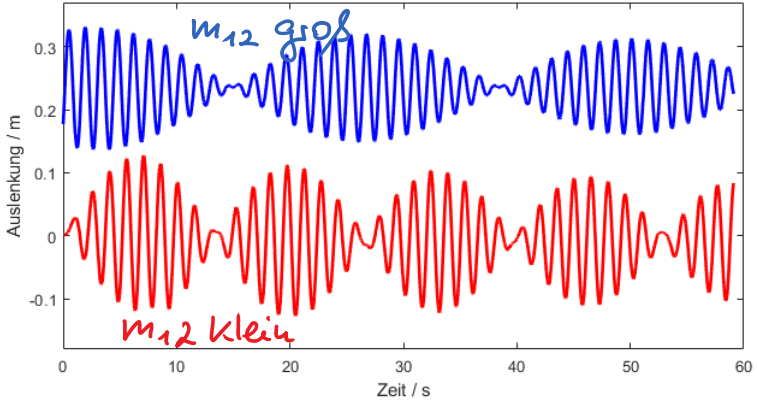
- Stärke der Kopplung ist abh. von m_{12}



Experiment:



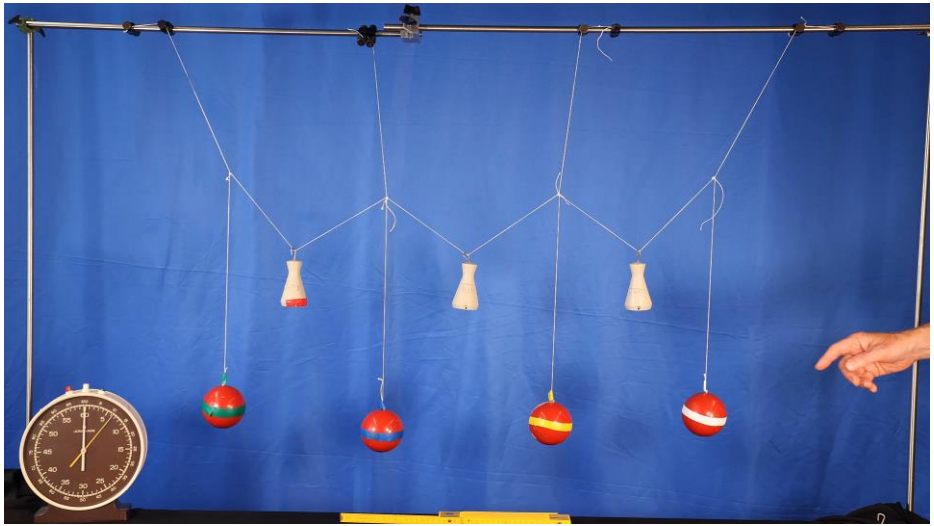
- Position einer Masse: Vergleich für m_{12} groß/klein



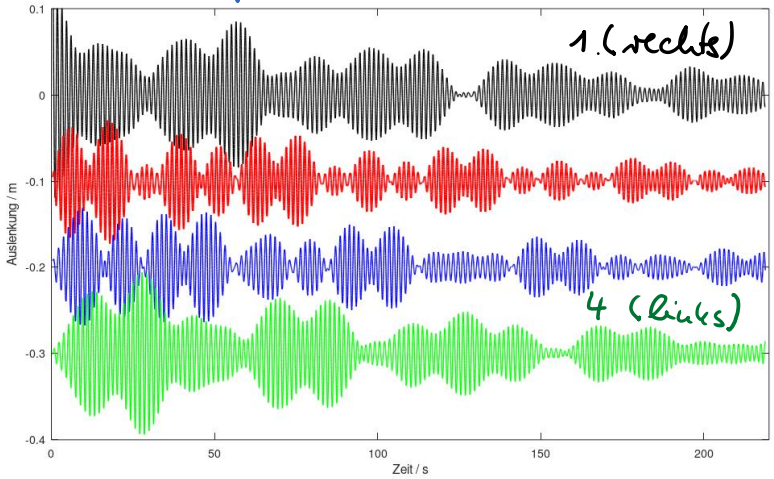
- Erklärung: großes m_{12} → stärkere Kraft zwischen Massen und größere Trägheit

Gekoppelte Schwingungen: 4 Massen

· Experiment:



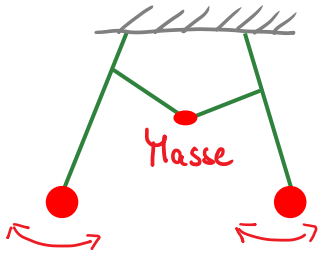
Zeitverlauf der 4 Massen:

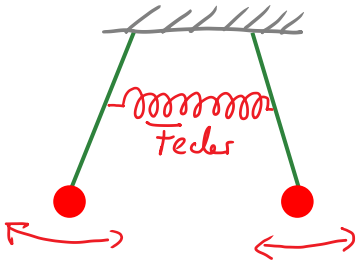


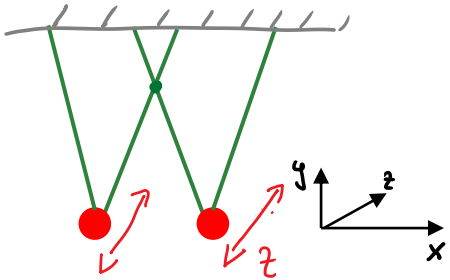
↳ 4 Normalmoden mit Schwingungsdauern
$T_1 = 1{,}51\,s$ $T_2 = 1{,}40\,s$, $T_3 = 1{,}38\,s$, $T_4 = 1{,}33\,s$

• mathem. Lösung: Bewegungsgl. für jede Masse
↳ Literatur

Beispiele für gekoppelte Pendel

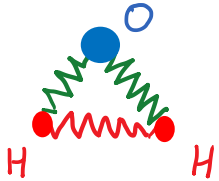






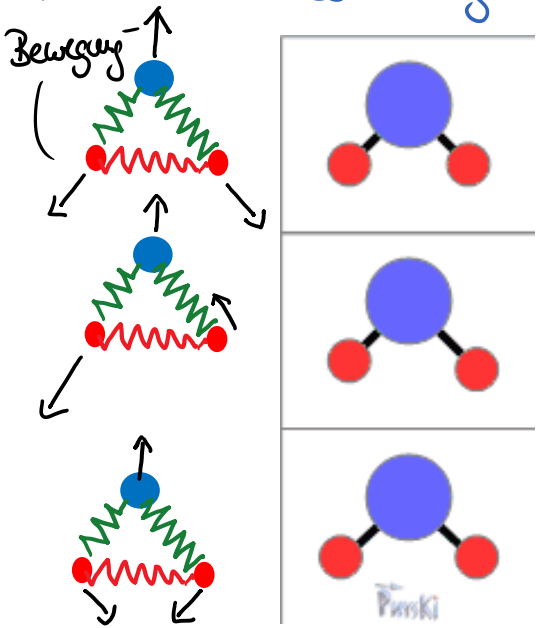
Anwendung: Molekülschwingungen

- H_2O:



im Molekül halten Kräfte die Atome im Gleichgewicht

↳ drei Normalschwingungen:

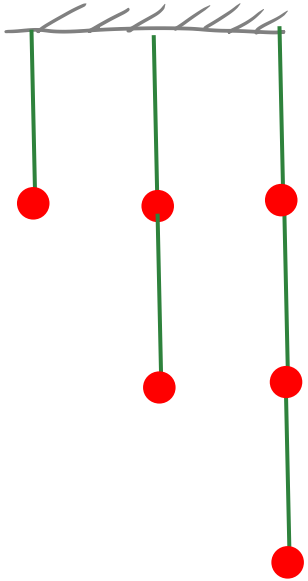


↳ optische Absorption

Beispiel: Doppel- / Dreifach-Pendel

Experiment:

Normalschwingungen



Gekoppelte Schwingungen

- Überlagerung von Schwingungen

  ↳

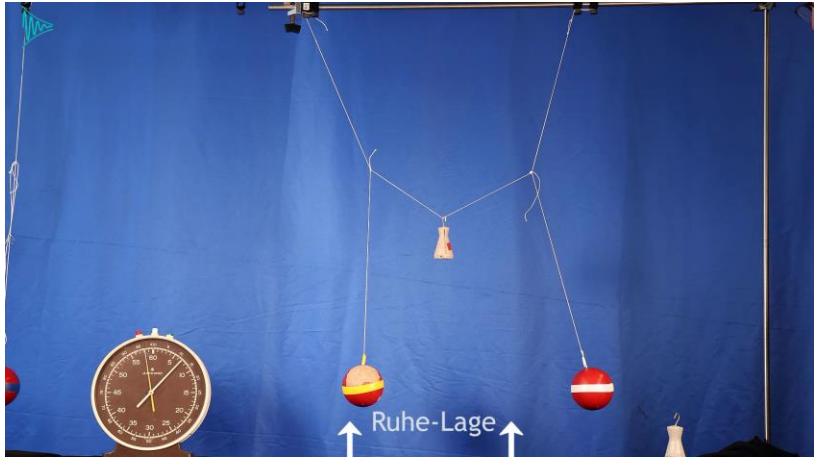
- von wenigen Massen zu vielen

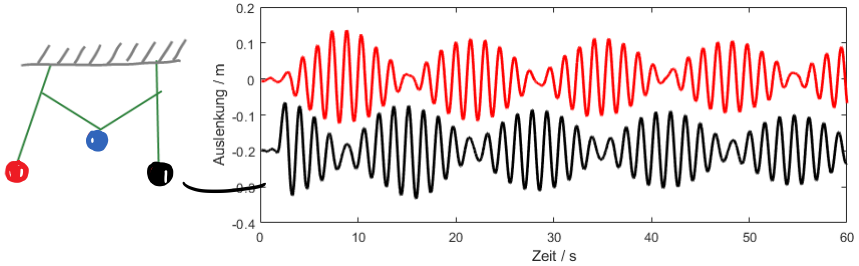
↳ Wellen

Überlagerung von Schwingungen

Überlagerung von Schwingungen

- gekoppelte Schwingungen



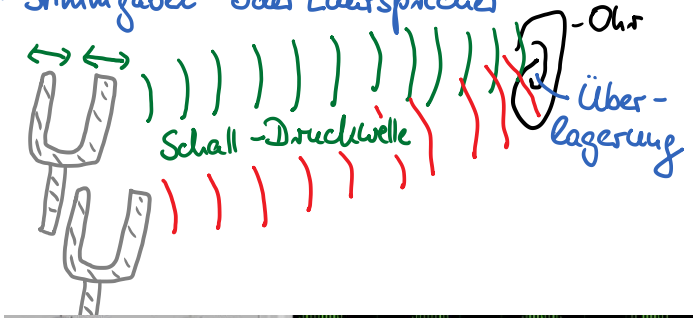


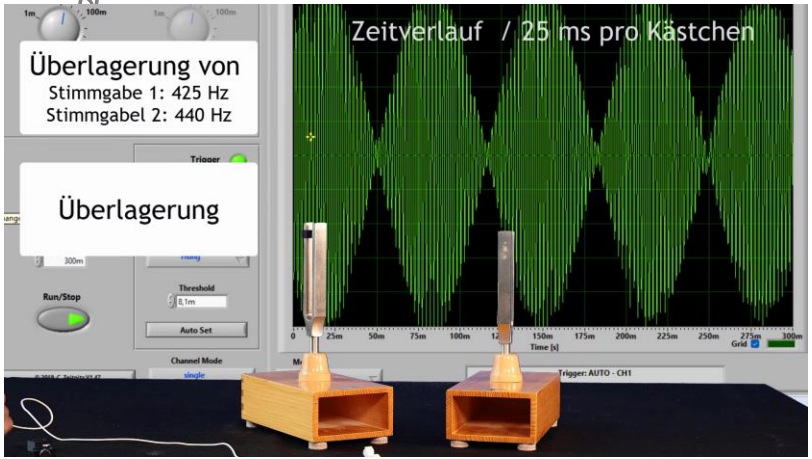
- Wasserwellen: Überlagerung

- Superposition: Addition von Amplituden

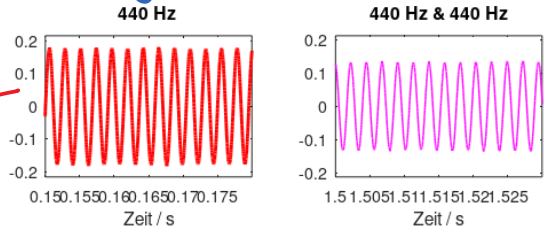
Akustik: Überlagerung von Schall

- Stimmgabel oder Lautsprecher





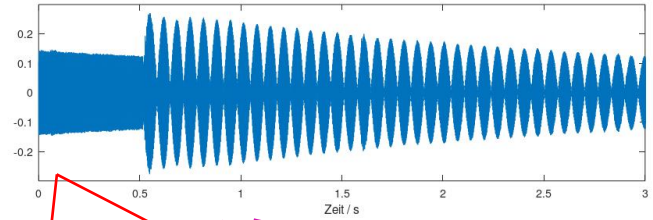
a) Beide Stimmgabeln 440 Hz



eine Stimmgabel

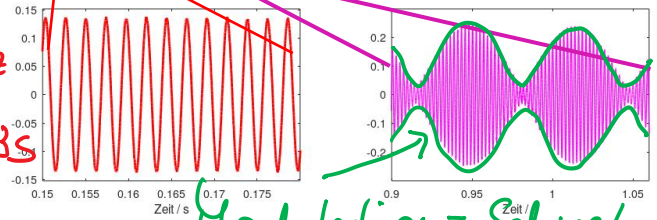
zwei Stimmgabeln

b) eine Stimmgabel 440 Hz, eine 425 Hz



$\nu = 440\,Hz$

$T = 0{,}0023\,s$



Modulation = Schwebung

• Addition von Schwingungen

a) Schwingungen gleicher Frequenz

b) Schwingungen unterschiedlicher Frequenz

• Für zwei Schwingungen:

$$\left\{ \begin{aligned} z_1(t) &= a_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ z_2(t) &= a_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}$$

gesucht: $\{ z(t) = z_1(t) + z_2(t) \}$

Allgemein:

- Amplitude a_n
- Kreisfrequenz $\omega_n = 2\pi \cdot \frac{1}{T_n}$
- Phase φ_n

$$z = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t + \varphi_i)$$

a) Schwingungen mit gleicher Frequenz

$$z_1 = a_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad \omega = \omega_1 = \omega_2$$
$$z_2 = a_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

unterschiedliche Amplituden & Phasen

mit Trigonometrischen Umformungen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad \text{(Literatur)}$$

↳ Umformung liefert

$$z = z_1 + z_2 = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$= C \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

mit $A = a_1 \cdot \cos\varphi_1 + a_2 \cdot \cos\varphi_2$

$$B = -a_1 \cdot \sin\varphi_1 - a_2 \cdot \cos\varphi_2$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \tan\varphi = -\frac{B}{A}$$

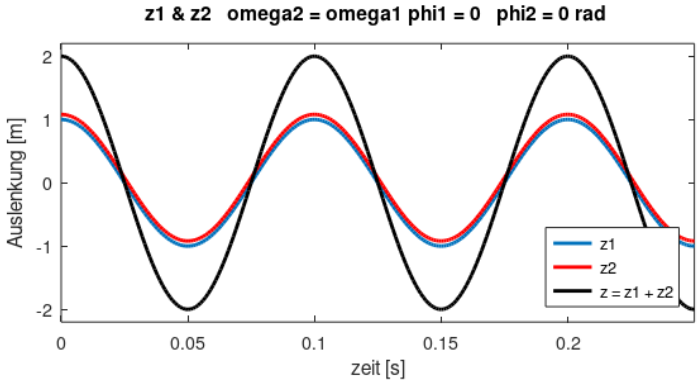
Sonderfall: $a_1 = a_2 = a$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

↳ $A = a \cdot (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) = a \cdot 2$

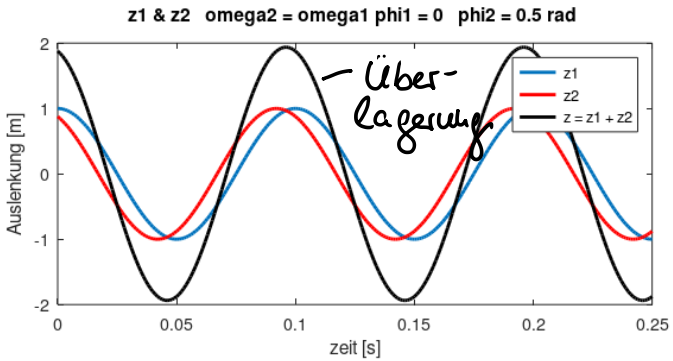
$B = -a(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) = 0$

$C = A \qquad \tan\varphi = -0 \rightarrow \varphi = 0$

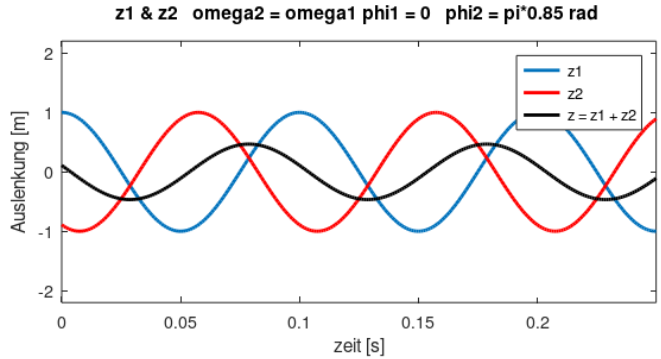
also: $z = 2 \cdot a \cdot \cos(\omega t)$



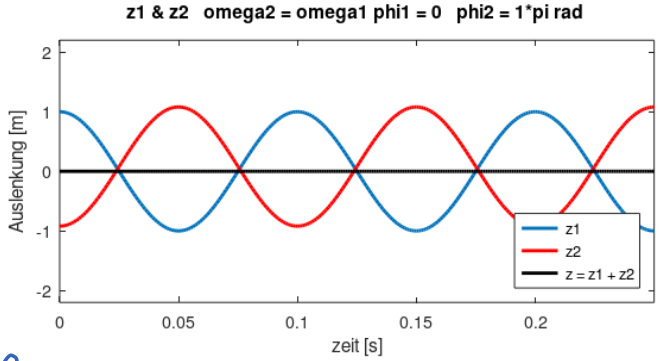
- für $a_1 = a_2 = 1$ $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = 0{,}5$ rad



- für $a_1 = a_2 = 1$ $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = 0{,}85 \cdot \pi$ rad



- für $a_1 = a_2 = 1$ $\varphi_1 = 0$ $\varphi_2 = \pi$ rad



Auslöschung der Schwingungen

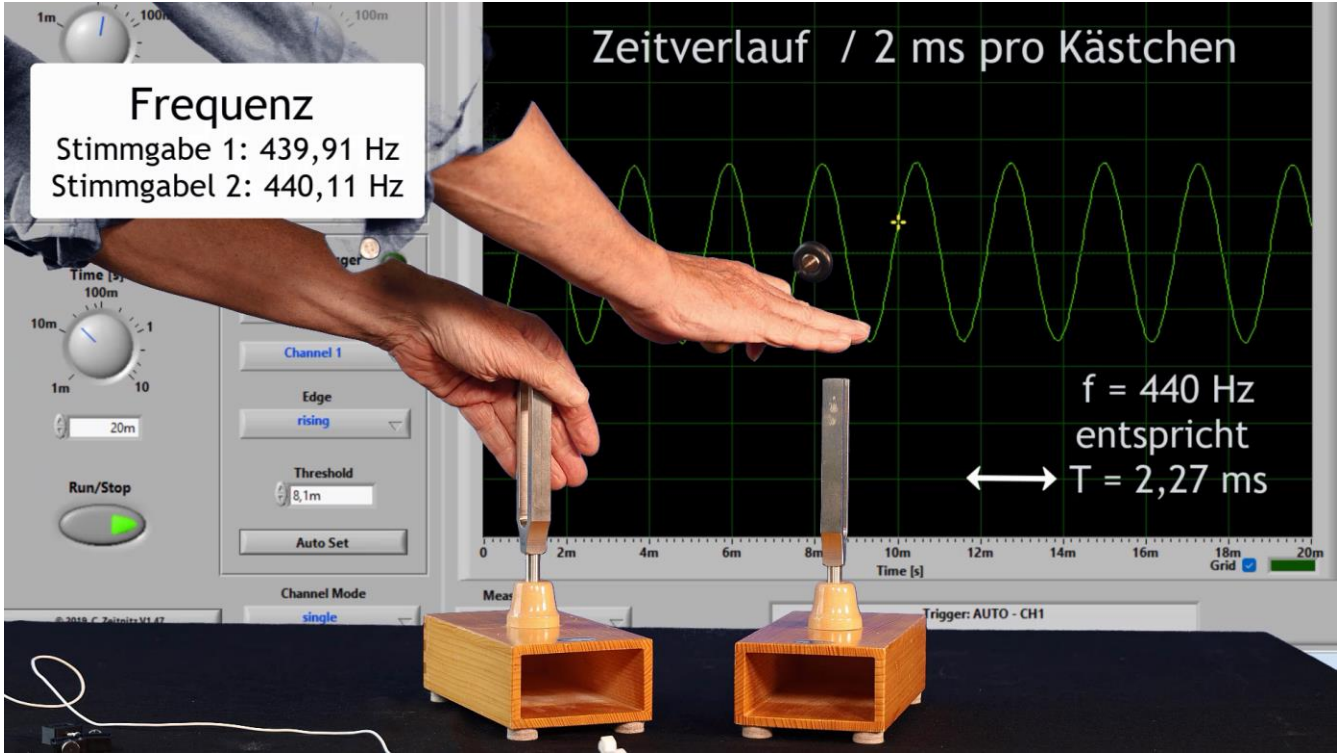
Anwendung: Noise-cancellation in Kopfhörern

- Schallquelle: z_2

  Mikro & Lautsprecher: $z_2 = z_1$ (mit Phase π)

  ↳ Auslöschung

Demo: Stimmgabel: gleiche Frequenz



b) Schwingungen: versch. Frequenzen

- zur Vereinfachung: Amplituden $a_1 = a_2 = a$
  Phasen $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$z_1 = a \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$$
$$z_2 = a \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$$

Trigonometrische Additionstheorem:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\hookrightarrow \quad z = z_1 + z_2$$
$$= 2a \cdot \cos\Big(\underbrace{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}}_{\text{halbe Differenz}} \cdot t\Big) \cdot \cos\Big(\underbrace{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}_{\text{Mittelwert } \omega_m} \cdot t\Big)$$

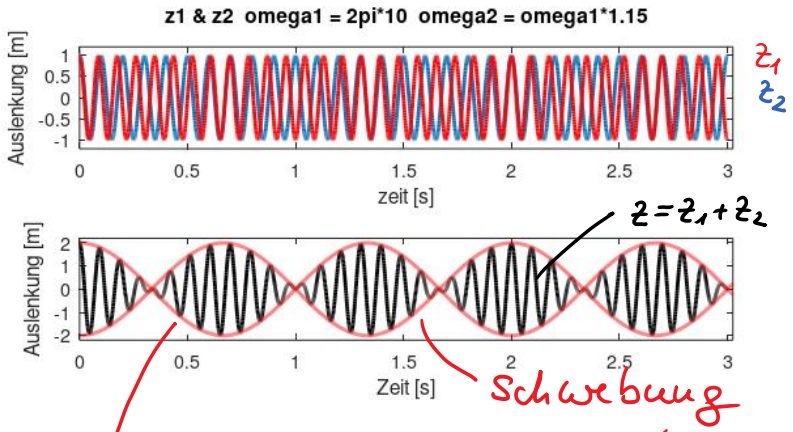
- wenn $\omega_1 \approx \omega_2$: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 + \omega_2$

$$z = 2 \cdot a \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right)}_{\text{langsame}} \cdot \underbrace{\cos(\omega_m \cdot t)}_{\text{schnelle}}$$

Modulation

Beispiel: $a_1 = a_2 = 1$ $\quad \omega_1 = 2\pi \cdot 10\,\text{rad}$ $\quad \omega_2 = \omega_1 \cdot 1{,}15$

$\hookrightarrow \omega_m = 2\pi \cdot 10{,}75\,\text{rad}$ $\quad \Delta\omega/2 = 0{,}75\,\text{rad}$



$2a \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right)$: langsame Modulation des schnell oszillierenden Signals

$\boxed{\longrightarrow \text{Schwebung („beat")}}$

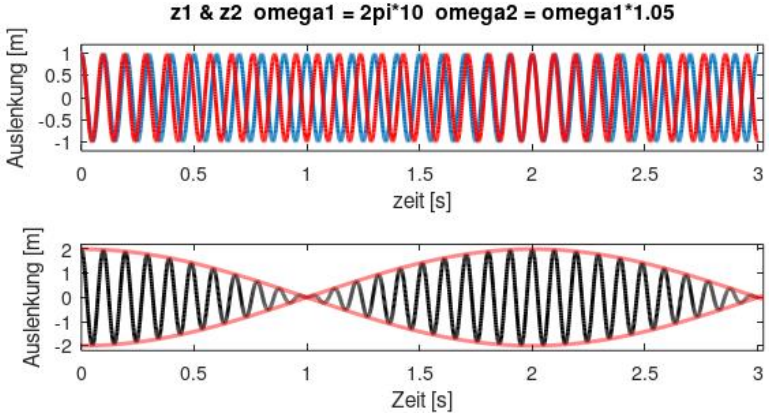
Schwebung: $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t\right)$

$$z = 2\cdot a\cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t\right)}_{\text{langsame}}\cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)}_{\text{schnelle}}$$

Modulation

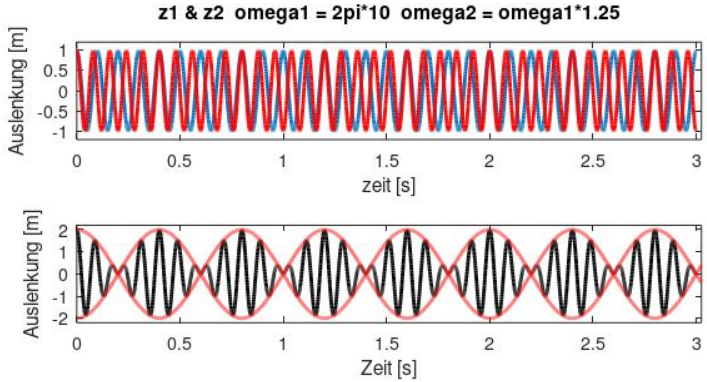
Beispiel: $a_1 = a_2 = 1$ $\quad \omega_1 = 2\pi\cdot 10\,\text{rad}$ $\quad \omega_2 = \omega_1\cdot 1{,}05$

$\omega_m = 2\pi\cdot 10{,}25\,\text{rad}$ $\quad \underbrace{\Delta\omega/2 = 0{,}25\,\text{rad}}$



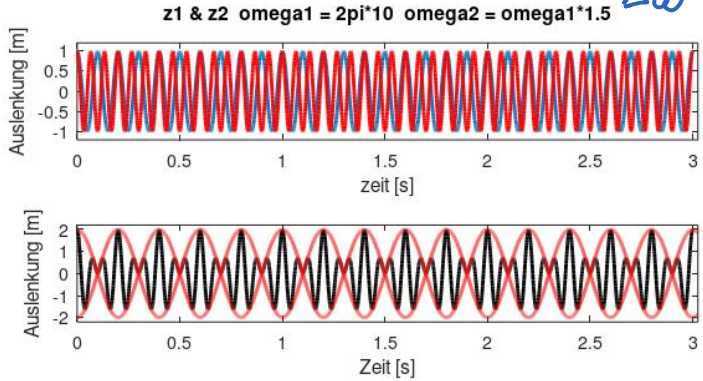
Beispiel: $a_1 = a_2 = 1$ $\quad \omega_1 = 2\pi\cdot 10\,\text{rad}$ $\quad \omega_2 = \omega_1\cdot 1{,}25$

$\underbrace{\Delta\omega/2 = 1{,}25\,\text{rad}}$

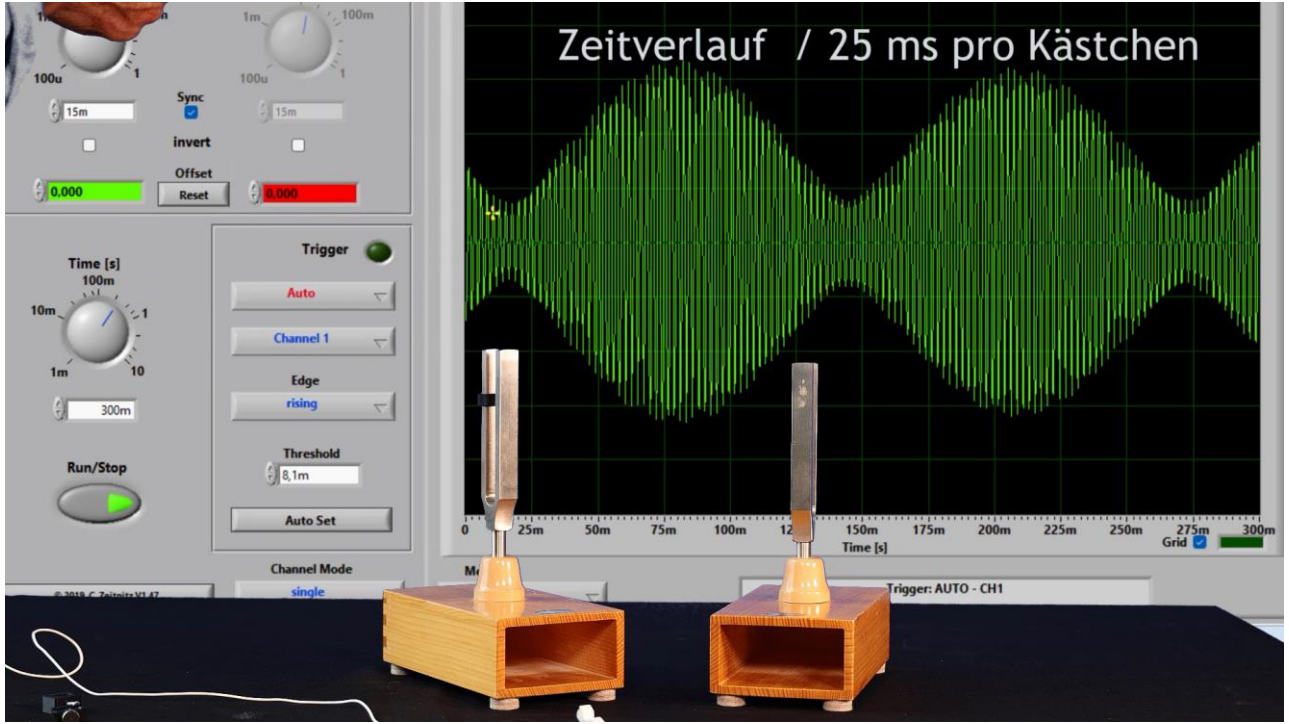


Beispiel: $a_1 = a_2 = 1$ $\quad \omega_1 = 2\pi\cdot 10\,\text{rad}$ $\quad \omega_2 = \omega_1\cdot 1{,}5$

$\Delta\omega = 2{,}5\,\text{rad}$



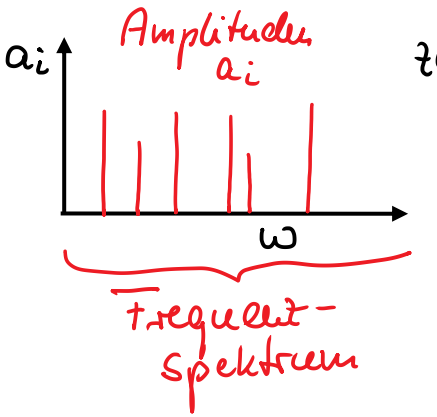
Demo: Stimmgabel: unterschiedliche Frequenzen

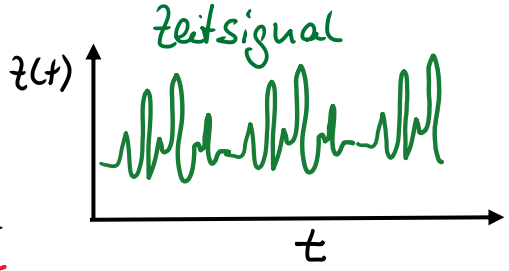


Allgemein: Überlagerung von vielen Freq.

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= a_1 \cos(\omega_1 \cdot t) \\ z_2 &= a_2 \cos(\omega_2 \cdot t) \\ &\vdots \\ z_n &= a_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z &= \sum_i z_i \\ &= \sum_i a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t) \end{aligned}$$

- z ist periodisch mit Periodendauer $T_p = 2\pi \frac{1}{\omega_G}$ ← größte Kreisfreq.





→ Fouriertransformation (Mathematik & Signalverarbeitung)

↳ Optik: Interferenz
Akustik: Klangfarbe
etc